UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jonas Eliasson

Svar till tenta i matematik
Analys MN1 Distans
07-02-10

Skrivtid: 10 - 15. Observera att problemen inte står i svårighetsordning. Alla svar ska motiveras. Det kan krävas mer motiveringar än i dessa lösningar. Hjälpmedel: gymnasieformelsamling.

1. Beräkna följande gränsvärden:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}.$$

(5p)

Lösning:

(a) Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$. Vi använder MacLaurin-utvecklingar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2+O(x^4))}{x-(x-x^2/2+O(x^3))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+O(x^4)}{x^2/2+O(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x^2)}{1/2+O(x)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(b) När x går mot oändligheten går täljaren mot 1 men nämnare går mot oändligheten eftersom x växer fortare än $\ln(1+x)$. Alltså är gränsvärdet 0.

2. Visa att

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan\frac{x-1}{x+1} + C.$$

Vad säger det om sambandet mellan $\arctan x$ och $\arctan\frac{x-1}{x+1}$ för $x > -1$?

(5p)

Lösning:

För att visa likheten deriverar vi båda sidor. Derivatan av $\int \frac{1}{1+x^2}$ är $\frac{1}{1+x^2}$. Högerledet deriverar med hjälp av kedjeregeln och derivatan av en kvot.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x-1}{x+1}+C) &= \frac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Uträkningen ovan visar att $\arctan(\frac{x-1}{x+1})$ är en primitiv funktion till $\frac{1}{1+x^2}$. Det är $\arctan(x)$ också. Alltså skiljer sig de sig bara med en konstant C. Värdet på C kan vi bestämma genom att stoppa in ett x i funktionerna. Med t.ex. $x = 0$ får vi $\arctan(-1) = \arctan(0) + C = C$, d.v.s. $C = -\frac{\pi}{4}$. Alltså

$$\arctan\frac{x-1}{x+1} = \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

3. Grafen till ekvationen $x^2 + y^2/4 = 1$ bildar en ellips i planet. I ellipsen skrivs en likbent triangel in vars spets ligger i origo och de två övriga hörnen på ellipsen. Bestäm största möjliga area för en sådan triangel.

(5p)

Lösning:

Arean hos en triangel ges av basen gånger höjden delat med två. Om en likbent triangel med spetsen i origo har sina bashörn på en ellips finns det två möjligheter: basen är parallell med x-axeln eller med y-axeln. Om vi antar att ett bashörn finns i punkten (x, y) så är i det första fallet höjden y och basen $2x$ (om man ska vara riktigt noga $|y|$ samt $2|x|$ men vi kan välja att hörn i första kvadranten). I det andra fallet är höjden x och basen $2y$. Oavsett fall ges alltså arean A av $2xy/2 = xy$. Eftersom hörnet ligger på ellipsen får vi

$$A(x) = x\sqrt{4-4x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Återigen har vi antagit att det valda bashörnet ligger i första kvadranten. Ellipsen skär x-axeln i punkterna $(1, 0)$ samt $(-1, 0)$ eftersom om man stoppar in $y = 0$ i ekvationen för ellipsen får man $x^2 = 1$. Alltså kan vi anta att $0 \le x \le 1$.

Funktionen $A(x)$ är kontiunerlig på det slutna och begränsade intervallet $0 \le x \le 1$. Alltså vet vi att den antar sitt max i någon extrempunkt: ändpunkt ($x = 0$, $x = 1$), stationär punkt ($A'(x) = 0$) eller singulär punkt ($A'(x)$ ej definierad). Vi beräknar derivatan

$$A'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{-2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$A(x)$ har en stationär punkt där $A'(x) = 0$, d.v.s. $2(1 - 2x^2) = 0$. Detta sker då $x = 1/\sqrt{2}$.

$A(x)$ har en singulär punkt då $\sqrt{1 - x^2} = 0$, d.v.s. $x = 1$.

