UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Distans, Matematik A
Analys
2004–02–14

Skrivtid: 10-15. Hjälpmedel: Gymnasieformelsamling. Lösningarna skall *åtföljas av förklarande text och figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. Vill du räkna din poäng från delprovet ska du ej lämna in lösning på problem 1 och 2. Väljer du att redovisa lösning på något av dessa problem, räknas istället poängen från slutprovet* för både problem 1 och 2. *För godkänt krävs minst 18 poäng, för väl godkänt minst 28 poäng (inklusive din poäng från delprovet, om du väljer att räkna den).*

1. Beräkna gränsvärdena

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2-x^3}{2x^3+3x^2-4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{\sin 3x}$

2. a) Rita grafen till $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x}}$ med angivande av definitionsmängd, asymptoter och lokala extrempunkter.

b) Visa (t ex med hjälp av grafen i a) att ekvationen

$$e^x = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}}$$

har exakt två reella rötter.

3. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^2}\,dx$

4. Beräkna volymen av den kropp som fås då området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = (1-x^2)^{2/3}$, $0 \le x \le 1$, roterar ett varv runt y-axeln.

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationerna

a) $y' + e^x y = e^x$, b) $y'' - 4y' + 5y = \sin x + e^{2x}$.

(V.g.v)

6. Ett trästycke har formen av en rät cirkulär kon med höjden tre gånger så stor som basradien R. Av denna kon vill man tillverka en rät cirkulär cylinder med så stor begränsningsyta som möjligt. Bestäm cylinderns basradie och höjd.

7. Undersök för vilka reella tal $a \geq 0$ serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sin \frac{1}{k}\right)^a$$

är konvergent, resp. absolut konvergent.

8. a) Rita kurvan $y = \dfrac{2 - x^3}{x}$ med angivande av definitionsmängd och eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

b) Genom en punkt P på kurvan kan man, förutom tangenten i P, dra ytterligare linjer som tangerar kurvan (i andra punkter än P). Bestäm hur antalet tangenter varierar då P genomlöper kurvan. Visa speciellt att antalet tangenter är två för endast ett läge av P.

Några MacLaurin-utvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + O(x^{n+1)})$$

Lösning till problem 1a: Både täljare och nämnare är av storleksordning x^3 för stora x vilket ger

$$\frac{2-x^3}{2x^3+3x^2-4} = \frac{2/x^3-1}{2+3/x-4/x^3} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

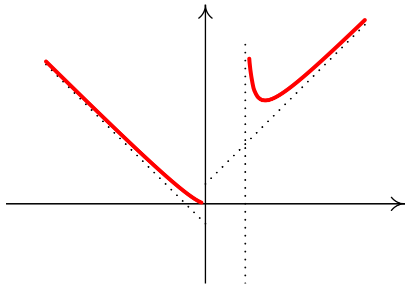
Lösning till problem 1b: Om vi MacLaurin-utvecklar de ingående funktionerna så får vi

$$\frac{e^{2x}-\cos x}{\sin 3x} = \frac{1+2x+O(x^2)-(1+O(x^2))}{3x+O(x^3)} = \frac{2x+O(x^2)}{3x+O(x^3)} = \frac{2+O(x)}{3+O(x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} = \frac{2}{3}.$$

Lösning till problem 2: Definitionsmängden bestäms av $x^2 - x > 0$ vilket ger att $x < 0$ och $x > 1$. Vi får en lodrät asymptot i $x = 1$ men inte i $x = 0$, eftersom

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}} = 0 \qquad \text{men} \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty$$

Vi noterar också att $y > 0$ för alla x i definitionsmängden. Sned asymptot bestäms enklast via serieutveckling. Vi skriver



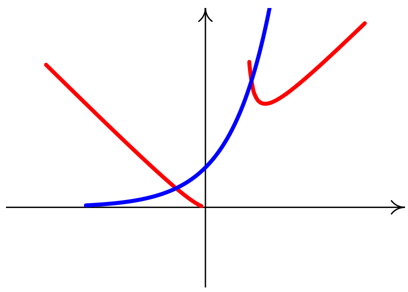
Graf till funktionen

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}} &= \frac{x^2}{|x|\sqrt{1-1/x}} = |x|\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \\
&= |x|\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(-1)}{x} + \frac{\frac{(-1)}{2}\frac{(-3)}{2}}{2!}\frac{1}{x^2} + O(1/x^3)\right) \\
&= |x| + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) + \frac{3}{8|x|} + O(1/x^2)
\end{aligned}$$

Från detta ser vi att $y = x + 1/2$ är asymptot då $x \to \infty$ och $y = -x - 1/2$ då $x \to -\infty$.

