UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sohel Zibara
Tel : 4713203

Analys MN1/Våren 2002
Sluttentamen
2002 – 05 – 28
Tid : 09.00 – 14.00

Hjälpmedel : Skrivdon.
Maxpoäng : 40 poäng.
Gräns för godkänd(väl godkänd) : 18 poäng(28 poäng) .

Nedan följer 14 problem till vilka <u>fullständiga lösningar</u> behöver ges. Varje korrekt sådan ger 3 poäng.

1) $f(x) = e^x(e^x - 2)$ har ett extremt värde. Bestäm det samt avgör om det är lokalt eller globalt. Bestäm även f:s inflexionspunkt.

2) Är $f(x) = (1 - |x| + x)e^x$ deriverbar i $x = 0$?

3) Lös ekvationen : $\arctan 2x + \arctan 3x = \dfrac{\pi}{4}$.

$\left(\text{ledning:} \quad \tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\cdot\tan(b)} \right)$

4) Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \arctan\dfrac{e^{-x} + x}{x\sqrt{3} - e^{-x}}$.

5) $f(x) = x - x\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$ har en sned asymptot. Bestäm den.

6) När området som begränsas av funktionskurvan

$y = \cos x^2$, kooordinataxlarna samt linjen $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

roteras kring y – axeln uppkommer en kropp.
Beräkna kroppens volym.

7) Låt f vara en funktion som uppfyller ekvationen

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

för alla reella tal x och y .

a) Beräkna $f(0)$.

b) Visa att f är udda .

8) **Beräkna :**

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

9) **En talföljd (u_n) definieras genom sin första term $u_1 > 0$ samt genom det rekursiva sambandet**

$$u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{1+u_n}\ .$$

Visa att talföljden konvergerar samt bestäm dess gränsvärde.

10) **Avgör om den generaliserade integralen**

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\,dx$$

konvergerar eller divergerar.

11) **Är följande serier konvergenta eller divergenta**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{1/k^2}-1\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{\ln k}$

12) **Visa genom att tillämpa medelvärdessatsen på funktionen arctan x i intervallet $[a\ ,\ b]\ (0<a<b)$ den dubbla olikheten :**

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

13) **En rektangel har två av sina hörn på x – axeln och de två övriga hörnen på kurvan $y = \sqrt{4-x^2}$. Bestäm den största arean som rektangeln kan anta.**

14) **Lös differentialekvationen :**

$$y'' - 2\sqrt{2}\,y' + 2y = 2x$$

NÅGRA TRIGONOMETRISKA FORMLER

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

NÅGRA MACLAURINUTVECLINGAR

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

Förslag till lösning

1) SVAR :

f:s minsta värde är -1 och f:s inflexionspunkt är $\left(-\ln 2\ ,\ -\dfrac{3}{4}\right)$.

DETALJER :

$$f(x) = e^x\left(e^x - 2\right)$$
$$f'(x) = 2\,e^x\left(e^x - 1\right)$$
$$f''(x) = 2\,e^x\left(2\,e^x - 1\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\,e^x\left(e^x - 1\right) = 0 \quad\underset{e^x \neq 0}{\Rightarrow}\quad e^x - 1 = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad e^x = 1 \quad\Rightarrow\quad x = 0\,.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x = 0 \text{ är ett lokalt minimum.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x \to -\infty & \Rightarrow & f(x) \to 0_- \\ x \to +\infty & \Rightarrow & f(x) \to +\infty \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x = 0 \text{ globalt minimum.}$$

f:s minsta värde ges då av $f(0) = -1$.

$f''(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$. Alltså om det finns inflexionspunkter då ska de finnas bland de x där $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\,e^x - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad e^x = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad x = -\ln 2\,.$$

$f(x)$ har en tangent i $x = -\ln 2$ samt byter konkavitet där.
$x = -\ln 2$ är därför en inflexionspunkt.

2) SVAR : Nej .

DETALJER :

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{(1 - |x| + x)e^x - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{(1 - |x| + x)e^x - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 2x)e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + 2\lim_{x \to 0} e^x =$$
$$= 1 + 2 = 3 .$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ej deriverbar i $x = 0$.

3) SVAR : $x = 1/6$.

