UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sohel Zibara
Tel : 4713203

Analys MN1/Våren 2003
Sluttentamen
2003 – 05 – 27
Tid : 09.00 – 14.00

Hjälpmedel : Skrivdon.
Maxpoäng : 40 poäng.
Gräns för godkänd(väl godkänd) : 18 poäng(28 poäng) .

Nedan följer 14 problem till vilka fullständiga lösningar behöver ges.
Varje korrekt sådan ger 3 poäng.

1) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$ **och** $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ **är två givna funktioner.**

Bestäm f**:s minsta värde och** g**:s inflexionspunkt.**

2) Beräkna $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(x - 2\sin x)\ln(1 + 3x)}{x^2}$.

3) Beräkna : $\arctan \dfrac{7\sqrt{3}}{3} + \arctan 2\sqrt{3}$.

$\left(\text{ledning:} \quad \tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\cdot\tan(b)}\right)$

4) Bestäm alla asymptoter till $f(x) = x + 2\ln\dfrac{x + 1}{x} - 1$.

5) låt $f(x) = \arctan\dfrac{x + a}{1 - a\,x}$ **där** a **är en konstant.**

a) Bestäm $f'(x)$.

b) Förenkla $f(x)$.

6) När området som begränsas av funktionskurvan
$y = \arctan x$ **,** x **– axeln samt linjen** $x = 1$
roteras kring y **– axeln uppkommer en kropp.**
Beräkna kroppens volym.

7) Låt f **vara en funktion definierad i en punkt** $x = a$
och dess omgivning samt deriverbar i samma punkt.

Beräkna $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x\,f(a) - a\,f(x)}{x - a}$.

OBS! L´Hôpitalregeln får ej användas

8) **Beräkna :**

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x}\,dx.$

9) **En talföljd** (u_n) **definieras genom sin första term** $u_0 = \dfrac{3}{2}$ **,**

samt genom det rekursiva sambandet $u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n}$ **.**

Vidare gäller att $1 < u_n < 2$ **för** $n \in \mathbb{N}$**.**

Visa att talföljden konvergerar samt bestäm dess gränsvärde.

10) **Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar :**

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\,e^x}{\sin x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3 + 1}\,dx$

11) **Undersök om följande serier konvergerar eller divergerar :**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tan\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

12) **Visa att** $g(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)dx$, $|a| > 1$ **,**

är en jämn funktion.

13) **Tangenten till kurvan** $y = e^x$ **i punkten** $x = a$ **, där** $a < 1$ **,**
skär negativa x **– axeln i en punkt** A **och positiva** y **– axeln**
i en punkt B**. Bestäm** a **så att arean av triangeln** ABO **, där**
O **är origo blir så stor som möjligt.**

14) **Lös differentialekvationen :**

$$y' = \frac{yx^2 + xy^2}{x^3}$$

NÅGRA TRIGONOMETRISKA FORMLER

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$
$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

NÅGRA MACLAURINUTVECLINGAR

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

FACIT :

1) f:s minsta värde är $-\frac{1}{2}$ och g:s inflexionspunkt är $\left(e^2\ ,\ \frac{e^2}{2}\right)$.

2) $-\ 3$.

3) $\frac{5\pi}{6}$.

4) $-1\ ,\ 0$ och $x\ -\ 1$.

5) a) $\frac{1}{1\ +\ x^2}$ b) $\arctan x\ +\ \arctan a$.

6) $\pi\left(\frac{\pi}{2}\ -\ 1\right)$ v.e.

7) $f(a)\ -\ a\,f'(a)$.

8) a) $\tan x\ -\ \frac{3x}{2}\ +\ \frac{\sin 2x}{4}\ +\ C$ b) $2\left(\sqrt{2}\ -\ 1\right)$.

9) Talföljden konvergerar mot 1.

10) a) konvergent b) konvergent.

11) a) divergent b) konvergent.

13) $a\ =\ -1$.

14) $y\ =\ \frac{x}{C\ -\ \ln x}$.

Förslag till lösning

1) SVAR :

f:s minsta värde är $-\frac{1}{2}$ och g:s inflexionspunkt är $\left(e^2 \, , \, \frac{e^2}{2}\right)$.

