Tankar om matematisk modellering

Christer Kiselman

Forskarskolan i Matematik och modellering
⋆ Akademi Sydost ⋆
Möte i Färjestaden 2007-08-23

Innehåll

Ett oroande missförstånd

Characteristics of Light

Light (by which we mean electromagnetic radiation in general) is an electromagnetic wave. This means that its properties can be (mostly) explained as oscillations (or vibrations) of electric and magnetic fields.

However, in many of its interactions with atoms, light behaves as if it comes in discrete packets of energy, that is, light acts like it is made up of particles. Particles of light are called photons.

The fact that light acts like both waves and particles is the deep paradox at the heart of quantum physics!

”There, Professor Singh struggles to write a book that takes on one of the greatest paradoxes to confound thinkers of the twentieth century: the dual nature of light as both particle and wave.” (*Professor of Light* by Marina Tamar Budhos.

Vad är en matematisk modell

Projektet *Matematikterminologi i skolan*

Term: matematisk modell

Definition: matematisk struktur eller teori som avser att kvalitativt eller kvantitativt återge viktiga aspekter av verkligheten

Kommentar: Avsikten med en matematisk modell kan vara att förstå, att förutse eller att styra verkligheten.

En matematisk modell kan vara en ordinär eller partiell differentialekvation, det vanligaste verktyget för att matematiskt beskriva förändring. Den kan vara ett dynamiskt system som återger förändringen stegvis. Den kan slutligen vare en hel matematisk teori, som teorin för operatorer i Hilbertrum, en modell för kvantmekaniken.

Exempel: Låt oss ta jordytan som en del av verkligheten som vi vill beskriva med en matematisk modell. Om den del vi vill beskriva är en stad, så är ett plan en lämplig modell för den delen av jordytan. Dennas krökning är så obetydlig att den inte förstör en vanlig turistkarta över staden. Men för större delar av jordytan är krökningen så stor att vi måste ta en sfär som modell. Denna modell duger för de flesta kartor, men om man vill mäta mycket noggrant, så fordras det att man tar hänsyn till att jorden är avplattad vid polerna, vilket innebär att sfären måste ersättas av en ellipsoid (medelovaloiden) som modell. Ibland räcker inte heller det, utan man måste ta hänsyn till att massfördelningen i jorden är ojämn, varför man sätter upp en något bucklig yta (kallad geoiden) som en fjärde modell. Slutligen återstår finstrukturen med berg, dalar och havsdjup om man vill ha en ännu noggrannare beskrivning.

Som framgår av detta exempel kan en matematisk modell vara mer eller mindre komplicerad, och mer eller mindre noggrann. Men det är inte så att den mer förfinade modellen är den bästa för sitt ändmål. Att rita en turistkarta över ett mindre landområde med hänsyn till ellipsoidens avplattning är en komplikation som inte ger någon utdelning.

Exempel: Ett klassiskt exempel på en matematisk modell är den differentialekvation som beskriver radioaktivt sönderfall. Den är $u' = -au$, där u är utstrålningen hos ett stycke materia, t tiden, och a en konstant. Utstrålningen minskar under en kort tid med en andel a per tidsenhet.

Ekvationen är lätt att lösa, och man ser att utstrålningen vid tiden $t \geqslant 0$ är $u(t) = u(0)e^{-at}$. Halveringstiden blir $a^{-1} \ln 2$.

Denna modell används med framgång i många situationer, till exempel i kol-14-metoden för att bestämma organiska materials ålder.

Men ändå kan man inte säga att den är en perfekt modell. Ty den materia vi startar med innehåller blott ändligt många partiklar, och efter en viss ändlig tid kommer inte någon mer heliumkärna att sändas ut (om vi nu studerar alfa-strålning). När den sista heliumkärnan skickats ut, så borde vi ha $u(t) = 0$. Men enligt modellen kommer vi att för all framtid ha $u(t) > 0$, dvs. strålningen kommer aldrig att upphöra helt.

