Kiel rekoni rektojn kaj strekojn inter ĉiuj kurboj kaj aliaj bildoj sur la komputila ekrano?

Prof. D-ro Christer O. Kiselman

Resumo. Ni karakterizas rektecon de digitaj kurboj en la entjera ebeno per tri malsamaj metodoj: per vorta kombinatoriko; per diofantaj neegalaĵoj; kaj per diferencaj operatoroj. La laste menciita metodo ŝajnas esti nova.

1. Enkonduko

La geometriajn nociojn de rekto kaj streko oni studis jam dum pli ol du mil jaroj. En la klasika geometrio de Eŭklido[1] oni ekzemple scias ke inter du malsamaj punktoj ĉiam troviĝas tria punkto. Sed sur komputila ekrano ekzistas nur finia nombro da punktoj: ili estas la lumpunktoj aŭ bilderoj (angle *pixels, picture elements*). Tial povas esti ke inter du bilderoj ne ekzistas iu tria bildero (ili povas esti najbaroj sen iu bildero inter si). Sekve la logiko estas tute malsama en tiu digita[2] geometrio kompare al la klasika, eŭklida geometrio.

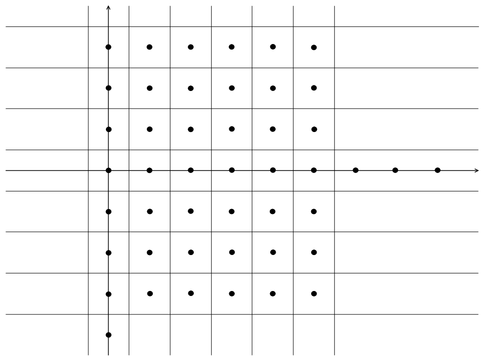
Oni povas vidi ke kelkaj kurboj sur la ekrano evidente ne estas rektaj, dum aliaj aspektas pli-malpli rektaj. Se oni bildigas eŭklidan strekon sur la ekrano, ĝi ofte ne povas esti perfekte rekta. Kiujn deviojn disde eŭklida rekto oni rajtas aŭ devas akcepti? Ĉu ekzistas precizaj kriterioj laŭ kiuj oni povas decidi ĉu iu kurbo aŭ alia bildo estiĝis el eŭklida streko? Jen demandoj al kiuj mi intencas respondi en la nuna teksto, kiu tamen preskaŭ malhavas pruvojn. Por kompleta matematika teksto vidu mian artikolon (2011), kiu ne

[1]Aktiva en Aleksandrio, vivanta de proksimume 325 ĝis proksimume 265 a.Kr. laŭ ĝisnuna kono; tamen lastatempe oni ne konsideras la jarojn certaj.

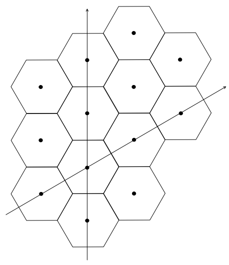
[2]Mi provas uzi la adjektivon *digita* en tiu ĉi kunteksto. PIV 2005 markas la adjektivon *diĝita* per "(evi)", kio signifas 'evitinda'. Oni rekomendas anstataŭe *cifereca*, adjektivon derivitan de *cifero* 'skriba simbolo por nombro'. Tiu vorto taŭgas por ciferecaj horloĝoj, sed ne por la geometrio: la digita geometrio ne estas pli cifereca ol la eŭklida. La vorto *cifereca* kaptas nur unu el la multaj sencoj de la angla *digital*. PIV 2005 listigas plurajn kapvortojn devenantajn el la latina *digitus* 'fingro, piedfingro', nome *digitalo, digitario, digitoksino, digitopunkturo*. Estas tial nature plu uzi la radikon *digit'*. Ni notu ke Vilmos Benczik uzis la vorton *digita* en sia artikolo (2011:39). Krome ni havas la grekdevenajn *daktilo, daktiliso, daktilografi, daktiloskopio* kun la sama origino.

estis publikigita kiam mi parolis en Sopot 2010-06-12 kadre de la Internacia Seminario *Apliko de Esperanto en la Profesia Agado* (AEPA), organizita de Boĵidar Leonov en Karlovo 2010-06-11—14.

Por lokigi bilderojn ni bezonos adresojn al ili. Montriĝas ke oni povas uzi parojn de entjeroj kiel adresojn, koordinatojn. La aron de tiuj paroj oni signas per $\mathbf{Z}^2$. Ties punktoj do ne estas bilderoj, sed adresoj al bilderoj. Estas konate ke la eŭklida ebeno povas esti teselita[3] laŭ tri malsamaj manieroj se oni rajtas uzi nur unu figuron. Tiam tiu figuro estas aŭ kvadrato aŭ heksagono aŭ triangulo. Ni rigardu.

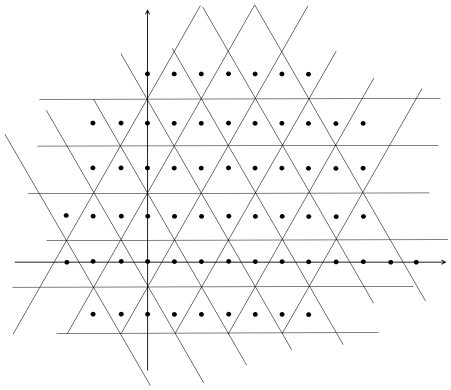


Figuro 1. Kvadrataj bilderoj en la reela ebeno



Figuro 2. Heksagonaj bilderoj en la reela ebeno

[3]Mi enkondukas verbon *teseli* 'disdividi spacon en pecojn kiuj kovras la tutan spacon kaj renkontiĝas nur en siaj randoj kaj kiuj ĉiuj estas kongruaj al malgranda nombro da figuroj'. Ĝi estas verbo derivita de *teselo* 'regula peco', formita el la latina *tessella* 'eta kvadrata ŝtono celita al mozaiko'.



Figuro 3. Triangulaj bilderoj en la reela ebeno

Notu ke en ĉiuj okazoj oni povas uzi karteziajn koordinatojn el $\mathbf{Z}^2$. En la okazo de kvadrataj teseloj la koordinatsistemo estas ortonorma; en la okazo de heksagonoj ĝi estas oblikva; kaj en la okazo de triangulaj teseloj ĝi estas orta sed ne ortonorma.

Mi uzos la terminojn *rekto, radio* (sinonimo *duonrekto*) kaj *streko* (sinonimo *rekta segmento, segmento de rekto*), ĉiuj laŭ PIV 2005. Rekto estas nebarita en ambaŭ direktoj; radio estas nebarita en unu direkto, kaj streko estas barita.

Figuro 4. Streko difinita per du punktoj a kaj b.

Matematike oni povas difini rekton kiel la aron

$$\{(1-t)a+tb;\ t \in \mathbf{R}\};$$

radion kiel la aron

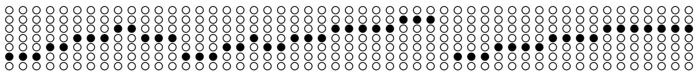
$$\{(1-t)a+tb;\ t \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0\};$$

kaj strekon kiel la aron

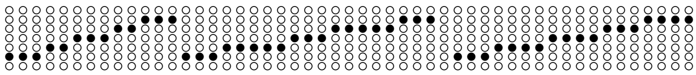
$$\{(1-t)a+tb;\ t \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

por iuj punktoj a kaj $b \neq a$ en la ebeno.

Ni rigardu kelkajn digitajn kurbojn.



Figuro 5. Tri digitaj kurboj. Estas evidente ke ili ne povas esti digitigaĵoj de eŭklida streko, ĉu ne?