Derivering ger

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2x\sqrt{x^2-x} - x^2\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x} \\
&= \frac{4x(x^2-x) - x^2(2x-1)}{2(x^2-x)^{3/2}} \\
&= \frac{2x^2(x-3/2)}{2(x^2-x)^{3/2}}
\end{aligned}$$



Graf till funktion och exp-funktion

Detta ger följande teckenstudium för funktionen

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		∞
y'		$-$	$-0/$	odef	$/-\infty$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	odef	$/+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	

Detta ger grafen i den första figuren. Om vi också ritar $y = e^x$ i samma diagram så får vi den andra figuren. Man ser lätt att det endast finns två skärningspunkter.

Lösning till problem 3a: Via substitution och partialbråksuppdelning får vi

$$\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(t-2)(t+2)}$$
$$= \int \Big[\frac{1/4}{t-2} - \frac{1/4}{t+2}\Big]\,dt = \frac{1}{4}\big(\ln|t-2| - \ln|t+2|\big)$$
$$= \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_{t=\cos x} = \frac{1}{4}\ln\Big(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\Big) \qquad (+ \text{ en konstant})$$

Lösning till problem 3b: Här får vi använda substitution, partiell integration och partialbråk i nu nämnd ordning.

$$\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = t^2 & x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ dx = 2t\,dt & \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)\cdot 2t\,dt}{t^4} = \int_1^2 \frac{2\ln(1+t)}{t^3}\,dt$$
$$= \Big[\frac{-\ln(1+t)}{t^2}\Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2(1+t)}\,dt = -\frac{1}{4}\ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \Big(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t}\Big)\,dt$$
$$= -\frac{1}{4}\ln 3 + \ln 2 + \Big[-\ln t - \frac{1}{t} + \ln(1+t)\Big]_1^2 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{3}{4}\ln 3.$$

Lösning till problem 4: Volymen beräknas enklast med "skal"-metoden. Vid rotation kring y-axeln blir volymen

$$V = 2\pi\int_0^1 x(1-x^2)^{2/3}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \pi\int_0^1 (1-t)^{2/3}\,dt = \Big[-\frac{3\pi}{5}(1-t)^{5/3}\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{5}.$$

Lösning till problem 5a: Ekvationen är linjär med integrerande faktor e^{e^x}. Multiplikation med den integrerande faktorn ger

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{e^x}y\Big) = e^x \cdot e^{e^x}$$

Integration av detta ger (högra ledet kan integreras med hjälp av substitutionen $t = e^x$)

$$e^{e^x}y = e^{e^x} + C \Rightarrow y = 1 + Ce^{-e^x}.$$

Lösning till problem 5b: Detta är en linjär differentialekvation av ordning 2 med konstanta koefficienter. Karakteristiska ekvationen $m^2 - 4m + 5 = 0$ har rötterna $m = 2 \pm i$. Lösningen till den homogena ekvationen är således $y_H = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$.

Vi bestämmer partikulärlösning i två steg. Först betraktar vi termen $\sin x$ i högerledet. Vi ansätter en partikulärlösning av formen $C\cos x + D\sin x$. (Denna behöver ej modifieras med någon faktor x eftersom den homogena ekvationen inte har lösningar av typ $\sin x$ eller $\cos x$.) Insättning i ekvationen $y'' - 4y' + 5y = \sin x$ ger nu

$$-C\sin x - D\cos x - 4(-C\cos x + D\sin x) + 5(C\cos x + D\sin x) = \sin x \Rightarrow$$
$$(4C - 4D)\cos x + (4C + 4D)\sin x = \sin x$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4c - 4D &= 0 \\ 4C + 4D &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C &= 1/8 \\ D &= 1/8 \end{cases}$$

Den första delen av partikulärlösningen blir således $\frac{1}{8}(\cos x + \sin x)$.

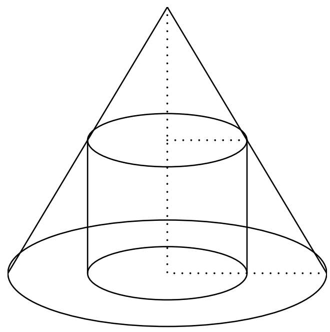
För att få den andra delen gör vi sammaledes med termen e^{2x} i högerledet. Ansätt en partikulärlösning av formen Ee^{2x} (Behöver ej modifieras med någon faktor x eftersom den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$ inte har någon lösning av formen e^{2x}.) Insättning i ekvationen $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ ger

$$4Ee^{2x} - 4 \cdot 2Ee^{2x} + 5Ee^{2x} = e^{2x} \Rightarrow Ee^{2x} = e^{2x} \Rightarrow E = 1.$$

Den sökta lösningen den givna ekvationen fås nu som y_H plus de två partikulärlösningarna dvs

$$y = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x + \frac{1}{8}(\cos x + \sin x) + e^{2x}.$$