Modellen återger med hög noggrannhet strålningen så länge antalet partiklar är stort, men kan inte göra det när tiden blivit så långt framskriden att blott ett litet antal partiklar återstår. Denna bristande överensstämmelse beror på att modellen bygger på reella tal, medan verkligheten i detta fall är diskret: antalet heliumkärnor är ett naturligt tal, inte ett reellt tal. Hur skall man definiera halveringstiden om man har blott 75 heliumkärnor?

Ett annat exempel

Den klassiska värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

är en modell för temperaturens variation i ett homogent medium.

Och vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

är en modell för vågors utbredning.

Om jag tänder en tändsticka här, så säger vågekvationen att det tar en dryg sekund innan ljuset från den syns på månen. Men enligt värmeledningsekvationen skulle temperaturen på månen börja stiga omedelbart, innan ljuset når fram – om vi hade ett homogent medium hela vägen. Detta verkar ju inte så bra. Men ändå är det en bra matematisk modell.

Matematikens rikedomar

Gerd Brandell och Magnus Fontes har skrivit en artikel ”Matematiska modeller – verktyg eller verklighet” till en bok med den provisoriska titeln *Matematikens rikedomar*.

Boken kommer att innehålla flera artiklar som försöker popularisera matematiken; detta är en av dem.

Brandell och Fontes citerar Morten Blomhøj et al. (2001), som beskriver arbetet med en matematisk modell i följande steg.

1. Problemformulering
Förståelse, förutsägelse, påverkan
2. Systemavgränsning
3. Matematisering
4. Analys
5. Tolkning och utvärdering av modellresultatet
6. Validering av modellen

Iterera!

Övertro på matematiska modeller.

Rossbyvågor

Carl-Gustaf Rossby (1898–1957) var en framstående meteorolog. Han publicerade år 1939 en artikel som beskrev vågor i atmosfären och haven på en planetär skala. Numera kallas sådana vågor för *Rossbyvågor*.

Hans storhet låg i att han kunde förenkla de mycket komplicerade ekvationer som beskriver atmosfärens rörelse genom att bortse från faktorer som i och för sig var viktiga, men som inte alltför mycket påverkade atmosfärens kvalitativa rörelsemönster. Genom djärva förenklingar av den matematiska modellen kunde han påvisa fenomen som de mer komplicerade ekvationerna dolde.

År 1959, tjugo år efter publiceringen, ansågs hans insats vara den mest fundamentala i den dynamiska meteorologin.

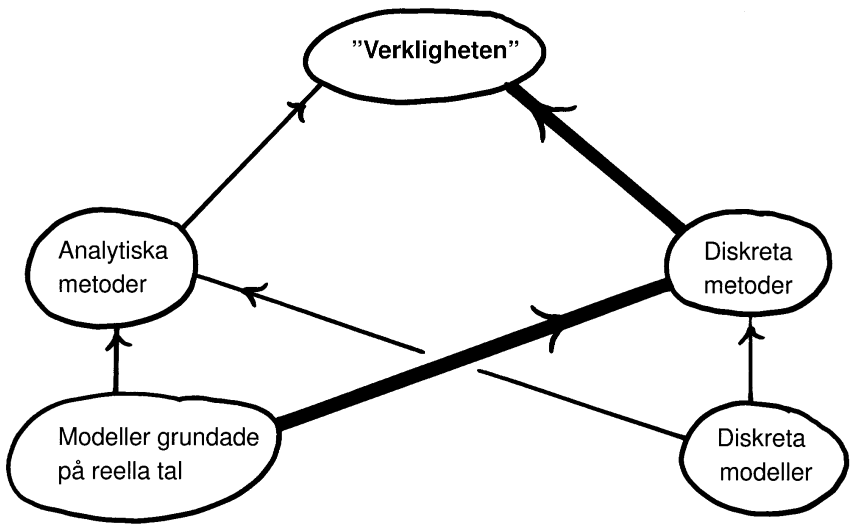
Matematiska modeller grundade på de reella eller komplexa talen har varit ytterst framgångsrika inom vetenskaperna under de flera sekel (Newton och Leibniz).

Men hur kan de reella talen vara en modell för verkligheten?

Fysik med ett minsta positivt avstånd.