Figuro 6. Tri digitaj kurboj kiuj ŝajnas esti pli rektaj ol la antaŭaj. Kiuj el ili povas esti digitigaĵoj de eŭklida streko? La meza klino ŝajnas esti respektive $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$ kaj $\frac{3}{11}$, sed ĉar videblas nur finia nombro de punktoj, ni ne povas certi kiel daŭrigi.

La problemoj konsiderataj ĉi tie originas en la geometrio — la digita geometrio. Ili estos traktataj per metodoj de

· la kartezia geometrio;[4] same kiel de
· la vorta kombinatoriko;
· diofantaj[5] neegalaĵoj; kaj
· la kalkulo pri diferencaj operatoroj.

Dum la tri unue menciitaj metodoj ne estas novaj, la uzo de diferencaj operatoroj ŝajnas esti tia. Ni esperas ke la kombinado de ĉiuj tiuj metodoj kaj aspektoj kontribuos al riĉigo de la teorio kaj al vastigo de la uzeblaj metodoj, same kiel al faciligo de nia kompreno.

Eble estus helpo eki per analogo el la kalkulo pri reelaj variabloj. Se $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ estas dufoje derivebla funkcio sur la reela akso kun reelaj valoroj plenumanta la ekvacion $F'' = 0$, kiu signifas ke la dua derivaĵo de F nulas, tiam, per elementa rezulto el la teorio pri ordinaraj diferencialaj ekvacioj, F difinas rekton, t.e., ĝi estas afina funkcio $F(x) = Ax + B$, $x \in \mathbf{R}$, por iuj konstantoj A kaj B. Kaj se $F'' \geqslant 0$, do se la dua derivaĵo de F estas pozitiveda,[6] tiam F estas konveksa, t.e., ĝi plenumas la neegalaĵon de Jensen[7]

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y), \qquad x, y \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

[4] Nomita laŭ Kartezio, René Descartes (1596–1650).

[5] Nomitaj laŭ Diofanto, aktiva en Aleksandria en la tria jarcento p.Kr.

[6] Mi uzas la sufikson *-ed-* por indiki malfortigon. Ekzemple, x estas pozitiva se kaj nur se $x > 0$, pozitiveda se kaj nur se $x \geqslant 0$; a pliedas ol b se kaj nur se $a \geqslant b$.

[7] Nomita tiel pro Johan Jensen (1859–1925).

Pli ĝenerale, se $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ estas distribucio kaj plenumas $u'' = 0$ en la distribucia senco, t.e. se

$$u(\varphi'') = 0 \text{ por ĉiuj testaj funkcioj } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}),$$

tiam u estas difinita per afina funkcio. Se ni havas

$$u(\varphi'') \geqslant 0 \text{ por ĉiuj testaj funkcioj } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}),\ \varphi \geqslant 0,$$

tiam u estas difinita per konveksa funkcio.

La solvoj al la ekvacio $F'' = 0$ estas la samaj en ambaŭ okazoj, kvankam *a priori* la spaco de eblaj solvoj estas multe pli granda en la dua okazo.

Por la neegalaĵo $F'' \geqslant 0$ la distribuciaj solvoj konsistigas iom pli grandan aron, ĉar nun ĉiuj konveksaj funkcioj estas allaseblaj.

La celo de tiu ĉi artikolo estas trovi analogojn al tiuj rezultoj en la okazo de funkcioj kun entjeraj variabloj, anstataŭigante la derivan operatoron $F \mapsto F''$ per diferencaj operatoroj. Ni vidos ke ekzistas grava diferenco inter funkcioj $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ kun reelaj valoroj kaj funkcioj $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ kun entjeraj valoroj: la funkciaj spacoj $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ kaj $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ estas tre malsimilaj. La unua okazo (de parte diskretigita spaco) estas tute elementa; la dua okazo (de plene diskretigita spaco) tre fore de tio, ĉar plenega je kombinatorikaj problemoj.

Ni vidos ke ni povas karakterizi rafinitajn digitajn rektojn (egalvalore: ekvilibrajn duumajn vortojn) helpe de diferencaj operatoroj, sed ne la rektojn en la senco de Reveillès; la laste menciitaj konsistigas pli mallarĝan klason de digitaj rektoj, kies ĉenkodojn ne inkludas la tiel nomatajn oblikvajn Sturm-vortojn[8] (angle *skew Sturmian words*) en la senco de Morse kaj Hedlund (1940:8). Ankaŭ la ŝnura eco de Rosenfeld (1974) estos studata kaj estos montrite ke oni povas ĝin karakterizi per diferencaj operatoroj.

La studo de tiuj diskretaj analogoj de la diferenciala ekvacio $F'' = 0$ en la funkcia spaco $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ egalvaloras al la studo de rektoj en la digita ebeno $\mathbf{Z}^2$, kaj tial ankaŭ al la teorio de ekvilibraj vortoj el alfabeto de du literoj. Tiu ĉi teorio estas alte evoluigita, kaj multe da esploro estas farita kaj daŭre farata; vidu ekzemple Morse & Hedlund (1940), Hung & Kasvand (1984), Bruckstein (1991), Rosenfeld & Klette (2001), Lothaire (2002), Pytheas Fogg (2002), Vuillon (2003), Klette & Rosenfeld (2004), Samieinia (2007), Uscka-Wehlou (2009), Berthé (2009; kun 94 referencoj), Samieinia (2010), Bédaride k.a. (2010). Tamen la analogio al $F'' = 0$ povas konduki al novaj, pli nombroanalitikaj aspektoj de la teorio, kaj certaj rezultoj, kiel teoremo 10.3 pri la vastigo de strekoj, ricevas facilajn pruvojn. Vidate kiel problemo el kombinatoriko tiu

[8]Nomitaj pro Jacques Charles François Sturm (1803–1855).

teoremo diras ke ekvilibra finia duuma vorto povas esti vastigita al perioda ekvilibra nefinia vorto; krome al nefinie multaj ekvilibraj vortoj kun malsamaj periodoj — kaj ankaŭ al nefinie multaj ekvilibraj neperiodaj nefiniaj vortoj.

La fokuso de intereso de tiu ĉi artikolo estas la spaco $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ de funkcioj kun diskretaj valoroj. Ni kolektos niajn rezultojn pri rekteco, same kiel kelkajn jam konatajn rezultojn, en sekcion 11. La multe pli facila spaco $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ estas mallonge menciita por komparo en sekcio 8. Kiel preparado por estonta laboro la bazaj difinoj de sekcio 3 estas donitaj por $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}^n}$ kaj eĉ pli ĝenerale — tio ne kostas pli.

2. Diferencaj operatoroj

Difino 2.1. Por ajna $a \in \mathbf{R}$ ni difinas *diferencan operatoron* $D_a\colon \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ per

$$(D_aF)(x) = F(x+a) - F(x), \quad x \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R},\ F \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}. \qquad \square$$

Se $a \in \mathbf{N}$, D_a operacias ankaŭ de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ al $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ kaj de $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ al $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$.

Ni kombinas du el tiuj operatoroj kaj ekhavas la *operatoron de Jensen* $J_{a,b}$

$$\begin{aligned}(J_{a,b}F)(x) &= \tfrac{a}{a+b} D_bF(x+a) - \tfrac{b}{a+b} D_aF(x) \\ &= \tfrac{b}{a+b} F(x) - F(x+a) + \tfrac{a}{a+b} F(x+a+b)\end{aligned}$$

por $x \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$. Funkcio $F \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ estas konveksa se kaj nur se $J_{a,b}F \geqslant 0$ por ĉiuj pozitivaj reelaj nombroj a, b.

