UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sohel Zibara
Tel : 4713203

Analys MN1/Våren 2002
Sluttentamen
2002 – 08 – 08
Tid : 09.00 – 14.00

Hjälpmedel : Skrivdon.
Maxpoäng : 40 poäng.
Gräns för godkänd(väl godkänd) : 18 poäng(28 poäng) .

Nedan följer 14 problem till vilka fullständiga lösningar behöver ges.
Varje korrekt sådan ger 3 poäng.

1) För vilka värden på a och b antar $f(x) = a \cdot x \cdot e^{b \cdot x}$ maximivärdet $f(2) = 1$. Bestäm för dessa värden f:s inflexionspunkt.

2) Är $f(x) = x \cdot \arctan \dfrac{1}{x}$ med $f(0) = 0$ deriverbar i $x = 0$?

3) Lös ekvationen : $\arctan(2x - 1) + \arctan x = \dfrac{3\pi}{4}$.

$$\left(\text{ledning:} \quad \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \right)$$

4) Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \dfrac{1}{2x + x \ln x}$.

5) $f(x) = x^2 \cdot \arcsin \dfrac{2}{x^2} - x$ har en sned asymptot. Bestäm den.

6) När området som begränsas av funktionskurvan

$y = \cos^2 x$, kooordinataxlarna samt linjen $x = \dfrac{\pi}{2}$

roteras kring x – axeln uppkommer en kropp.
Beräkna kroppens volym.

7) Låt f vara en funktion som uppfyller ekvationen

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2 y + x y^2$$

för alla reella tal x och y .

Vidare gäller att $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Bestäm $f'(x)$.

8) **Beräkna :** $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\, dx$

9) **En talföljd** (u_n) **definieras genom sin första term**

$u_1 = 1$ samt genom det rekursiva sambandet

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}\ .$$

a) Visa att $u_n < 2$ **för alla** $n \geq 1$

b) Visa att talföljden konvergerar samt bestäm dess gränsvärde.

10) **Avgör om den generaliserade integralen**

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

konvergerar eller divergerar.

11) **Är följande serier konvergenta eller divergenta**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}$

12) **Låt f och g vara två funktioner sådana att f är avtagande och g är växande. Visa att $f \circ g$ är en avtagande funktion.**

13) **I parabeln $y = 12 - x^2$ skriver man en rektangel med en sida på x – axeln och två hörn på parabeln. Vilka mått har rektangeln med största arean.**

14) **Lös differentialekvationen :**

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$$

NÅGRA TRIGONOMETRISKA FORMLER

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

NÅGRA MACLAURINUTVECLINGAR

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

Förslag till lösning

1) SVAR :

$a = e/2$, $b = -1/2$ och f:s inflexionspunkt är $\left(4\ ,\ \frac{2}{e^3}\right)$.

DETALJER :

$f(x) = a \cdot x \cdot e^{b \cdot x}$ och $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = a(1 + bx)e^{b \cdot x}$.

$f'(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$, vilket innebär att f:s största värde antas i en kritisk punkt.

f:s största värde $= f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\,a\,e^{2b} = 1 \\ 1 + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = e/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$.

För dessa värden på a och b gäller :

$f'(x) = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$f''(x) = \frac{e}{2}\left(-1 + \frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$f''(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$, vilket innebär att eventuella inflexionspunkter finns bland de x där $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + \frac{x}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$

$f'(4)$ existerar medför att $\underline{f(x)\ \text{har en tangent i}\ x = 4.}$ $\quad (*)$

$f''(x) > 0$ för $x > 4$ och $f''(x) < 0$ för $x < 4$.
$\underline{f(x)\ \text{byter därför konkavitet i}\ x = 4.}$ $\quad (**)$

$(*)$ & $(**)$ innebär att $x = 4$ är en inflexionspunkt för $f(x)$.

2) SVAR : Nej .

DETALJER :

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x \cdot \arctan \frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0_+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{x \cdot \arctan \frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0_-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ej deriverbar i $x = 0$.

3) SVAR : $x = 2$.

DETALJER :

$$\tan\left(\arctan(2x - 1) + \arctan x\right) = \tan \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan\left(\arctan\ (2x - 1)\right) + \tan\left(\arctan x\right)}{1 - \tan\left(\arctan\ (2x - 1)\right) \cdot \tan\left(\arctan x\right)} = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x - 1 + x}{1 - x(2x - 1)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x - 1}{1 + x - 2x^2} = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x - 1 = -1 - x + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad x = 0$ eller $x = 2$.