Reella tal kontra diskreta rum.

Reella tal kontra p-adiska tal.



$$f(x) = x^5, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 5x^4$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4$$

$$f(x+1) - f(x) = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$\int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4};$$

$$\sum_{t=0}^{x} t^3 = \frac{x^4}{4} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

Denna formel visades i Sydkoreas television, EBS, kanal 48, 2006-03-15 06:30. Och så Japan, Kanal 9, 2007-08!

$$\sum_{t=0}^{x} t^7 = \frac{1}{24}x^2(x+1)^2(3x^4 + 6x^3 - x^2 - 4x + 2)$$

$$\sum_{t=0}^{x} t^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k-1} \frac{B_k}{k} x^{m-k+1}.$$

Bernoullitalen: $B_1 = 1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$; $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$ (Gradštejn & Ryžyk, s. 15, 16).

Jämför med

$$\int_0^x t^m dt = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Ett sista exempel:

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad (f * g)' = f' * g = f * g'$$

för funktioner definierade på reella axeln. Den andra gäller utan ändring för funktioner på heltalslinjen $\mathbb{Z}$, medan den första är mycket problematisk att översätta till $\mathbb{Z}$. (Drell, Weinstein & Yankielowicz 1976, Bouguenaya & Fairlie 1986).

Allt detta kan läsas på två olika sätt:
(1) som kraftfull och mycket effektiv propaganda för differential- och integralkalkyl;
(2) som en utmaning.

Tankar ombord på FinnEagle 2007-07-13: Har hela världen blivit digital?

Varför digital geometri?

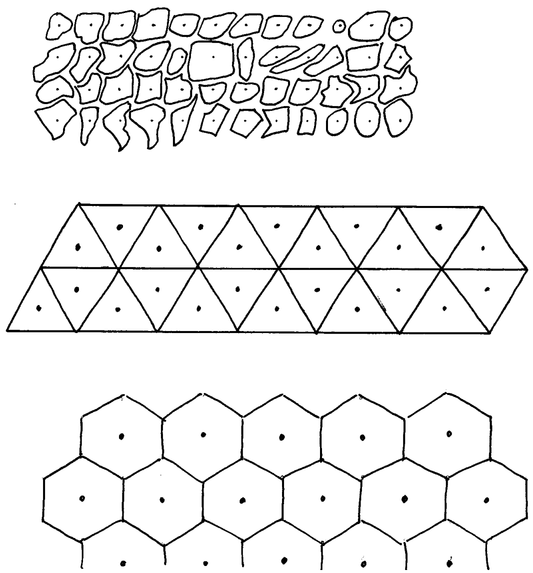
Datorskärmens geometri.

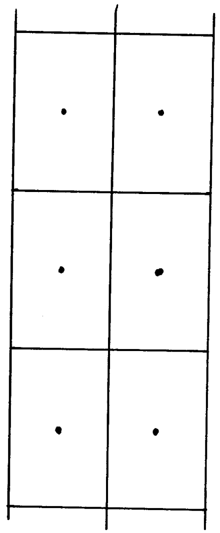
Punkter, sträckor, plan. Ellipser, hyperbler. Lemniskator, kardioider.

Euclides: εὐθεῖα, *eutheĩa* 'sträcka, segment av en rät linje'. Mellan två punkter på en rät linje finns det alltid en tredje (alltså oändligt många). Det finns inga liksidiga trianglar i $\mathbb{Q}^2$.

Digitala objekt kan ses som approximationer av euklidiska objekt. Men det är bättre att behandla dem för vad de är! Ändliga mängder!

Rosenfeld 1974. Tessellationer av det euklidiska planet. Pixlar, voxlar! Deras adresser: $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.





Räta linjer och plan

Ett plan i $\mathbb{R}^3$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b = 0.$$

En skiva i $\mathbb{Z}^3$:

$$-h \leqslant a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b \leqslant h.$$

Diofantisk approximation.

Vilka sammanhangsegenskaper har skivan?

För vilka h kan skivan anses vara ett plan?

Är detta en matematisk modell?

Tack för ert intresse!

Hoppas vi träffas igen!