Ni ofte uzos ke $(J_{a,b}F)(x) = H(x+a) - F(x+a)$, kie H estas la afina funkcio kiu alprenas la samajn valorojn kiel F ĉe la punktoj x kaj $x+a+b$, kaj tial mezuras la devion disde afineco.

Alia du-orda diferenca operatoro estas D_bD_a, donita per

$$(D_bD_a)F(x) = F(x+a+b) - F(x+b) - F(x+a) + F(x).$$

Estas konate ke kontinua funkcio $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ estas konveksa se kaj nur se $D_aD_aF \geqslant 0$ por ĉiuj reelaj $a > 0$; egalvalore $D_bD_aF \geqslant 0$ por ĉiuj $a, b > 0$. Ni notu ke

$$D_bD_a = J_{a,b} + J_{b,a},$$

operatoro kun entjeraj koeficientoj. Speciale $D_aD_a = 2J_{a,a}$.

Por funkcioj en $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ la kondiĉoj $D_1 D_1 f = 0$ kaj $D_1 D_1 f \geqslant 0$ donas facilajn kaj kontentigajn rezultojn. Por funkcioj en $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$, aliflanke, tiuj kondiĉoj difinas tre malvastajn klasojn de funkcioj. Sed se ni malfortigas ilin al $|D_1 D_1 f| \leqslant 1$ kaj $D_1 D_1 f \geqslant -1$, ni ekhavas klasojn de funkcioj kiuj estas multe tro vastaj por esti interesaj. Montriĝas ke, eble surprize, simpla kompromiso inter tiuj du kondiĉoj, nome $|D_b D_a f| \leqslant 1$ respektive $D_b D_a f \geqslant -1$, $a, b \in \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \smallsetminus \{0\}$, difinas klasojn kun bonaj ecoj. Tiuj ĉi neegalaĵoj egalvaloras al $|J_{a,b} f| < 1$ respektive al $J_{a,b} f > -1$ por ĉiuj $a, b \in \dot{\mathbf{N}}$.

3. Bazaj difinoj pri konvekseco

Estas plej facile difini konveksajn funkciojn helpe de konveksaj aroj. Tio havas krome la avantaĝon ke ni povas senprobleme trakti funkciojn kun nefiniaj valoroj.

Subaro A de $\mathbf{R}^n$ estas nomata *konveksa* se

$$\{a, b\} \subset A \text{ implicas } [a, b] \subset A,$$

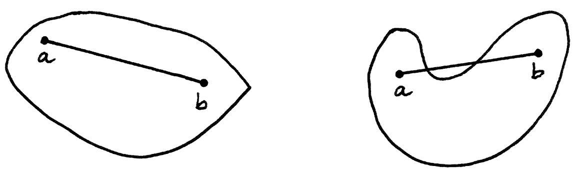
kie

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb;\ t \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

estas la *streko* kun a kaj b kiel finpunktoj. Streko $[a, b]$ kun finpunktoj a, b en A estos nomata *ŝnuro de A*, kaj ni difinas la *ŝnuran aron de A* kiel la aron de ĉiuj ŝnuroj, do

$$\mathbf{\hat{s}nur}(A) = \bigcup_{a,b \in A} [a, b] \subset \mathbf{R}^n.$$

Sekve aro estas konveksa se kaj nur se $\mathbf{\hat{s}nur}(A) \subset A$.



Figuro 7. Konveksa aro en la eŭklida ebeno; nekonveksa aro.

Estas pravigite, mi pensas, nomi tiun econ la *ŝnuran econ de Eŭklido*. Verdire la difino 4 en lia libro Στοιχεῖα, *Stoiĥeía* 'Elementoj' tekstas laŭ la traduko de Heath: “*A* straight line *is a line which lies evenly with the points on itself.*” (Heath 1926:165); Rekto *estas linio kiu kuŝas egale*[9] *kun la punktoj sur si.* Tion oni rajtas interpreti kiel $\mathbf{\hat{s}nur}(A) \subset A$, kio, kune kun la eco de linio kiel senlarĝa longo (angle *breadthless length*, difino 2; Heath 1926:158) implicas ke la aro estas εὐϑεῖα γραμμή, *eutheía grammḗ* (mallonge εὐϑεῖα, la greka termino de Eŭklido por streko, radio aŭ rekto. Por la diversaj signifoj de εὐϑεῖα vidu Kiselman (MS).

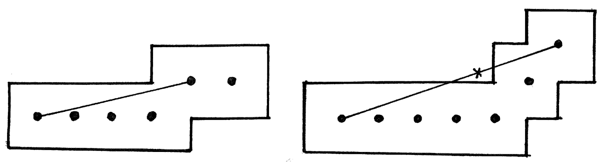
La plej malgranda konveksa aro kiu enhavas aron A estas nomata ties *konveksa tegaĵo* kaj estos signita per $\mathbf{kt}(A)$; ĝi estas bone difinita, ĉar ĉiu komunaĵo de konveksaj aroj estas konveksa.

Ĉar la ŝnura eco de Eŭklido estas stranga en digita situacio, Azriel Rosenfeld (1931–2004) malfortigis ĝin al nova difino, kiu montriĝis sukcesa: ni diros ke aro $A \subset \mathbf{R}^2$ havas la *ŝnuran econ de Rosenfeld* (1974) se

$$\mathbf{\hat{s}nur}(A) \subset A + U,$$

kie U estas la malfermita unuoglobo en $\mathbf{R}^2$ por la l^∞ normo

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|), \qquad U = \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_\infty < 1\}.$$



Figuro 8. Aro kun la ŝnura eco de Rosenfeld; aro kiu ne havas la ŝnuran econ.

4. Kalkuli kun la nefinioj

Al ajna subaro Y de $\mathbf{R}$ ni aldonas du elementojn, la nefiniojn $-\infty$ kaj $+\infty$: ni difinu

$$Y_! = Y \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Speciale ni havas

$$\mathbf{R}_! = [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

[9] En la greka originalo ἴσου, *ísou*; en la latina traduko *æquo*.

la aro de la *etenditaj reelaj nombroj*, kaj

$$\mathbf{Z}_! = [-\infty, +\infty]_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

la aro de la *etenditaj entjeroj*.

5. Grafeoj kaj epigrafeoj

Al ĉiu bildigo $f\colon X \to Y$ de aro X en aron Y ni asocias ĝian *grafeon*,[10]

$$\operatorname{grafe}(f) = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}.$$

La rilato inter funkcioj kaj aroj estas donita per la nocio de finia epigrafeo. Al ĉiu funkcio $f\colon X \to Y_!$, kie $Y \subset \mathbf{R}$ kaj $Y_! = Y \cup \{-\infty, +\infty\}$, ni asocias ĝian *epigrafeon*

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x,y) \in X \times Y_!;\ f(x) \leqslant y\} \subset X \times \mathbf{R}_!,$$

kaj ĝian *finian epigrafeon*

$$\operatorname{epi}^{\mathrm{F}}(f) = \{(x,y) \in X \times Y;\ f(x) \leqslant y\} = \operatorname{epi}(f) \cap (X \times Y) \subset X \times \mathbf{R}.$$

Ni bezonos ankaŭ la *striktan finian epigrafeon*:

$$\operatorname{epi}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{s}}(f) = \{(x,y) \in X \times Y;\ f(x) < y\}.$$

