UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jonas Eliasson

Tenta i matematik
Analys MN1 Distans
07-02-10

Skrivtid: 10 - 15. Observera att problemen inte står i svårighetsordning. Alla svar ska motiveras. Om man vill använda sitt resultat från deltentan behöver man inte göra uppgift 1 eller 2. Hjälpmedel: gymnasieformelsamling.

1. Beräkna följande gränsvärden:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}.$$

(5p)

2. Visa att

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan\frac{x-1}{x+1} + C.$$

Vad säger det om sambandet mellan $\arctan x$ och $\arctan \frac{x-1}{x+1}$ för $x > -1$?

(5p)

3. Grafen till ekvationen $x^2 + y^2/4 = 1$ bildar en ellips i planet. I ellipsen skrivs en likbent triangel in vars spets ligger i origo och de två övriga hörnen på ellipsen. Bestäm största möjliga area för en sådan triangel.

(5p)

4. Beräkna integralerna

(a)

$$\int \sqrt{x}\ln x dx.$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}dx.$$

(5p)

Var god vänd!

5. Då området mellan kurvan $f(x) = \arctan x$ och x-axeln, för $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring y-axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av denna.

(5p)

6. Den första delen av Analysens huvudsats säger att om vi definierar funktionen F på I genom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

så är F deriverbar på I och $F'(x) = f(x)$, för alla $x \in I$.

Formulera och bevisa andra delen av Analysens huvudsats.

(5p)

7. Avgör med tydliga motiveringar om följande serier konvergerar eller divergerar.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n\sqrt{n}}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}.$$

(5p)

8. Lös differentialekvationen $y'' - 4y' = 4$ om $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$.

(5p)

Några MacLaurin utvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + O(x^{2n+1}).$$