UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Fristående kurs
Analys MN1 distans
2005–02–12

Skrivtid: 10-15. Hjälpmedel: Gymnasieformelsamling. Lösningarna skall *åtföljas av förklarande text och figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. Vill du räkna din poäng från delprovet ska du ej lämna in lösning på problem 1 och 2. Väljer du att redovisa lösning på något av dessa problem, räknas istället poängen från slutprovet* för både problem 1 och 2. *För godkänt krävs minst 18 poäng, för väl godkänt minst 28 poäng, inklusive din poäng från delprovet.*

1. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\arctan x^2} - \cos x}{x^2}$.

2. I en rät kon av trä är höjden tre gånger så stor som basradien ($= r$). Man vill av konen utskära en rät cirkulär cylinder med maximal begränsningsyta. Bestäm cylinderns basradie och höjd.

3. Beräkna integralerna

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2 - \sin^2 x}\, dx \qquad\qquad \text{b)} \quad \int 4x^3 \arctan x \, dx$$

4. Genom centrum av ett klot med radie R borras ett cylindriskt hål med radie a ($0 < a < R$). Beräkna den *återstående* volymen.

5. Lös differentialekvationerna

$$\text{a)} \quad xy' - 2y = x^2 \quad \text{om } y(1) = 0 \qquad\qquad \text{b)} \quad y'' + y' - 2y = 3e^x.$$

6. Undersök kurvan $y = \dfrac{x^3}{1 + x^3}$ med avseende på extrempunkter och asymptoter och rita kurvan i dess huvuddrag. Bestäm därefter, och åskådliggör grafiskt, hur arean av en rektangel varierar, som har ett hörn på den givna kurvan och två sidor längs kurvans asymptoter.

7. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} (\arctan k) \cdot \arctan \dfrac{1}{k^2}$ är konvergent eller divergent.

8. För vilka reella tal a gäller olikheten $e^x > ax$ för alla x?

(V.g.v.)

Några MacLaurin-utvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^n}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1)})$$

Några trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Lösning till problem 1: Vi använder MacLaurin-utvecklingar:

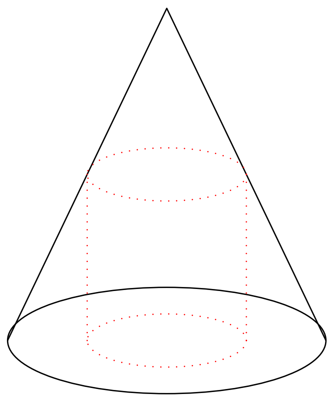
$$e^{\arctan x^2} = e^{x^2+O(x^6)} = 1+(x^2+O(x^6))+O((x^2)^2) = 1+x^2+O(x^4) \quad \text{samt}$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4)$$

vilket ger

$$\frac{e^{\arctan x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{1+x^2+O(x^4)-(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{x^2} = \frac{3x^2/2+O(x^4)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{3}{2}.$$

Lösning till problem 2: Basradie och höjd i den givna konen är r resp $3r$. Om vi sätter basradie resp höjd i den sökta cylindern till x och h så ger likformiga trianglar förhållandet

$$\frac{x}{r} = \frac{3r-h}{3r} \Rightarrow h = 3(r-x)$$



Begränsningsytan till cylindern består av den buktiga ytan (mantelytan) samt lock och botten. Detta ger arean

$A = 2\pi x h + 2\cdot\pi x^2$ och insättning av $h = 3(r-x)$ ger funktionen
$A = A(x) = 6\pi x(r-x)+2\pi x^2 = 2\pi(3rx-x^2)$

Definitionsmängden till denna funktion är uppenbarligen $0 \leq x \leq r$. Vi ser att $A(0) = 0$ och $A(r) = 2\pi r^2$. Kritiska punkter fås ur

$$A'(x) = 2\pi(3r-4x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3r}{4} \quad \text{vilket ger}$$
$$A\left(\frac{3r}{4}\right) = \frac{27\pi r^2}{8} \quad \text{vilket ger maximum}$$

Den största cylindern har således basradie $x = 3r/4$ och höjd $h = 3(r-x) = 3r/4$.

Lösning till problem 3a: Vi använder substitution

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{2-\sin^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{2t}{2-t^2}\,dt$$
$$= -\left[\ln(2-t^2)\right]_0^1 = -\ln 1+\ln 2 = \ln 2$$

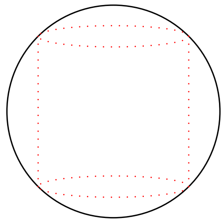
Lösning till problem 3b: Här börjar vi med partiell integration

$$\int 4x^3\arctan x\,dx = x^4\arctan x - \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$

utför en division och integrera vidare

$$= x^4\arctan x - \int \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x^4\arctan x - \frac{x^3}{3}+x-\arctan x + C$$

Lösning till problem 4: Vi kan använda metoden med cylindriska skal. Detta ger den sökta volymen som integralen



$$\begin{aligned} V &= \int_a^R 2\pi x h(x)\,dx \quad \text{där } h(x) = 2\sqrt{R^2-x^2} \\ &= 4\pi \int_a^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\pi\Big[-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\Big]_a^R = \frac{4\pi}{3}(R^2-a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

Lösning till problem 5a: Vi har en första ordningens linjär differentialekvation och skriver den på normal form

$$y' - \frac{2}{x}y = x$$

Vi finner den integrerande faktorn $\exp(\int -\frac{2}{x}\,dx) = \exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2}$. Detta ger ekvationen

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = C + \ln|x| \Rightarrow y = Cx^2 + x^2\ln|x|.$$

Villkoret $y(1) = 0$ ger ny att $C = 0$.