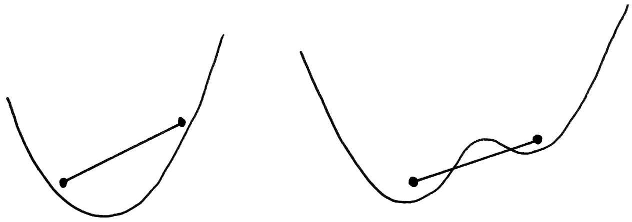
6. Konveksaj funkcioj

Funkcion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_!$ oni nomas *konveksa* se ĝia finia epigrafeo estas konveksa kiel subaro de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Se funkcio $f\colon X \to \mathbf{R}_!$ estas donita, kie $X \subset \mathbf{R}^n$, la plej granda konveksa malpliedanto $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_!$ de f estas nomita ĝia *konveksa envelopo* kaj estos signita per $\mathbf{ke}(f)$. Ĝenerale ni havas

$$\mathbf{ke}(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} \big(y;\ (x,y) \in \mathbf{kt}(\operatorname{epi}^{\mathrm{F}}(f))\big), \quad \text{kaj}$$

$$\operatorname{epi}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{s}}(\mathbf{ke}(f)) \subset \mathbf{kt}(\operatorname{epi}^{\mathrm{F}}(f)) \subset \operatorname{epi}^{\mathrm{F}}(\mathbf{ke}(f)). \tag{6.1}$$

[10] En PIV 2005 aperas *grafo* en tiu senco; mi nun revenas al la formo *grafeo*, kiun mi proponis en Kiselman (1990: piednoto 1) kaj kiun Sergio Pokrovskij (1995:125–127) akceptis. Ĝia origino estas la klasika greka γραφή, *grafḗ*, kiu signifas i.a. 'skribaĵo'.



Figuro 9. Konveksa funkcio; nekonveksa funkcio.

7. Diskreta konvekseco

Ni nun ĝeneraligu la nocion konvekseco.

Difino 7.1. Se subaro W de $\mathbf{R}^n$ estas donita, ni diros ke subaro A de W estas *W-konveksa*, se ekzistas konveksa subaro K de $\mathbf{R}^n$ tia ke $A = K \cap W$. □

Kiam $W = \mathbf{R}^n$, ni ricevos la kutiman konveksecon; kiam $W = \emptyset$, nur la malplena aro konveksas. Interesaj estas ĉi tie la okazoj $W = \mathbf{Z}^n$ kaj $W = \mathbf{Z}^{n-1} \times \mathbf{R}$.

W-konvekseco de A egalvaloras al la inkluda rilato $\mathbf{kt}(A) \cap W \subset A$.

Propozicio 7.2. *La ŝnura eco en la senco de Rosenfeld implicas $\mathbf{Z}^2$-konvekseco. La inversa implico ne validas.* □

Difino 7.3. Se subaro X de $\mathbf{R}^n$, subaro Y de $\mathbf{R}$, kaj subaro W de $X \times Y$ estas donitaj, ni diros ke funkcio $f\colon X \to Y_!$ estas *W-konveksa*, se ĝia finia epigrafeo estas W-konveksa aro. □

Do f estas W-konveksa se kaj nur se $\mathbf{kt}(\mathrm{epi}^{\mathrm{F}}(f)) \cap W \subset \mathrm{epi}(f)$. Ni rimarkigu ke ĉi tie oni ne povas uzi anstataŭ $\mathbf{kt}(\mathrm{epi}^{\mathrm{F}}(f))$ iun el la du aliaj aroj en (6.1), do nek $\mathrm{epi}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{s}}(\mathbf{ke}(f))$ nek $\mathrm{epi}^{\mathrm{F}}(\mathbf{ke}(f))$. La unua estas tro malgranda, la dua tro granda por ke oni havu bonajn rezultojn.

Kiam X egalas al la tuta spaco $\mathbf{R}^n$, Y egalas al $\mathbf{R}$ kaj $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, ni ekhavas la kutiman konveksecon por funkcioj $F \in (\mathbf{R}_!)^{\mathbf{R}^n}$.

Por funkcioj difinitaj en $\mathbf{Z}^n$ kaj kun valoroj en $\mathbf{R}_!$ ekzistas simpla karakterizo de $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R})$-konvekseco per la ekzisto de vastigaĵoj:

Propozicio 7.4. *Funkcio $f\colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}_!$ estas $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R})$-konveksa se kaj nur se ĝi posedas $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$-konveksan vastigaĵon, do vastigaĵon $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_!$ kiu konveksas en la kutima senco.* □

Speciale ni prenos ĉi tie $X = \mathbf{Z}$, $Y = \mathbf{R}$, $W = \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ kaj $X = \mathbf{Z}$, $Y = \mathbf{Z}$, $W = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Por la laste menciita okazo ne ekzistas iu simpla karakterizo kiel en la propozicio ĵus menciita.

8. Konveksaj funkcioj kun reelaj valoroj

Por funkcio en $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ la demandoj povas esti facile responditaj:

Teoremo 8.1. *Funkcio $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ plenumas la ekvacion*

$$D_1 D_1 f = 0$$

se kaj nur se ekzistas reelaj konstantoj A kaj B tiaj ke $f(x) = Ax + B$. Ĝi plenumas la neegalaĵon

$$D_1 D_1 f \geqslant 0$$

se kaj nur se ĝi estas $(\mathbf{Z} \times \mathbf{R})$-konveksa. Egalvaloraj kondiĉoj estas $J_{1,1} f = 0$ respektive $J_{1,1} f \geqslant 0$. □

9. Karakterizo de rekteco

9.1. Rosenfeld: la ŝnura eco

Por karakterizi rektecon de finiaj subaroj de $\mathbf{Z}^2$ Azriel Rosenfeld (1974) enkondukis la ŝnuran econ jam menciitan en sekcio 3.

Ni fiksu bilderon P — ĝi povus fakte esti ajna subaro de $\mathbf{R}^n$. Ni povas difini la *P-digitigaĵon* de subaro M de $\mathbf{R}^n$ kiel la aron

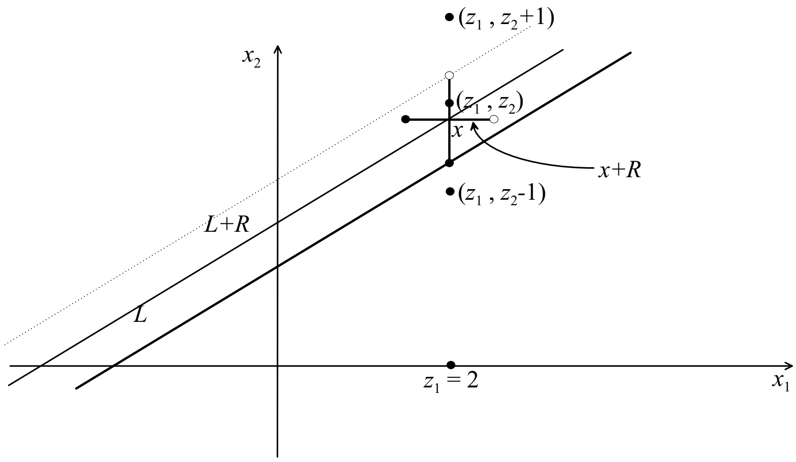
$$\mathbf{dig}_P(M) = (M + P) \cap \mathbf{Z}^n, \qquad M \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n).$$

Ni povas elekti $P = \{0\}$, sed tiam multaj aroj havos malplenan digitigaĵon; la rolo de P estas grasigi la aron M antaŭ ol oni prenas la komunaĵon kun la krado $\mathbf{Z}^n$.

Rosenfeld elektis kiel P la krucon

$$R = \big([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\big) \subset \mathbf{R}^2.$$

Tiam la rekto L en $\mathbf{R}^2$ difinita per ekvacio $x_2 = \alpha x_1 + \beta$ kun $|\alpha| < 1$ estigas funkcion $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Fakte, por tiaj rektoj, se estas donita $z_1 \in \mathbf{Z}$, ekzistas unu kaj nur unu $z_2 \in \mathbf{Z}$ tia ke (z_1, z_2) apartenas al la strio $L + R$.