Lösning till problem 6: Antag att basradien i konen är R och höjden således $3R$. Om vi sätter basradien i den inskrivna cylindern till x och höjden till h så blir på grund av likformiga trianglar



$$\frac{x}{3R - h} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 3(R - x).$$

Totala begränsningsytan på cylindern ges av

$$\begin{aligned} A &= 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 3(R - x) \\ &= 2\pi(3Rx - 2x^2), \qquad \text{där } 0 \le x \le R. \end{aligned}$$

Vi söker dimensionerna för cylindern med den största begränsningsytan. För ändpunkterna till definitionsmängden finner vi $A(0) = 0$ resp $A(R) = 2\pi R^2$. Derivatan blir

$$A'(x) = 2\pi(3R - 4x) = 0 \qquad \text{för} \qquad x = \frac{3R}{4}.$$

Här blir $h = 3(R - 3R/4) = 3R/4$ samt $A(3R/4) = 2\pi \cdot 9R^2/8$. Detta är uppenbarligen det största värdet och dimensionerna är alltså $r = h = 3R/4$.

Lösning till problem 7: Termerna i serien är $b_k = (-1)^k\big(\sin\frac{1}{k}\big)^a$. Om $a = 0$ blir termerna $b_k = (-1)^k$ vilket ger en divergent serie. För $a > 0$ är $\big(\sin\frac{1}{k}\big)^a$ monotont avtagande mot 0 då $k \to \infty$ och Leibniz kriterium visar att serien är betingat konvergent. För $a > 1$ gäller också att

$$|b_k| = \big(\sin\frac{1}{k}\big)^a = \big(\frac{1}{k} + O(1/k^3)\big)^a = \frac{1}{k^a}\big(1 + O(1/k^2)\big)^a \sim \frac{1}{k^a}$$

då $k \to \infty$. Eftersom $\sum 1/k^a$ är konvergent då $a > 1$ så blir den givna serien till och med absolut konvergent för $a > 1$.

Lösning till problem 8: Om vi skriver funktionen på formen

$$y = f(x) = \frac{2 - x^3}{x} = \frac{2}{x} - x^2$$

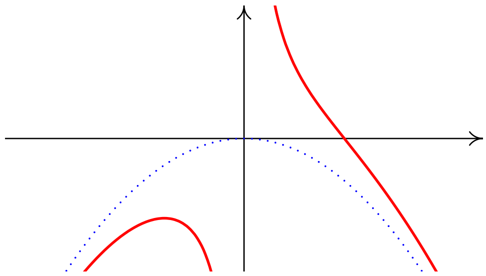
så ser vi att definitionsmängden är $x \neq 0$. Vi har en lodrät asymptot i $x = 0$ och en ”asymptotisk kurva” $y = -x^2$ då $x \to \pm\infty$. Derivatan beräknas till

$$y' = -\frac{2}{x^2} - 2x = \frac{-2(1 + x^3)}{x^2}$$

med enda nollställe i $x = -1$.

Vi kan nu rita grafen i vidstående figur (skalan olika på axlarna).

För att undersöka tangenterna kan vi anta att punkten P har koordinater $(p, f(p))$. Om X, Y är löpande kordinater på en linje, så har tangenten i punkten $(x, f(x))$ ekvationen



$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Denna ska gå genom punkten P vilket ger ekvationen $f(p) - f(x) = f'(x)(p - x)$ eller med uttrycken för f och f' insatta

$$\begin{aligned}
\frac{2-p^3}{p} - \frac{2-x^3}{x} &= -\frac{2(1+x^3)}{x^2}(p-x) \Rightarrow \\
\frac{(2-p^3)x - p(2-x^3)}{px} &= -\frac{2(1+x^3)}{x^2}(p-x) \Rightarrow \\
\frac{(x-p)(2+x^2+xp^2)}{px} &= -\frac{2(1+x^3)}{x^2}(p-x) \Rightarrow \\
\frac{2+x^2p+xp^2}{px} &= \frac{2(1+x^3)}{x^2} \Rightarrow \\
2x + x^3p + x^2p^2 &= 2p(1+x^3)
\end{aligned}$$

Detta ger ekvationen

$$x^3p - x^2p^2 - 2x + 2p = 0 \Leftrightarrow (x-p)(x^2p-2) = 0$$

En lösning är alltså $x = p$, dvs tangeringspunkten är P. Om $p > 0$ fås två andra lösningar, $x = \pm\sqrt{2/p}$, alltså tre olika tangenter. För $p < 0$ blir två rötter imaginära, dvs endast en tangent. Om någon av rötterna $\pm\sqrt{2/p} = p$, dvs om $p^3 = 2$ (med enda reella rot $p = \sqrt[3]{2}$) fås två tangenter. Vi ritar in tangenterna i fallet $p = 2$ (svarande mot tangeringspunkterna $(2, -3)$, $(1, 1)$ och $(-1, -3)$) utmärkta i figuren).