DETALJER :

$$\tan(\arctan 2x + \arctan 3x) = \tan\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\tan(\arctan 2x) + \tan(\arctan 3x)}{1 - \tan(\arctan 2x)\cdot\tan(\arctan 3x)} = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2x + 3x}{1 - 2x\cdot 3x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x}{1 - 6x^2} = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 5x = 1 - 6x^2 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 + 5x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x = -1 \text{ eller } x = 1/6 .$$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \arctan(-2) + \arctan(-3) < 0$ vilket innebär att $x = -1$ inte är en lösning.

4) **SVAR :** $y = -\frac{\pi}{4}$ & $y = \frac{\pi}{6}$.

DETALJER :

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan \frac{e^{-x} + x}{x\sqrt{3} - e^{-x}} = \arctan\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + x}{x\sqrt{3} - e^{-x}}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan \frac{e^{-x} + x}{x\sqrt{3} - e^{-x}} = \arctan\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + x}{x\sqrt{3} - e^{-x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

5) **SVAR :** $y = x - 1.$

DETALJER :

Maclaurinutveckling av $\arctan \frac{1}{x}$ av ordning 1 ger :

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$f(x) = x - x \cdot \arctan \frac{1}{x} = x - 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) - (x - 1) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (x - 1)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} O\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

$y = x - 1$ är därför en sned asymptot till $x - x \cdot \arctan \frac{1}{x}$.

6) **SVAR :** $V = \pi$.

DETALJER :

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 \, dx = \pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} d\left(\sin x^2\right) =$$

$$= \pi \left(\sin x^2\right)_0^{\sqrt{\pi/2}} = \pi \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \pi .$$

7) SVAR : $f(0) = 0$.

DETALJER :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 \qquad (*)$$

a) **Insättning av** $x = y = 0$ **i** $(*)$ **ger :**

$f(0) = 2f(0)$

Alltså $f(0) = 0$.

b) **Insättning av** $y = -x$ **i** $(*)$ **ger :**

$f(0) = f(x) + f(-x) - x^3 + x^3$

Alltså $f(-x) = -f(x)$ **och** $f(x)$ **är därför udda.**

8) SVAR : **a)** $\ln\left(\ln\left(x^2 + 1\right)\right) + C$ **b)** $-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$.

DETALJER :

a)
$$\int \frac{2x}{\left(x^2 + 1\right)\ln\left(x^2 + 1\right)}\,dx =$$
$$= \left(u = \ln\left(x^2 + 1\right) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2x}{\left(x^2 + 1\right)}\,dx \right) =$$
$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C = \ln\left(\ln\left(x^2 + 1\right)\right) + C.$$

b)
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & dv = \dfrac{1}{x^2}\,dx \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx & v = -\dfrac{1}{x} \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

9) SVAR : **Talföljden konvergerar mot 0 .**

DETALJER :

Låt P_k beteckna påståendet : $u_k > 0$.

P_1 **är sant ty** $u_1 > 0$. $(*)$

Antag att P_k är sant för $k = n$,dvs att $u_n > 0$.

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1 + u_n} > 0$ **innebär att även P_{n+1} är sant.** $(**)$

$(*)$, $(**)$ **samt induktionsprincipen säger oss då att**
$u_n > 0$ **för alla** $n \geq 1$.

Å andra sidan :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} < 1$ **medför att** $u_{n+1} < u_n$ **för** $n \in \mathbb{N}^*$.

$(u_n)_{n \geq 1}$ **är därför strängt avtagande.**

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n \geq 1} \text{ nedåt begränsad} \\ (u_n)_{n \geq 1} \text{ avtagande} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ konvergerar mot } l \geq 0.$$

Meröver :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n}{1 + \lim\limits_{n \to +\infty} u_n} \Rightarrow l = \frac{l}{1 + l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l + l^2 = l \Rightarrow l = 0 .$$

10) SVAR : **Konvergent .**

DETALJER :

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\right|dx = \int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{1+\cos x+e^x}\,dx \le \int_1^{\infty}\frac{1}{e^x}\,dx =$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\int_1^{T} e^{-x}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{e}-e^{-T}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\,dx$ **är absolutkonvergent och därmed konvergent.**

11) SVAR : **a) konvergent** **b) divergent .**

DETALJER :

a) $\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{1/k^2}-1}{1/k^2} = 1$ **. Jämförelsesatsen för serier med positiva termer (version 2) innebär då att** $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(e^{1/k^2}-1\right)$ **konvergerar därför att** $\sum_{k=1}^{+\infty}1/k^2$ **gör det.**