Figuro 10. Digitigo de eŭklida rekto laŭ Rosenfeld.

Fakte $z_2 = \lceil \alpha z_1 + \beta - \frac{1}{2} \rceil$, tiel ke tiu digitigaĵo de la reela rekto kun ekvacio $x_2 = \alpha x_1 + \beta$ havas la ekvacion $z_2 = \lceil \alpha z_1 + \beta - \frac{1}{2} \rceil$, kiu estas tiel nomata mekanika vorto.[11] Por ĉiu z_1 oni elektas la entjeron plej proksiman al $\alpha z_1 + \beta$ se ekzistas unika plej proksima entjero, kaj, per konvencio, $\alpha z_1 + \beta - \frac{1}{2}$ se $\alpha z_1 + \beta$ estas duonentjero (la elekto inter $\alpha z_1 + \beta - \frac{1}{2}$ kaj $\alpha z_1 + \beta + \frac{1}{2}$, farita por ekhavi unikecon, enkondukas kompreneble certan nesimetrion).

Rosenfeld pruvis ke finia digita arko, speciale la grafeo de funkcio $f\colon [c,d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$ kun $|D_1 f| \leqslant 1$, havas la ŝnuran econ se kaj nur se $A = \mathbf{dig}_R(L)$ por iu streko $L = [p,q]$ en $\mathbf{R}^2$.

Kiam A estas la grafeo de funkcio $f \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$, la ŝnura eco povas esti formulita kiel sekvas. Estu donita $p < t < q$ kun entjeroj p kaj q kaj reela nombro t; tiam estu $H\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la afina funkcio kiu alprenas la valorojn de f ĉe p kaj q. Tiam la ŝnura eco diras ke

$$|H(t) - f(\lfloor t \rfloor)| < 1 \text{ aŭ } |H(t) - f(\lceil t \rceil)| < 1.$$

Se t estas entjero, tiam $t = \lfloor t \rfloor = \lceil t \rceil$, kaj tiu eco simpliĝas al

$$|H(t) - f(t)| < 1.$$

[11] Ĉi tie $\lceil t \rceil$ estas le plej malgranda entjera pliedanto de t, kaj $\lfloor t \rfloor$ la plej granda entjera malpliedanto de t. Sekve $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t \leqslant \lceil t \rceil < t + 1$.

Teoremo 9.1. *Estu* $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *funkcio kun entjeraj valoroj. Tiam ĝia grafeo havas la ŝnuran econ se kaj nur se* $|D_1 f(x)| \leqslant 1$ *kaj* $|J_{a,b} f(x)| < 1$ *por ĉiuj* $(x,a,b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$. *La responda rezulto validas ankaŭ por funkcio difinita sur subintervalo* $[c,d]_{\mathbf{Z}}$ *aŭ* $[c,+\infty[_{\mathbf{Z}}$ *aŭ* $]-\infty,d]_{\mathbf{Z}}$ *de* $\mathbf{Z}$. □

9.2. Hiperebenoj en la senco de Reveillès

Jean-Pierre Reveillès (1991:45) enkondukis digitajn rektojn en la digita ebeno kiel solvojn de duoblaj diofantaj neegalaĵoj: li konsideris arojn de la formo

$$\{(x,y) \in \mathbf{Z}^2;\ \gamma \leqslant \alpha x + \beta y < \gamma'\},$$

kie α kaj β estas reelaj nombroj, ne ambaŭ egalaj al nul, kaj kie γ kaj γ' estas reelaj nombroj. Ni diros ke tia aro estas *digita rekto en la senco de Reveillès*. Li konsideras speciale la okazon kie α kaj β estas entjeroj; li tiam nomas la digitan rektojn *racionala*; verdire, se $\beta \neq 0$, ĝia klino $-\alpha/\beta$ estas racionala nombro.

Se $\gamma' - \gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$, la rekto nomiĝas *naiva*. Tiam ĝi estas 8-koneksa, sed ne ĉiam 4-koneksa.

9.3. Karakterizo per ekvilibraj vortoj

Teoremo 9.2. *Funkcio* $f \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ *kun* $0 \leqslant D_1 f \leqslant 1$ *plenumas la kondiĉon*

$$|D_b D_a f(x)| \leqslant 1, \qquad x \in \mathbf{Z}, \quad a,b \in \dot{\mathbf{N}},$$

se kaj nur se ĝia grafeo

$$\{(x, f(x)) \in \mathbf{Z}^2;\ x \in \mathbf{Z}\}$$

estas naiva rekto; egalvalore, la vico $D_1 f$ *estas ekvilibra duuma vorto.*

Por la pruvo ni unue memorigu pri kelkaj nocioj el la teorio pri vortoj. Per *vorto* ni komprenas ĉi tie duoble nefinian vicon $(w_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de literoj w_j; ĝi estas *duuma* se ekzistas nur du literoj; ni tiam prenu ilin kiel 0 kaj 1.

Oni diras ke faktoro $w' = (w_j)_{j=p}^{q}$ de vorto w havas *longon* $q - p + 1$:

$$\mathbf{longo}(w') = q - p + 1.$$

La malplena vorto $\varepsilon = (w_j)_{j=p}^{p-1}$ havas la longon nul.

Se w estas duuma, la nombro de unuoj en faktoro $w' = (w_j)_{j=p}^{q}$ estas nomata ties *alto*:

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p}^{q} w_j.$$

Oni diras ke funkcio $f \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ havas la *ĉenkodon* $c = c(f) = (c_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, kie

$$c_j = f(j+1) - f(j) = D_1 f(j).$$

Inverse, ĉiu vico $(c_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ determinas familion de funkcioj havantaj tiun ĉi ĉenkodon; ni prenu

$$f(x) = C + \sum_{j=0}^{x-1} c_j \text{ por } x \geqslant 0 \text{ kaj } f(x) = C - \sum_{j=x}^{-1} c_j \text{ por } x < 0,$$

kie C estas arbitra konstanto egala al $f(0)$.

Duuma vorto w estas nomita *ekvilibra* se por ajnaj du faktoroj w' kaj w'' de w ni havas

$$\text{(9.1)} \qquad \mathbf{longo}(w') = \mathbf{longo}(w'') \text{ implicas } |\mathbf{alto}(w') - \mathbf{alto}(w'')| \leqslant 1.$$

Estas bone konate ke la ĉenkodo de funkcio f kun $0 \leqslant D_1 f \leqslant 1$ estas ekvilibra se kaj nur se la funkcio difinas naivan rekton $\{(x, f(x));\ x \in \mathbf{Z}\}$ en $\mathbf{Z}^2$.