DETALJER :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x \quad \text{och} \quad D_f = (0 \, , \, +\infty).$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\ln x - 1).$$

$f'(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$. Alltså om det finns extrempunkter då ska de finnas bland de kritiska punkter.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e.$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Det framgår av teckenstudium ovan att $x = e$ är ett globalt minimipunkt och att f:s minsta värde är $f(e) = -\frac{1}{2}$.

$$g(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \text{och} \quad D_g = (0 \, , \, 1) \cup (1 \, , \, +\infty).$$

$$g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

$$g''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}.$$

$f''(x)$ är definierad för alla $x \in D_f$. Alltså om det finns inflexionspunkter då ska de finnas bland de x där $f''(x) = 0$.

$$g''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^2.$$

$g'(e^2) = \frac{1}{4}.$

Alltså har $g(x)$ en tangent i $x = e^2$. $\quad (*)$

Vidare gäller det i en omgivning av $x = e^2$ att $g''(x) > 0$ för $x < e^2$ och $g''(x) < 0$ för $x > e^2$.

Alltså byter $g(x)$ konkavitet i $x = e^2$ $\quad (**)$

$(*)$ & $(**)$ innebär att $x = e^2$ är en inflexionspunkt för $g(x)$.

2) SVAR : $\quad -3.$

DETALJER :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - 2\sin x)\ln(1 + 3x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - 2\left(x + O(x^3)\right)\right)\cdot\left(3x + O(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(-x + O(x^3)\right)\cdot\left(3x + O(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-3x^2 + O(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(-3 + O(x)\right) =$$

$$= -3 + \lim_{x \to 0} O(x) = -3.$$

3) SVAR : $\quad \frac{5\pi}{6}.$

DETALJER :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < \arctan \frac{7\sqrt{3}}{3} < \frac{\pi}{2} \\ \text{och} \\ \frac{\pi}{4} < \arctan 2\sqrt{3} < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arctan \frac{7\sqrt{3}}{3} + \arctan 2\sqrt{3} < \pi$$

Å andra sidan :

$$\tan\left(\arctan\frac{7\sqrt{3}}{3} + \arctan 2\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\frac{7\sqrt{3}}{3}\right) + \tan\left(\arctan 2\sqrt{3}\right)}{1 - \tan\left(\arctan\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\tan\left(\arctan 2\sqrt{3}\right)} = \quad\Rightarrow$$

$$= \frac{\frac{7\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}}{1 - \frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{3}}{-13} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\arctan\frac{7\sqrt{3}}{3} + \arctan 2\sqrt{3}$ är det tal mellan $\frac{\pi}{2}$ och π

vars tangens är $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Alltså :

$$\arctan\frac{7\sqrt{3}}{3} + \arctan 2\sqrt{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

4) SVAR : -1 , 0 och $x - 1$.

DETALJER :

$$f(x) = x + 2\ln\frac{x+1}{x} - 1 \quad \text{och} \quad D_f = (-\infty\,,\,-1)\cup(0\,,\,+\infty).$$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+}\left(x + 2\ln\frac{x+1}{x} - 1\right) = +\infty.$$

$x = 0$ är därför en lodrät asymptot.

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to -1_-}\left(x + 2\ln\frac{x+1}{x} - 1\right) = -\infty.$$

$x = -1$ är därför en lodrät asymptot.

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(f(x) - (x - 1)\right) = \lim_{x\to \pm\infty} 2\ln\frac{x+1}{x} = 0.$$

$y = x - 1$ är därför en sned asymptot.

5) SVAR : a) $\dfrac{1}{1 + x^2}$ b) $\arctan x + \arctan a$.

DETALJER :

$$f(x) = \arctan \frac{x + a}{1 - a x}$$

a) $$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x + a}{1 - a x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x + a}{1 - a x} \right)^2} =$$

$$= \frac{1 + a^2}{(1 - a x)^2} \cdot \frac{(1 - a x)^2}{(1 + a^2)(1 + x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ innebär att :

$$\arctan \frac{x + a}{1 - a x} = \arctan x + C \text{ för alla } x \in D_f.$$

C bestäms genom att exempelvis sätta in $x = 0$. Man får :
$C = \arctan a$.