Vi kan nu räkna ut värdet av $A(x)$ i alla de möjliga punkterna.

$$A(0) = 0, A(1) = 0 \text{ och } A(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1.$$

Alltså är den största möjliga arean hos triangeln 1.

4. Beräkna integralerna

(a)

$$\int \sqrt{x} \ln x dx.$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} dx.$$

(5p)

Lösning:

(a) Vi använder partiell integration

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \ln x dx &= \int x^{1/2} \ln x dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{3/2} x^{-1} dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx \\
&= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2}
\end{aligned}$$

(b) Vi gör variablebytet $u = \sqrt{x}$. Då är $x = u^2$ och $dx = 2udu$. Om $x = 0$ får vi $u = 0$ och $x = 1$ ger $u = 1$. Alltså

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} dx &= \int_0^1 \frac{u}{2(u^2+1)} 2udu \\
&= \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1} du \\
&= \int_0^1 1 - \frac{1}{u^2+1} du \\
&= [u - \arctan u]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5. Då området mellan kurvan $f(x) = \arctan x$ och x-axeln, för $0 \le x \le 1$, roteras ett varv kring y-axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av denna.

(5p)

Lösning:

Vi beräknar volymen med hjälp av skalformeln.

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx \text{ (partiell integration)} \\
&= 2\pi \left(\left[\frac{x^2 \arctan x}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\arctan 1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^1 \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \arctan 1) \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Volymen är $\pi(\frac{\pi}{2} - 1)$.

6. Den första delen av Analysens huvudsats säger att om vi definierar funktionen F på I genom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

så är F deriverbar på I och $F'(x) = f(x)$, för alla $x \in I$.

Formulera och bevisa andra delen av Analysens huvudsats.

(5p)

Lösning:

Andra delen av Analysens huvudsats säger att om $G(x)$ är någon primitiv funktion till $f(x)$ på I så är, för varje $b \in I$,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Beviset är: om $G(x)$ är någon primitiv funktion till $f(x)$ på I så är $F(x) = G(x) + C$ på I, för någon konstant C (eftersom de är två primitiva funktioner till samma funktion). Alltså är

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C.$$

Sätt $x = a$. Då $0 = G(a) + C$, det vill säga $C = -G(a)$. Sätt $x = b$ och vi får

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a).$$

7. Avgör med tydliga motiveringar om följande serier konvergerar eller divergerar.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n\sqrt{n}}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}.$$

(5p)

Lösning:

(a) Låt $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar eftersom $3/2 > 1$. Men för varje n är $\frac{1}{1+n\sqrt{n}} < a_n$, alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$ enligt jämförelsekriteriet.

(b) Låt $b_n = \frac{1}{n}$. Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n + \sqrt{n})}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar så gör också $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ det enligt jämförelsekriteriet.

8. Lös differentialekvationen $y'' - 4y' = 4$ om $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$.

(5p)

Lösning:

Differentialekvationen är linjär och av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi löser först den homogena ekvationen. Den karakteristiska ekvationen $m^2 - 4m = 0$ har rötterna $m = 0$ och $m = 4$. Den homogena lösningen är alltså

$$y_H = Ce^{0x} + De^{4x} = C + De^{4x}.$$

För att hitta partikulärlösningen vill vi normalt ansätta ett högerled av typ konstant (A). Men eftersom detta redan är en lösning till den homogena ekvationen gör vi ansättningen $y_P = Ax$. Insättning i ekvationen ger

$$y'' - 4y' = -4A = 4$$

d.v.s. $A = -1$. Den allmänna lösningen är alltså $y = y_H + y_P = C + De^{4x} - x$. Nu ger beynnelsevillkoren

$$\begin{aligned} y(0) &= C + D = 0 \\ y'(0) &= 4D - 1 = 3 \end{aligned}$$

d.v.s. $D = 1$ och $C = -1$. Den lösning som uppfyller villkoren blir alltså $y = e^{4x} - x - 1$.