Estu $w' = (w_j)_{j=p'}^{q'}$, $w'' = (w_j)_{j=p''}^{q''}$ du faktoroj de la sama duuma vorto w. Ke ili havas la saman longon signifas ke $q' - p' + 1 = q'' - p'' + 1$. Iliaj altoj estas

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p'}^{q'} w_j, \quad \mathbf{alto}(w'') = \sum_{j=p''}^{q''} w_j.$$

Nun, skribante $w_j = D_1 f(j)$, ni ekhavas

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p'}^{q'} D_1 f(j) = D_a f(p'), \qquad \text{kie } a = q' - p' + 1.$$

Pruvo de la teoremo. Se f estas donita, estu $w' = (w_j)_{j=p'}^{q'}$ kaj $w'' = (w_j)_{j=p''}^{q''}$ du faktoroj kun la sama longo el la duuma vorto $w = D_1 f$. Pro simetrio ni rajtas supozi ke $p' \leqslant p''$. Difinu $x = p'$, $a = q' - p' + 1 = q'' - p'' + 1$, la komuna longo de la intervaloj, kaj $b = p'' - p' = q'' - q'$, la distanco inter iliaj maldekstraj finpunktoj. Tiam $x+a=q'+1$, $x+b=p''$ kaj $x+a+b=q''+1$, tiel ke

$$\mathbf{alto}(w'')-\mathbf{alto}(w')=D_af(p'')-D_af(p')=D_bD_af(p')=D_aD_bf(p').$$

Ni vidas ke la kondiĉo $|D_bD_af|\leqslant 1$ rekte tradukiĝas al la kondiĉo (9.1) pri la alto. □

Sekve la egalaĵo $D_1D_1f=0$ por funkcioj en $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ estas anstataŭigita per la ne-egalaĵoj $|D_bD_af|\leqslant 1$, $a,b\in\dot{\mathbf{N}}$, por funkcioj en $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$, kion ni povas kompreni kiel specon de proksimuma egalaĵo.

9.4. Rafinitaj digitaj hiperebenoj

Ni unue difinu tavolojn en $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned}
T&=T(\alpha,\beta,\gamma)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n;\ \beta\leqslant\alpha\cdot x\leqslant\gamma\},\\
T^*&=T^*(\alpha,\beta,\gamma)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n;\ \beta\leqslant\alpha\cdot x<\gamma\},\\
T_*&=T_*(\alpha,\beta,\gamma)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n;\ \beta<\alpha\cdot x\leqslant\gamma\},\\
T_*^*&=T_*^*(\alpha,\beta,\gamma)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n;\ \beta<\alpha\cdot x<\gamma\}.
\end{aligned}$$

Ni bezonos paroli ankaŭ pri la reelaj hiperebenoj

$$T^0=\{x\in\mathbf{R}^n;\ \alpha\cdot x=\beta\},\qquad T^1=\{x\in\mathbf{R}^n;\ \alpha\cdot x=\gamma\}.$$

Se $\beta\leqslant\gamma$, ni havas $T=T_*^*\cup T^0\cup T^1$.

Digita hiperebeno D en la senco de Reveillès plenumas

$$(T\cap\mathbf{Z}^n)\smallsetminus D\subset T^0,$$

t.e., la punktoj en $T\cap\mathbf{Z}^n$ kiuj ne estas en D ĉiuj apartenas al unu sola reela hiperebeno en $\mathbf{R}^n$.

En Kiselman (2004:456) ni ĝeneraligis tion al la sekva difino. Ni signu per $\pi_k\colon\mathbf{Z}^n\to\mathbf{Z}^{n-1}$ la projekcion kiu forgesas la koordinaton x_k, $k=1,\dots,n$. Aro D estas *rafinita digita hiperebeno* se D estas $\mathbf{Z}^n$-konveksa, se

$$T_*^*\cap\mathbf{Z}^n\subset D\subset T\cap\mathbf{Z}^n$$

por iu elekto de $\alpha\in\mathbf{R}^n\smallsetminus\{0\}$ kaj $\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, kaj se krome, por iu k, la aroj $\pi_k(D\cap T^0)$ kaj $\pi_k(D\cap T^1)$ estas disaj kaj kune plenigas la tuton de $\pi_k((T^0\cup T^1)\cap\mathbf{Z}^2)$.

En du dimensioj tiu ĉi difino povas esti formulita en simpla maniero. Ni prenu $n = 2$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha, 1)$ kaj difinu striojn en $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned}
S(\alpha,\beta,\gamma) &= T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \beta \leqslant y - \alpha x \leqslant \gamma\},\\
S^*(\alpha,\beta,\gamma) &= T^* = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \beta \leqslant y - \alpha x < \gamma\},\\
S_*(\alpha,\beta,\gamma) &= T_* = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \beta < y - \alpha x \leqslant \gamma\},\\
S_*^*(\alpha,\beta,\gamma) &= T_*^* = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \beta < y - \alpha x < \gamma\}.
\end{aligned}$$

Tiam rekto en $\mathbf{Z}^2$ en la senco de Reveillès estas, eble post permuto de la koordinatoj, egala al la komunaĵo $S^*(\alpha,\beta,\gamma) \cap \mathbf{Z}^2$, por iuj α, β, γ, $|\alpha| \leqslant 1$. (Ni povus same bone uzi $S_*(\alpha,\beta,\gamma)$ ĉi tie, ĉar $S_*(\alpha,\beta,\gamma) = -S^*(\alpha,-\gamma,-\beta)$.)

Rafinita digita rekto kun $|\alpha| \leqslant 1$ kaj $\gamma = \beta + 1$ estas aŭ digita rekto en la senco de Reveillès aŭ, eble post reflekto, de la formo

$$\begin{aligned}
D_{\alpha,\beta,p} = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 \cap S^*(\alpha,\beta,\beta+1);\ x < p\}&\\
\cup \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 \cap S_*(\alpha,\beta,\beta+1);\ x \geqslant p\}&
\end{aligned}$$

por iuj $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ kaj iu $p \in \mathbf{Z}$. Tiel estas, ĉar la solaj paroj de komplementaj $\mathbf{Z}$-konveksaj subaroj de la digita rekto estas $(\mathbf{Z}, \varnothing)$ kaj $(]-\infty, p[_{\mathbf{Z}}, [p, +\infty[_{\mathbf{Z}})$, $p \in \mathbf{Z}$.

Teoremo 9.3. *Ĉiu digita rekto en la senco de Reveillès estas rafinita digita rekto.*

Inverse, se ni havas reelajn nombrojn $|\alpha| \leqslant 1$ kaj β, ni konsideru kvar okazojn por la aro

$$D = S(\alpha,\beta,\beta+1) \cap \mathbf{Z}^2,$$

difinante

$$D^j = \{(x,y) \in D;\ y - \alpha x = \beta + j\}, \qquad j = 0, 1:$$

(A). *La klino α estas racionala kaj $\beta \in \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$. Tiam D^0 kaj D^1 enhavas nefinie multajn punktojn kaj D ne estas rafinita digita rekto. Por ĉiu entjero p, la aro*

$$D_p = (D \smallsetminus \{(x,y) \in D^1;\ x < p\}) \smallsetminus \{(x,y) \in D^0;\ x \geqslant p\}$$

estas rafinita digita rekto. La aroj $D \smallsetminus D^0$ kaj $D \smallsetminus D^1$ estas digitaj rektoj en la senco de Reveillès.

(B). *La klino* α *estas racionala kaj* $\beta \notin \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ *(ekzemple kiam* β *estas neracionala). Tiam* D^0 *kaj* D^1 *estas malplenaj, tiel ke* $D = D^*_*$, *kaj* D *estas digita rekto en la senco de Reveillès.*
(C). *La klino* α *estas neracionala kaj* D^0 *estas malplena. Tiam*

$$D = S(\alpha, \beta, \beta + 1) \cap \mathbf{Z}^2 = S^*_*(\alpha, \beta, \beta + 1) \cap \mathbf{Z}^2$$

estas digita rekto en la senco de Reveillès.
(Ĉ). *La klino* α *estas neracionala kaj* D^0 *enhavas nur unu punkton. Tiam ankaŭ* D^1 *enhavas nur unu punkton, kaj* D *ne estas rafinita digita rekto. Sed* $D \setminus D^0$ *kaj* $D \setminus D^1$ *estas digitaj rektoj en la senco de Reveillès.* □

Sekve, en la okazoj (B), (C) kaj (Ĉ) la du nocioj koincidas; en la okazo (A) ili estas malsamaj. En la okazo (A) kaj (Ĉ) ni devas forigi certajn punktojn el la limaj rektoj D^0, D^1 por ekhavi kion ni volas, dum tio ne necesas en la okazoj (B) kaj (C).

