UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Fristående kurs
Analys MN1 distans
2006–02–11

Skrivtid: 10-15. Hjälpmedel: Gymnasieformelsamling. Lösningarna skall *åtföljas av förklarande text och figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. Vill du räkna din poäng från delprovet ska du ej lämna in lösning på problem 1 och 2. Väljer du att redovisa lösning på något av dessa problem, räknas istället poängen från slutprovet* för både problem 1 och 2. *För godkänt krävs minst 18 poäng, för väl godkänt minst 28 poäng, inklusive din poäng från delprovet.*

1. Beräkna gränsvärdena

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln(1/x^2)-1}{x\ln x} \qquad\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-x}{x\ln(1+x)}$$

2. AB är en diameter i en cirkel med radie R. Från en punkt P på cirkeln dras en normal till tangenten i B. Normalens fotpunkt kallas C. Beräkna maximum av längden $|AP|+|PC|$ då P genomlöper cirkeln.

3. Beräkna integralerna

$$\text{a)}\quad \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_0^1 x(\ln x)^2\,dx$$

4. Två cirklar i rummet skär varandra under rät vinkel längs en gemensam diameter av längd D. En kvadrat rör sig längs den gemensamma diametern så att dess diagonaler är kordor i de två cirklarna. Bestäm volymen av den kropp som genereras av kvadraten.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''-6y'+9y=9x$ som tangerar x-axeln i origo. Är origo en lokal extrempunkt?

6. Skissera grafen till $y=\dfrac{x^3-x^2-4}{x^2}$ i dess huvuddrag, med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av x-axeln, kurvan, den sneda asymptoten samt en linje $x=a$ där $a>2$. Undersök om denna area har ett gränsvärde då $a\to\infty$ och bestäm i så fall gränsvärdet.

7. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[3]{k}\Big(1-\cos\frac{1}{k}\Big)$ är konvergent.

8. Derivatan av funktionen $f(x)$ existerar och är växande för $x\geq 0$. Vidare är $f(0)=0$. Visa att funktionen $g(x)=f(x)/x$ är växande för $x>0$. (Ledning: Medelvärdessatsen kan kanske användas.)

(V.g.v.)

Några MacLaurin-utvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + O(x^{2n+2})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^n}{n} x^n + O(x^{n+1})$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + O(x^{n+1)})$$

Några trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

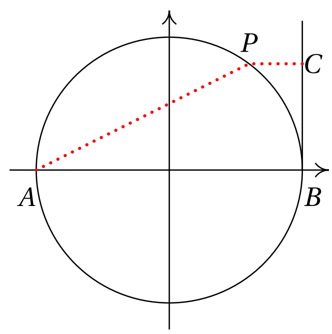
Lösning till problem 1: I a) skriver vi

$$\frac{x\ln(1/x^2)-1}{x\ln x}=\frac{-2x\ln x-1}{x\ln x}=-2-\frac{1}{x\ln x}\to -2$$

då $x\to\infty$.
I b) använder vi MacLaurin-utvecklingar

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x+O(x^3)}=1+x+O(x^3)+\frac{1}{2}\big(x+O(x^3)\big)^2+O(x^3)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3) \qquad \text{och}\\ x\ln(1+x) &= x(x+O(x^2))=x^2+O(x^3) \qquad \text{vilket ger}\\ \frac{e^{\sin x}-1-x}{x\ln(1+x)} &= \frac{x^2/2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)}=\frac{1/2+O(x)}{1+O(x)}\to\frac{1}{2} \qquad \text{då } x\to 0. \end{aligned}$$

Lösning till problem 2: Vi lägger in ett koordinatsystem enligt figur och får punkterna $A=(-R,0)$, $B=(R,0)$, $P=(x,y)$ (där $x^2+y^2=R^2$) samt $C=(R,y)$. Detta ger för den sökta längden



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x+R)^2+y^2}+|R-x| = \sqrt{x^2+y^2+R^2+2Rx}+|R-x|\\ &= \sqrt{2R^2+2Rx}+|R-x|. \end{aligned}$$

Definitionsmängden till denna funktion är $-R\le x\le R$ och vi ser att

$$d(x)=\sqrt{2R^2+2Rx}+R-x.$$

Här blir $d(-R)=d(R)=2R$. Kritiska punkter fås ur

$$d'(x)=\frac{R}{\sqrt{2R^2+2Rx}}-1=0\Rightarrow\sqrt{2R^2+2Rx}=R\Rightarrow x=-R/2$$

och $d(-R/2)=\sqrt{R^2}+R+R/2=5R/2$ vilket är det sökta maximivärdet.

Lösning till problem 3: I a) kan vi dividera och dela upp integranden. Detta ger

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=1+\frac{2x}{(x-1)^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

Detta ger att

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx=x+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

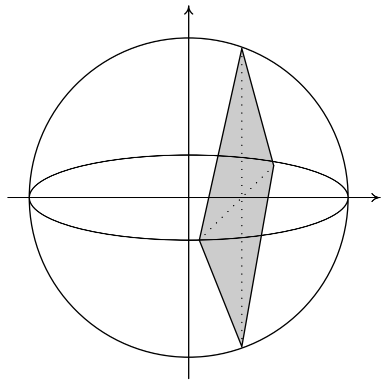
En något enklare räkning får man kanske genom ett variabelbyte $t=x-1$ vilket ger integralen

$$\int\frac{(t+1)^2+1}{t^2}\,dt=\int\frac{t^2+2t+2}{t^2}\,dt=\int\Big(1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}\Big)\,dt$$