Lösning till problem 5b: Här har vi en inhomogen andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Vi löser först den homogena ekvationen via dess karakteristiska ekvation

$$m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow y_H = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

En ansats för partikulärlösning är av formen Ae^x, men denna finns redan i lösningen till den homogena ekvation. Vi modifierar därför ansatsen till

$$y_P = Ae^x x \quad \text{vilket ger} \quad y_P' = Ae^x(x+1) \quad \text{och} \quad y_P'' = Ae^x(x+2)$$

Insättning i differentialekvationen ger nu

$$Ae^x(x+2) + Ae^x(x+1) - 2Ae^x x = 3e^x \Rightarrow 3Ae^x = 3e^x \Rightarrow A = 1$$

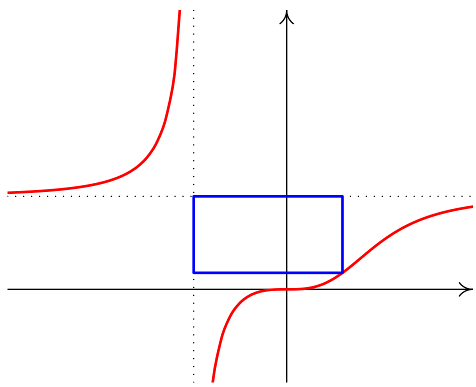
vilket ger den fullständiga lösningen

$$y = y_H + y_P = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x.$$

Lösning till problem 6: Vi kan skriva om funktionen på formen $y = 1 - \dfrac{1}{1+x^3} = 1 - \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$ och ser definitionsmängd $x \neq -1$ och lodrät asymptot $x = -1$ samt vågrät asymptot $y = 1$. Derivatan blir

$$y' = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

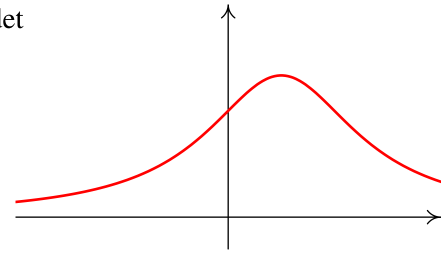
med enda nollställe $x = 0$ samt positiv för övrigt. (Grafen är röd i figuren)



Vi konstruerar nu en rektangel (blå i figuren) med två sidor längs asymptoterna och ett hörn i en punkt på grafen $(p, p^3/(1+p^3))$. Arean av denna rektangel blir

$$A = A(p) = \Big|(p-(-1))\cdot(1-\frac{p^3}{1+p^3})\Big| = \Big|(p+1)\cdot\frac{1}{1+p^3}\Big| = \frac{1}{p^2-p+1} = \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Vi konstruerar enkelt grafen i vidstående figur. Notera att gränsvärdet $\lim_{p \to -1} A(p)$ existerar och blir $1/3$.

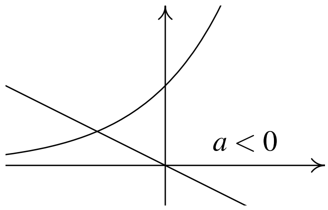


Lösning till problem 7: Serien är en positiv serie och vi ser enkelt uppskattningen (via arctan begränsad uppåt av $\pi/2$ och sedan via MacLaurin-utveckling)

$$(\arctan k) \cdot \arctan \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \arctan \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

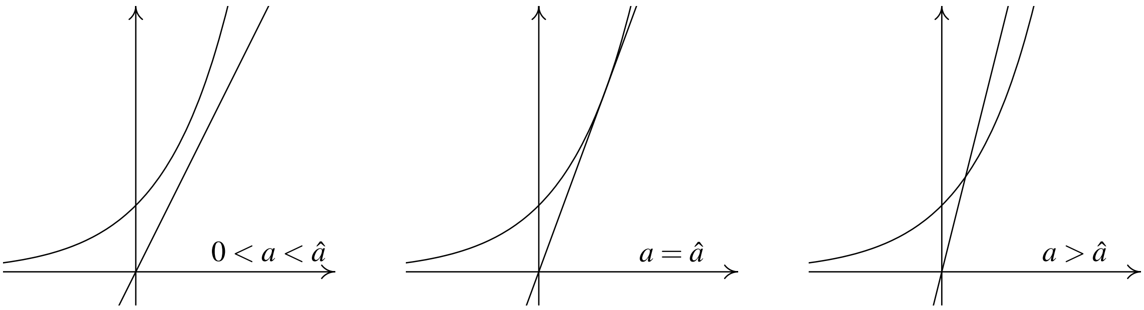
Eftersom standardserien $\sum 1/k^2$ är konvergent så blir även vår serie konvergent.

Lösning till problem 8: Problemet kan lösas enkelt genom att studera graferna till $y = e^x$ och $y = ax$. Vi ser först att om $a < 0$ så skär alltid graferna varandra, dvs olikheten kan ej gälla för alla x.



I fallet $a =$ är olikheten trivialt uppfylld, eftersom exponentialfunktionen alltid är > 0.

När a växer lutar linjen $y = ax$ alltmer. Vi kommer till slut till ett läge, $a = \hat{a}$, där den tangerar kurvan $y = e^x$, för att sedan, för större a skära den igen. Den givna olikheten är då giltig för alla x, precis för de värden där $0 \leq a < \hat{a}$.



För att bestämma $\hat{a}$, antar vi att tangeringspunkten har x-koordinaten p. I tangeringspunkten överenstämmer funktionsvärde och derivata till de båda funktionerna e^x och $\hat{a}x$. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^p = \hat{a}p \\ e^p = \hat{a} \end{cases} \implies \begin{cases} p = 1 \\ \hat{a} = e \end{cases}$$

Olikheten är således giltig för alla x om $0 \leq a < e$.