Ni notu ke ĝenerale $D^1 = D^0 + (0, 1)$, kio signifas ke, por ekhavi naivan digitan rekton, ni ĉiam devas forigi unu el D^0 kaj D^1 krom se ili estas malplenaj. La okazoj (A) kaj (B) tiam estas simplaj.

Por la okazoj (C) kaj (Ĉ) ni rimarkigu ke se α estas neracionala, ni ne povas havi du punktojn (x_0, y_0) kaj (x_1, y_1) kun $x_0 \neq x_1$ en D^0; aliokaze $\alpha = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ estus racionala. Do D^0 kaj D^1 estas aŭ malplenaj aŭ aroj kun nur unu punkto.

10. Vastigo de strekoj

Ni konsideru funkciojn difinitajn sur intervalo: estu c kaj d du entjeroj kaj konsideru funkciojn $f\colon [c, d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$. Ni tiam povas formi $D_b D_a f(x)$ nur por $c \leqslant x \leqslant d - a - b$, $a, b \in \dot{\mathbf{N}}$. Natura demando estas ĉu la kondiĉoj $|D_b D_a f(x)| \leqslant 1$ por tiuj finie multaj a, b, x estos sufiĉaj por certigi ke f difinas strekon; alivorte ĉu ni povas trovi vastigaĵon g al la tuta $\mathbf{Z}$ de la funkcio f kiu ĉie plenumas la kondiĉojn.

La respondo estas jesa, sed la vastigaĵo neniam estas unika.

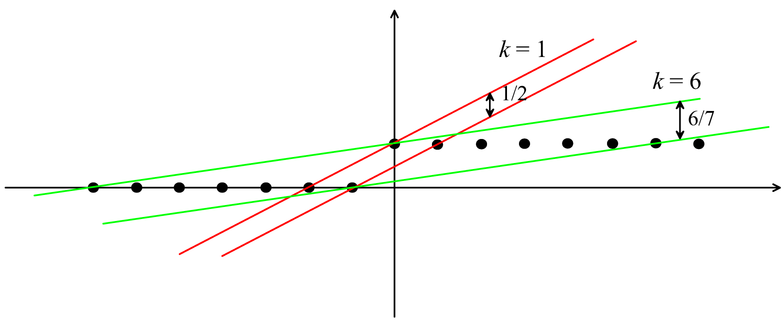
Teoremo 10.1. *Se* $f\colon [c, d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$ *plenumas* $|D_b D_a f(x)| \leqslant 1$ *por ĉiuj* x, a, b *por kiuj la esprimo estas difinita, tiam ĝia grafeo estas inkludita en malfermita strio* $S^*_*(\alpha, \beta, \gamma)$ *kun racionala* α *kaj de alto* $\gamma - \beta < 1$. *Se funkcio* $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *difinita sur la tuta entjera akso plenumas* $|D_b D_a f| \leqslant 1$, *tiam ĝia grafeo estas inkludita en fermita strio* $S(\alpha, \beta, \beta + 1)$ *de alto* 1. □

Teoremo 10.2. *Se la grafeo de funkcio* $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *aŭ* $f\colon [c,d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$ *estas inkludita en duon-malfermita strio* $S^*(\alpha,\beta,\beta+1)$ *aŭ* $S_*(\alpha,\beta,\beta+1)$*, tiam* $|(J_{a,b}f)(x)| < 1$ *por ĉiuj x kaj* $a,b \in \dot{\mathbf{N}}$ *por kiuj la esprimo estas difinita.* □

Teoremo 10.3. *Estu* $f\colon [c,d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$ *donita tia ke* $|D_bD_af(x)| \leqslant 1$ *por ĉiuj a, b, x por kiuj la esprimo estas difinita, t.e. por* $c \leqslant x \leqslant d-a-b$, $a,b \in \dot{\mathbf{N}}$*. Tiam f povas esti vastigita al funkcio* $g\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *tia ke* $|D_bD_ag(x)| \leqslant 1$ *por ĉiu* $x \in \mathbf{Z}$ *kaj ĉiuj* $a,b \in \dot{\mathbf{N}}$. □

Se ni rigardas tion kiel kombinatorikan problemon por ĉenkodoj, t.e. por duumaj vortoj, la teoremo diras, en la okazo $0 \leqslant D_1 f \leqslant 1$, ke ekvilibra finia vorto povas esti vastigita al perioda ekvilibra nefinia vorto, krome al ekvilibraj vortoj kun nefinie multaj malsamaj periodoj — kaj ankaŭ al nefinie multaj ekvilibraj neperiodaj nefiniaj vortoj.

Ekzemplo 10.4. Estu f_k la malvastigaĵo al $[-k,k]_{\mathbf{Z}}$, $k \in \dot{\mathbf{N}}$, de la funkcio $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ kiu alprenas la valoron 0 por $x < 0$ kaj 1 por $x \geqslant 0$. Tiam la konstruo donas klinon $\alpha_k = 1/(k+1) > 0$ kaj alton $\gamma_k - \beta_k = k/(k+1) < 1$. Verdire, ni povas elekti ajnan α_k kun $0 < \alpha_k \leqslant 1/(k+1)$ kaj tamen ekhavi $\gamma_k - \beta_k < 1$. Sed estas neeble elekti $\alpha_k = 0$, ĉar tiam $\gamma_k - \beta_k = 1$.



Figuro 11. Minimumaj strioj kiuj enhavas $2k+1$ punktojn por $k = 1$ kaj $k = 6$, do tri punktojn $(-1,0),(0,1),(1,1)$ (kaj krome kvaran punkton $(-2,0)$) respektive dek tri punktojn $(-6,0)$, $(-5,0)$, $(-4,0)$, $(-3,0)$, $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$, $(6,1)$ (kaj krome dekkvaran punkton $(-7,0)$).

Tio signifas ke la rekto konstruita elde la malvastigaĵo de f al finia intervalo $[c,d]$ enhavanta -1 kaj 0 nepre havos pozitivan klinon, kvankam f mem reprezentas rekton kun klino nul. Se ni elektas racionalan klinon, la ĉenkodo

$D_1 g$ de la vastigaĵo estos perioda, dum $D_1 f$ ne estas. La funkcio en tiu ĉi ekzemplo neniam povas aperi kiel vastigaĵo en la konstrumetodo uzita en la pruvo de la teoremo pri vastigo de strekoj. □

11. Digita rekteco

Kombinante kion ni lernis pri digita rekteco ni povas formuli jenajn rezultojn.