Alternativ :

$$e^{1/k^2}-1 \underset{\text{Maclaurinutveckling}}{=} 1+\frac{1}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)-1 = \frac{1}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{1/k^2}-1}{1/k^2} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)}{\frac{1}{k^2}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1\,.$$

b) $\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{\ln k} = +\infty \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{\ln k}$ **divergerar .**

12) DETALJER :

$$f(x) = \arctan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ kontinuerlig på } [a\,,\,b] \\ f(x) \text{ deriverbar på } (a\,,\,b) \end{array}\right\} \underset{\text{Medelvärdessatsen}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{\text{Medelvärdessatsen}}{\Rightarrow} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\S)\,, \qquad a < \S < b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} = \frac{1}{1+\S^2}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan b - \arctan a = \frac{b - a}{1+\S^2}$$

$$0 < a < \S < b \quad \Rightarrow \quad a^2 < \S^2 < b^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 + a^2 < 1 + \S^2 < 1 + b^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\S^2} < \frac{1}{1+a^2} \quad \Rightarrow$$

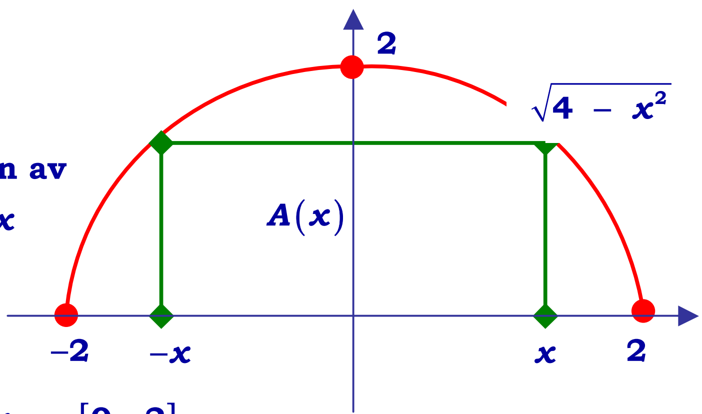
$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+\S^2} < \frac{b-a}{1+a^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}\,.$$

13) SVAR : 4 a.e .

DETALJER :

Låt $A(x)$ beteckna arean av rektangeln med bredd $2x$ och höjd $\sqrt{4 - x^2}$.



$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}\,, \qquad x \in [0\,,\,2]$

$A(x)$ är kontinuerlig i det slutna och begränsade intervallet $[0\,,\,2]$. Alltså har $A(x)$ ett största värde.Detta antas i en ändpunkt, en singulär punkt eller en kritisk punkt.

$x = 0$ & $x = 2$ är ändpunkter och $A(0) = A(2) = 0$.

$$A'(x) = 2\left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\right) = 2\frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$x = 2$ är en singulär punkt och $A(2) = 0$.

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

Rektangelns maximala area är $A\left(\sqrt{2}\right) = 4$.

14) SVAR : $(\lambda x + \mu)\, e^{x\sqrt{2}} + x + \sqrt{2}$.

DETALJER :

$$y'' - 2\sqrt{2}\, y + 2\, y = 2\, x^2 \qquad (*)$$

Den allmänna lösningen till $(*)$ ges av :

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen medan y_p är en partikulär lösning till $(*)$.

y_h

K.E. $s^2 - 2\sqrt{2}\, s + 2 = 0$

$$\left(s - \sqrt{2}\right)^2 = 0$$

$$s_1 = s_2 = \sqrt{2}$$

$$y_h = (\lambda x + \mu)\, e^{x\sqrt{2}}$$

y_p

Ansätt $y_p = a\, x + b$, a och b är konstanter

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

Insättningen av y_p , y'_p och y''_p i $(*)$ ger :

$$-2\sqrt{2}\ a + 2\ a\ x + 2\ b = 2\ x$$

dvs

$$\begin{cases} 2\ a = 2 & (1) \\ \& & \\ -2\sqrt{2}\ a + 2\ b = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \quad a = 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} \quad b = \sqrt{2}\ .$$

Den allmänna lösningen till $(*)$ ges därför av :

$$y = (\lambda\ x + \mu)\ e^{x\sqrt{2}} + x + \sqrt{2}\ .$$