Slutligen gäller att :

$$\arctan \frac{x + a}{1 - a x} = \arctan x + \arctan a.$$

6) SVAR : $V = \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ v.e.

DETALJER :

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx = \\
&= 2\pi \left(\left(\frac{x^2}{2} \arctan x \right)_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx \right) = \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \right) = \\
&= \pi \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \right) = \\
&= \pi \left(\frac{\pi}{4} - \left(x - \arctan x \right)_0^1 \right) = \\
&= \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

7) SVAR : $f(a) - a\, f'(a).$

DETALJER :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{x\, f(a) - a\, f(x)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)\, f(a) - a\big(f(x) - f(a)\big)}{x - a} = \\
&= f(a) - a \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\
&= f(a) - a\, f'(a).
\end{aligned}
$$

8) SVAR : a) $\tan x - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$ b) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

DETALJER :

a) $$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)^2}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 2\int dx + \int \cos^2 x\,dx =$$
$$= \tan x - 2x + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx =$$
$$= \tan x - 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C =$$
$$= \tan x - \frac{3x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

b) $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x}\,dx = \int_0^{\ln 2} e^{x/2}\,dx = 2\left(e^{x/2}\right)_0^{\ln 2} = 2\left(e^{\ln 2/2} - 1\right) =$$
$$= 2\left(\sqrt{e^{\ln 2}} - 1\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

9) SVAR : **Talföljden konvergerar mot 1 .**

DETALJER :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3 - u_n} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3 - u_n} =$$
$$= \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3 - u_n} < 0\,, \text{ ty } 1 < u_n < 2.$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **är därför strängt avtagande.**

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nedåt begränsad} \\ (u_n)_{n \geq 1} \text{ avtagande} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (u_n)_{n \geq 1} \text{ konvergerar mot } l \geq 1.$$

Meröver :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \frac{2}{3 - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n} \Rightarrow \quad l = \frac{2}{3 - l} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad l^2 - 3l + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = 1\,.$$

10) SVAR : a) konvergent b) konvergent.

DETALJER :

a) $$\frac{\sqrt{x}\ e^x}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}\cdot 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\ e^x}{\sin x}\,dx \text{ konvergerar ty } \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ konvergerar.}$$

b) $$0 \le \left|\frac{\sin 2x}{x^3+1}\right| = \frac{|\sin 2x|}{x^3+1} \le \frac{1}{x^3}.$$

Enligt jämförelsesatsen för generaliserade integraler absolutkonvergerar $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3+1}\,dx$ och därmed konvergerar den.

11) SVAR : a) divergent b) konvergent .

DETALJER :

a) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1 \ne 0.$$ Serien divergerar då enligt divergenstestet.

b) $$u_k = \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{k+1}{(k+2)!}}{\frac{k}{(k+1)!}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k}\,\frac{(k+1)!}{(k+2)!} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k(k+2)} = 0 < 1.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{(k+1)!}$$ konvergerar enligt D´Alembert testet (Kvottestet).

12) DETALJER :

$$g(-a) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 + 2\,a\cos x + a^2\right) dx =$$