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan(-1) + \arctan 0 = -\frac{\pi}{4}$ vilket innebär att $x = 0$ inte är en lösning.

$\frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$ innebär att $\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$ och följaktligen är $x = 2$ en lösning.

4) SVAR : $x = 0$, $x = 1/e^2$ & $y = 0$.

DETALJER :

$$f(x) = \frac{1}{2x + x\ln x} \quad \text{och} \quad D_f = \left(0, 1/e^2\right) \cup \left(1/e^2, +\infty\right)$$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{2x + x\ln x} = \frac{1}{2\lim\limits_{x \to 0_+} x + \lim\limits_{x \to 0_+} x\ln x} = +\infty.$$

$x = 0$ är en lodrät asymptot.

$$\lim_{x \to 1/e^2{}_+} \frac{1}{2x + x\ln x} = +\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 1/e^2{}_-} \frac{1}{2x + x\ln x} = -\infty.$$

$x = 1/e^2$ är en lodrät asymptot.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x + x\ln x} = 0.$$

$y = 0(x-\text{axeln})$ är en vågrät asymptot.

5) SVAR : $y = -x + 2$.

DETALJER :

Maclaurinutveckling av $\arcsin\frac{2}{x^2}$ av ordning 1 ger :

$$\arcsin\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

$$f(x) = x^2 \cdot \arcsin\frac{2}{x^2} - x = 2 + O\left(\frac{1}{x^4}\right) - x$$

$$f(x) - (-x + 2) = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (-x + 2)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} O\left(\frac{1}{x^4}\right) = 0.$$

$y = -x + 2$ är därför en sned asymptot till $x^2 \cdot \arcsin\frac{2}{x^2} - x$.

6) SVAR : $V = \dfrac{3\pi^2}{16}$.

DETALJER :

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 x\right)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(x + \sin 2x\right)_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x \, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{16} = \frac{3\pi^2}{16}.$$

7) SVAR : $f'(x) = 1 + x^2$.

DETALJER :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2 y + x y^2 \qquad (*)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$$

$$\underset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) + x^2 h + x h^2 - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0}\left(x^2 + x h\right) =$$

$$= 1 + x^2.$$

8) SVAR : $2\sqrt{3} - 2 + 2\ln\left(21 - 12\sqrt{3}\right).$

DETALJER :

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\, dx =$$

$$= \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{och} \quad dx = 2u\, du \\ x = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \quad \text{och} \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3} \end{array} \right) =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2 - 4}\, du = 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 2}\right) du =$$

$$= 2\left(u + \ln(2 - u) - \ln(u + 2)\right)_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(u + \ln\frac{2 - u}{2 + u}\right)_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{3} + \ln\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - 1 + \ln 3\right) =$$

$$= 2\sqrt{3} - 2 + 2\ln\left(21 - 12\sqrt{3}\right).$$

9) **SVAR :** Talföljden konvergerar mot $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

DETALJER :

Låt P_k beteckna påståendet : $1 \le u_k < 2$.

P_1 är sant ty $u_1 = 1$. $(*)$

Antag att P_k är sant för $k = n$,dvs att $1 \le u_n < 2$.

$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} < \sqrt{3} < 2$ och $\sqrt{1 + u_n} \ge \sqrt{2} > 1$.

Detta innebär att även P_{n+1} är sant. $(**)$

$(*)$, $(**)$ samt induktionsprincipen säger oss då att

$1 \le u_n < 2$ för alla $n \ge 1$.

Å andra sidan :

$\cdot\ u_2 > u_1$

$\cdot\ u_n > u_{n-1} \Rightarrow 1 + u_n > 1 + u_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1 + u_n} > \sqrt{1 + u_{n-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$ för $n \in \mathbb{N}^*$.

$(u_n)_{n \ge 1}$ är därför strängt växande.