I b) använder vi partiell integration två gånger. Obsevera att det är en generaliserad integral eftersom $\ln x$ är odefinierad för $x=0$, men vi har att $x\ln x\to 0$ då $x\to 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\big(\ln x\big)^2\,dx &= \underbrace{\frac{x^2}{2}\big(\ln x\big)^2\Big|_0^1}_{=0}-\int_0^1 x\ln x\,dx = -\underbrace{\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^1}_{=0}+\int_0^1\frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Lösning till problem 4: Vi inför beteckningar enligt: R är radien i cirklarna, s är sidan i kvadraten och H är halva diagonalen. Om x är avståndet från cirklarnas medelpunkt till kvadraten så är enligt Pytagoras sats



$$s^2 = H^2 + H^2$$
$$R^2 = x^2 + H^2$$

vilket ger $s^2 = 2(R^2 - x^2)$. Den area som skärs ut ur den sökta volymen av en kvadrat på avståndet x är alltså $A(x) = s^2 = 2(R^2 - x^2)$. Skivmetoden för volym ger nu den sökta volymen

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\int_0^R 2(R^2 - x^2)\,dx = 4\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{8R^3}{3} = \frac{D^3}{3}$$

där D alltså är längden av diametern i cirklarna.

Lösning till problem 5: Vi har en linjär differentialekvation av ordning 2 med konstanta koefficienter. Karakteristiska ekvationen är $m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 = 0$, dvs vi har dubbelrot $m = 3$. Lösningen till den homogena ekvationen är alltså $y_H = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.
För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_P = Ax + B$. Insättning i differentialekvationen ger

$$-6A + 9(Ax + B) = 9x \Rightarrow \begin{cases} 9A = 9 \\ -6A + 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2/3 \end{cases}$$

Detta ger den fullständiga lösningen $y = y_H + y_P = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + x + 2/3$. De givna villkoren att lösningen skall tangera x-axeln i origo ger att $y(0) = y'(0) = 0$. Dessa villkor ger

$$\begin{cases} C_1 + 2/3 = 0 \\ 3C_1 + C_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2/3 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

och lösningen blir $y = \frac{2}{3}\left(1 - e^{3x}\right) + x\left(1 + e^{3x}\right)$. För att avgöra om origo är en lokal maximipunkt kan vi MacLaurin-utveckla denna funktion

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}\left(1 - 1 - 3x - \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + O(x^4)\right) + x\left(1 + 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + O(x^3)\right) \\ &= \frac{3}{2}x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

vilket visar att origo inte är en lokal maximipunkt. Alternativt kan vi, för att visa att origo inte är en lokal extrempunkt till den lösning som har $y(0) = y'(0) = 0$ använda differentialekvationen direkt och sätta in $x = 0$. Detta ger

$$y''(0) - 6y'(0) + 9y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 0.$$

Om vi nu deriverar ekvationen och sätter in $x = 0$ så blir

$$y^{(3)}(0) - 6y''(0) + 9y'(0) = 9 \Rightarrow y^{(3)}(0) = 9$$

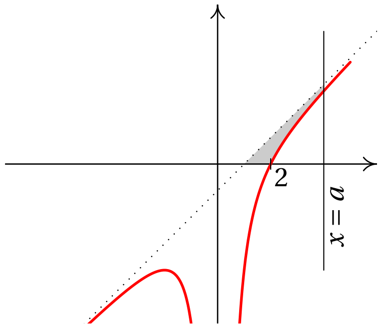
och vi ser att MacLaurin-utvecklingen av $y(x)$ börjar med termerna

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \frac{3}{2}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

vilket visar att origo inte kan vara en lokal extrempunkt.

Lösning till problem 6: Vi skriver funktionen på formen

$$y = x - 1 - \frac{4}{x^2}$$



och vi ser omedelbart att definitionsmängden är $x \neq 0$, och $x = 0$ är en lodrät asymptot med $\lim_{x\to 0} y = -\infty$, samt att $y = x - 1 - 0$ är en sned asymptot. Vidare finner man att den enda skärningspunkten med x-axeln är $x = 2$. Derivatan blir

$$y' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

med enda rot $x = -2$ vilket ger ett lokalt maximum.

Den sökta arean i första kvadranten fås som summan av en triangelarea (mellan $x = 1$ och $x = 2$) samt arean mellan kurvan och asymptoten

$$A = \frac{1}{2} + \int_2^a \left(x - 1 - \left(x - 1 - \frac{4}{x^2}\right)\right) dx = \frac{1}{2} + \int_2^a \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{4}{x}\right]_2^a$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{4}{a}$$

Vi ser omedelbart att arean går mot $5/2$ då a går mot oändligheten.

Lösning till problem 7: Det är en positiv serie och vi kan använda jämförelsekriteriet. Serieutveckling av termerna ger

$$\sqrt[3]{k}\left(1 - \cos\frac{1}{k}\right) = \sqrt[3]{k}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2k^2} + O(1/k^4)\right)\right) = \frac{1}{2k^{5/3}} + O(1/k^{11/3})$$

Vi kan jämföra med standardserien $\sum 1/k^{5/3}$ där exponenten $5/3$ är större än 1 och serien är konvergent.

Lösning till problem 8: För funktionen $g(x) = f(x)/x$ är

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

Vi behöver visa att denna derivata är ≥ 0. Medelvärdessatsen för f ger (eftersom också $f(0) = 0$)

$$f(x) = f(x) - f(0) = x f'(\xi) \qquad \text{där } 0 < \xi < x$$

Men eftersom f' är växande så är $f'(\xi) \leq f'(x)$ vilket ger att $f(x) = x f'(\xi) \leq x f'(x)$ eller ekvivalent $f'(x)x - f(x) \geq 0$. Detta visar att $g'(x) \geq 0$.