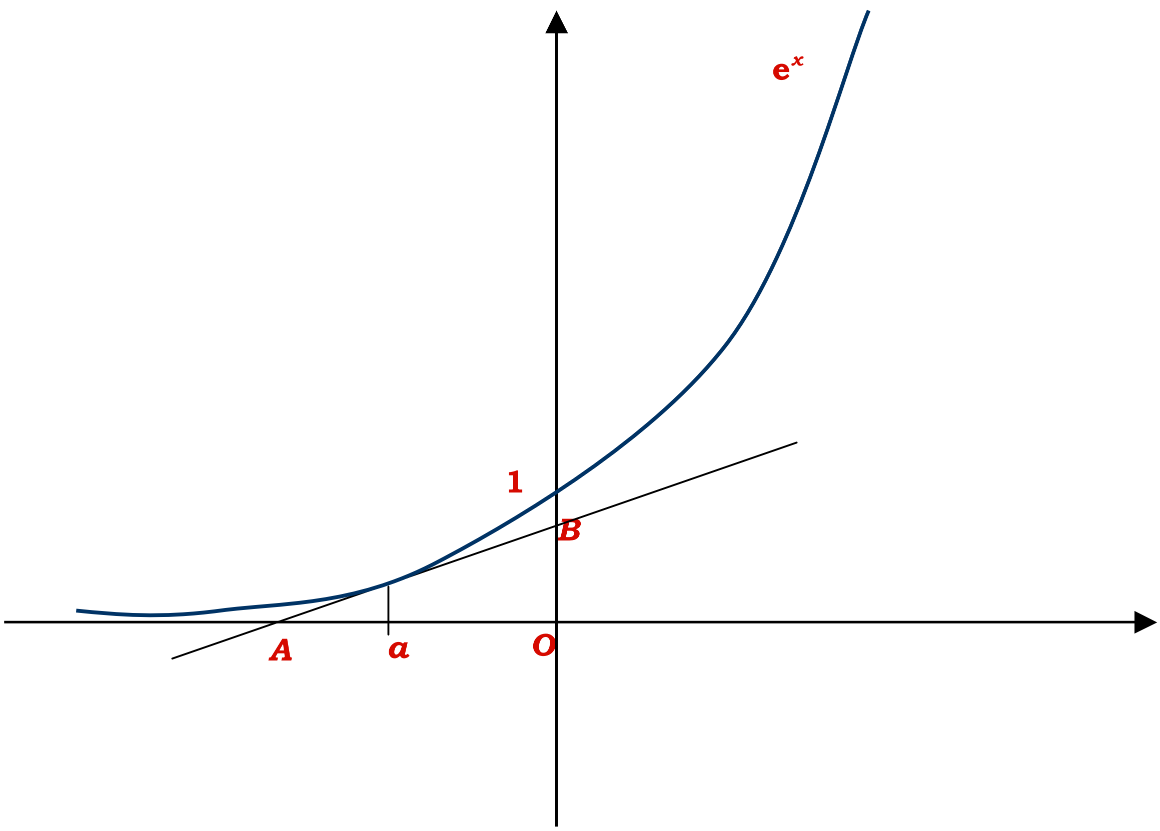
$$= \left(\begin{array}{l} t = \pi - x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \cos(\pi - t) = -\cos t \\ dx = -dt \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pi \quad \text{och} \quad x = \pi \quad \Rightarrow \quad t = 0 \end{array} \right) =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \ln\left(1 - 2\,a\cos t + a^2\right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2\,a\cos t + a^2\right) dt = g(a).$$

$g(-a) = g(a)$ för $|a| > 1$ innebär att $g(a)$ är en jämn funktion.

13) SVAR : $a = -1$.



DETALJER :

Tangentens ekvation i punkten
$(a\ ,\ e^a)$ **ges av :**

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

dvs

$$y - e^a = e^a(x - a)$$

dvs

$$y = e^a x + (1 - a)e^a$$

Skärningspunkten av tangenten med $x -$ **axeln är** $(b\ ,\ 0)$ **där :**

$0 = e^a b + (1 - a)e^a$ **och** $b = a - 1.$

Skärningspunkten av tangenten med $y -$ **axeln är** $(0\ ,\ h)$ **där :**

$h = (1 - a)e^a.$

Låt $A(a)$ **beteckna arean av** $\overset{\Delta}{AOB}$ **med bas** b **och höjd** h **.**

$$A(a) = \frac{1}{2}(-b)\cdot h = \frac{1}{2}(1 - a)(1 - a)e^a = \frac{1}{2}(1 - a)^2 e^a.$$

$a \in (-\infty\ ,\ 1)$.

$$\lim_{a \to -\infty} A(a) = 0\ .$$

$A'(a) = \dfrac{a - 1}{2}(a + 1)e^a$ **och** $A''(a) = \dfrac{1}{2}(a^2 + 2a - 1)e^a.$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ **och** $A''(-1) = -e^a < 0.$

14) SVAR : $y = \dfrac{x}{C - \ln|x|}$.

Detaljer :

$y' = \dfrac{yx^2 + xy^2}{x^3}$ **är en homogen differentialekvation av ordning 1.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \left(v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\,v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v + v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{v} = \ln|x| + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{-\ln|x| - A} \Rightarrow y = \frac{x}{C - \ln|x|}, \quad C = -A.$$