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n \ge 1} \text{ uppåt begränsad} \\ (u_n)_{n \ge 1} \text{ växande} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)_{n \ge 1} \text{ konvergerar mot } 1 < l \le 2.$$

Meröver :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 + u_n} \Rightarrow l = \sqrt{1 + l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = 1 + l \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

10) SVAR : **Konvergent .**

DETALJER :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T \to +\infty} \int_1^{T} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , & dv = \cos x\,dx \\ du = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}\,dx & , & v = \sin x \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right)_1^T + \frac{1}{2} \lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx =$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{\sin T}{\sqrt{T}} - \sin 1 \right) + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx =$$

$$= -\sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Å andra sidan :

$0 < \left| \dfrac{\sin x}{x^{3/2}} \right| < \dfrac{1}{x^{3/2}}$ **och** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ **är konvergent. Alltså är** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ **absolutkonvergent och därmed konvergent.**

Detta innebär att $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ **är konvergent.**

11) SVAR : **a) konvergent** **b) divergent .**

DETALJER :

a) $$\lim_{k \to +\infty} \frac{\dfrac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{3^k}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3^{k+1}}{3^k} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3}{k+1} = 0 < 1.$$

Kvottestet för serier med positiva termer innebär då att $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$ **konvergerar.**

b) $$\lim_{k \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)}{\dfrac{1}{k^2}} = 1 \underset{\text{Divergenstestet}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)}{\dfrac{1}{k^2}}$$ **divergerar .**

12) DETALJER :

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(y)}{x - y} = \frac{f(g(x)) - f(g(y))}{x - y} =$$

$$= \frac{f(g(x)) - f(g(y))}{g(x) - g(y)} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} < 0$$

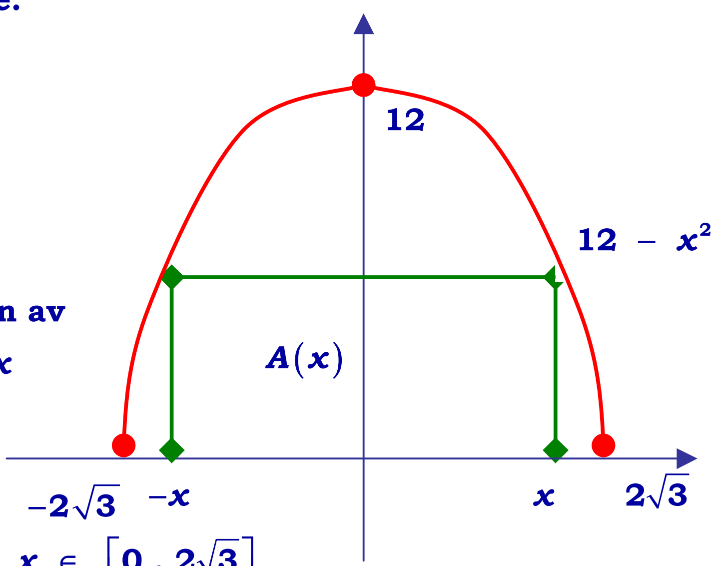
för $x, y \in D_{f \circ g}$.

$f \circ g$ är därför avtagande.

13) SVAR : 4×8.

DETALJER :

Låt $A(x)$ beteckna arean av rektangeln med bredd $2x$ och höjd $12 - x^2$.



$A(x) = 2x(12 - x^2)$, $x \in [0, 2\sqrt{3}]$

$A(x)$ är kontinuerlig i det slutna och begränsade intervallet $[0, 2\sqrt{3}]$. Alltså har $A(x)$ ett största värde.Detta antas i en ändpunkt, en singulär punkt eller en kritisk punkt.

$x = 0$ & $x = 2\sqrt{3}$ är ändpunkter och $A(0) = A(2\sqrt{3}) = 0$.

$A'(x) = 2(12 - 3x^2)$

$A'(x)$ är definierad överallt. alltså saknar $A(x)$ singulär punkter.

$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$

Rektangelns mått är 4×8.

14) SVAR : $\sin x + C\cos x$.

DETALJER :

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 1 \qquad (*)$$

STEG 1 : Dividera $(*)$ med $\cos x$.

$$y' + (\tan x)y = \frac{1}{\cos x} \qquad (**)$$

STEG 2 : Bestäm en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x) = \tan x$.

$$F(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln \frac{1}{\cos x}.$$

STEG 3 : Bestäm den integrerande faktorn $e^{F(x)}$.

$$e^{F(x)} = e^{\ln \frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}.$$

STEG 4 : Multiplicera $(**)$ med $e^{F(x)}$.

$$\frac{1}{\cos x}y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

STEG 5 : Vänsterledet STEG 4 kan alltid skrivas som $\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}y\right) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

STEG 6 : Integrera med avseende på x både led i STEG 5 .

$$\frac{1}{\cos x}y = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

Den allmänna lösningen till diff.ekv. ges därför av :

$$y = \sin x + C\cos x.$$