Teoremo 11.1. *Estu $f \in \mathbf{Z}^{\mathbf{Z}}$ kaj konsideru la sekvajn ecojn.*
(A). *La grafeo de f havas la ŝnuran econ de Rosenfeld;*
(B). *f kaj $-f$ estas $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$-konveksaj;*
(C). *La grafeo de f estas $\mathbf{Z}^2$-konveksa aro;*
(Ĉ). $|(D_b D_a f)(x)| \leqslant 1$ *por ĉiuj* $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$*;*
(D). $|(J_{a,b} f)(x)| < 1$ *por ĉiuj* $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$*;*
(E). *La duuma vorto $D_1 f \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ estas ekvilibra;*
(F). *f difinas rafinitan digitan hiperebenon en $\mathbf{Z}^2$ en la senco de Kiselman (2004);*
(G). *f difinas digitan rekton en la senco de Reveillès (1991).*
Ni supozu ke $|D_1 f| \leqslant 1$. Tiam ĉiuj kondiĉoj (A), (B), (C), (Ĉ), (D), (E) *kaj* (F) *egalvaloras, kaj ili sekvas el* (G). □

Teoremo 11.2. *Estu $f \colon [c, d]_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$ difinita sur finia intervalo $[c, d]_{\mathbf{Z}}$ kaj supozu ke $|D_1 f(x)| \leqslant 1$ por ĉiuj x tiaj ke $c \leqslant x \leqslant d - 1$. Tiam la sekvaj ecoj ĉiuj egalvaloras.*
(A). *La grafeo de f havas la ŝnuran econ de Rosenfeld;*
(B). *f kaj $-f$ ambaŭ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$-konveksas;*
(C). *La grafeo de f estas $\mathbf{Z}^2$-konveksa aro;*
(Ĉ). $|(D_b D_a f)(x)| \leqslant 1$ *por ĉiuj* $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$ *tiaj ke* $c \leqslant x < x + a + b \leqslant d$*;*
(D). $|(J_{a,b} f)(x)| < 1$ *por ĉiuj* $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$ *tiaj ke* $c \leqslant x < x + a + b \leqslant d$*;*
(E). *La duuma vorto $D_1 f \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ estas ekvilibra;*
(F). *f difinas subaron de rafinita digita hiperebeno en $\mathbf{Z}^2$ en la senco de Kiselman (2004);*
(G). *f difinas subaron de digita rekto en la senco de Reveillès (1991).* □

Ni diru ke eco de funkcioj $f \in (\mathbf{Z}_!)^A$, kie A estas ajna subintervalo de $\mathbf{Z}$, estas *loka* se ĝi estas vera se kaj nur se ĉiuj malvastigaĵoj $f|_{[c,d]_{\mathbf{Z}}}$ al finiaj intervaloj $[c, d]_{\mathbf{Z}} \subset A$ havas la econ.

Propozicio 11.3. *La ecoj* (A), (B), (C), (Ĉ), (D), (E) *kaj* (F)*, komprenataj por funkcioj difinitaj sur* $\mathbf{Z}$ *respektive sur subintervaloj de* $\mathbf{Z}$*, estas lokaj ecoj. La eco* (G) *ne estas loka.* □

Referencoj

Bédaride, Niclas; Domenjoud, Eric; Jamet, Damien; Rémy, Jean-Luc. 2010. On the number of balanced words of given length and height over a two-letter alphabet. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **12**(3), 41–62.

Benczik, Vilmos. 2011. La esperanta literaturo tra la lupeo de kelkaj lingvoteorioj literaturkonceptoj. *Esperantologio / Esperanto Studies* **5**, 37–59.

Berthé, Valérie. 2009. Discrete geometry and symbolic dynamics. **En:** Mikael Passare (red.), *Complex Analysis and Digital Geometry. Proceedings from the Kiselmanfest, 2006*, pp. 81–110. Acta Universitatis Upsaliensis, vol. 86. Upsalo: Upsala universitato. 364 pp. ISSN 0502-7454, ISBN 978-91-554-7672-4.

Eckhardt, Ulrich. 2001. Digital lines and digital convexity. *Digital and Image Geometry*, pp. 209–228. Lecture Notes in Computer Science **2243**. Springer.

Heath, Thomas L. 1926. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Tradukita el la teksto de Heiberg. Volumo I, Libroj I kaj II. Dua eldono. Kembriĝo: Cambridge University Press. Ree presita en 1956 kaj poste en Nov-Jorko fare de Dover Publications, Inc. x + 432 pp.

Hung, S. H. Y.; Kasvand, T. 1984. On the chord property and its equivalences. **En:** *Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 116–119.

Kim, Chul E.; Rosenfeld, Azriel. 1982. Digital straight lines and convexity of digital regions. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mech. Intell.* PAMI-4, No. 2, 149–153.

Kiselman, Christer. 1990. Nomoj de matematikaj operacioj en Esperanto. **En:** *Serta Gratvlatoria in Honorem Juan Régulo*, volumo IV, pp. 683–697. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Kiselman, Christer O. 2004. Convex functions on discrete sets. **En:** R. Klette; J. Žunić (red.), *Combinatorial Image Analysis, 10th International Workshop, IWCIA 2004, Auckland, New Zealand, December 1–3, 2004*, pp. 443–457. Lecture Notes in Computer Science **3322**. Springer.

Kiselman, Christer O. 2011. Characterizing digital straightness and digital convexity by means of difference operators. *Mathematika* **57**, 355–380.

Kiselman, Christer O. MS. Euclid's straight lines. Akceptita 2013-10-09 por publikigo en *Nordisk matematisk tidskrift, Normat*.

Kiselman, Christer O.; Samieinia, Shiva. 2010. Convexity of marginal functions in the discrete case. **En:** Shiva Samieinia (2010), *Digital Geometry, Combinatorics, and Discrete Optimization*, publikigita 2010-12-15. Doktora disertaĵo defendita ĉe Stokholma universitato 2011-01-21.

Kiselman, Christer O.; Samieinia, Shiva. MS. Convexity of marginal functions in the discrete case. Akceptita 2014-01-29 por publikigo en *Journal of Mathematical Sciences* (Nov-Jorko).

Klette, Reinhard; Rosenfeld, Azriel. 2004. *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Amsterdamo k.a.: Elsevier. xviii + 656 pp.

Lothaire, M. 2002. *Algebraic Combinatorics on Words*. Kembriĝo: Cambridge University Press.

Morse, Marston; Hedlund, Gustav A. 1940. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.* **62**, No. 1, 1–42.

Plena ilustrita vortaro de Esperanto 2005 (PIV 2005). 2005. Parizo: Sennacieca Asocio Tutmonda.

Pokrovskij, Sergio. 1995. *Komputika leksikono*. Jekaterinburg: Sezonoj.

Pytheas Fogg, N. 2002. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Math. **1794**. Springer-Verlag.

Reveillès, J[ean]-P[ierre]. 1991. Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique. Strasburgo: Universitato Louis Pasteur. Ŝtatdisertaĵo, 251 pp.

Rosenfeld, Azriel. 1974. Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers.* **c-32**, No. 12, 1264–1269.

Rosenfeld, Azriel; Klette, Reinhard. 2001. Digital straightness. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **46**, 32 pp.

Samieinia, Shiva. 2007. *Digital straight line segments and curves*. Licencia disertaĵo prezentita ĉe la Stokholma universitato 2007-09-25. www2.math.su.se/reports/2007/6/

Samieinia, Shiva. 2010. Chord properties of digital straight line segments. *Math. Scand.* **107**, 1–27.

Uscka-Wehlou, Hanna. 2009. Two equivalence relations on digital lines with irrational slopes. A continued fraction approach to upper mechanical words. *Theoret. Comput. Sci.* **410** (38–40), 3655–3669.

Vuillon, Laurent. 2003. Balanced words. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **10**, suppl., 787–805.

Paperpoŝta adreso de la aŭtoro: Upsala universitato, Matematika instituto,
Poŝtkesto 480, SE-751 06 Uppsala, Svedio.

Sukcenaj adresoj: kiselman@math.uu.se, christer@kiselman.eu

URL: www.math.uu.se/~kiselman

КАК СЕ РАЗПОЗНАВАТ ПРАВИ ЛИНИИ И ОТСЕЧКИ МЕЖДУ ВСИЧКИ КРИВИ И ИЗОБРАЖЕНИЯ НА КОМПЮТЪРНИЯ ЕКРАН?

Проф. д-р Кристер О. Киселман

В настоящата работа дигиталните прави и отсечки се характеризират посредством три различни метода: словесна комбинаторика, Диофантови неравенства и крайни разлики. Прилагането на метода на крайните разлики е нов принос в областта на дигиталната геометрия.