Särtryck av sidorna 287—292 ur

Matematiktermer för skolan

Christer Kiselman och Lars Mouwitz

under medverkan av
Tom Britton, Bo Göran Johansson, Staffan Rodhe,
Anders Tengstrand och Ebbe Vilborg

Illustrationer av Erik Melin

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM
Göteborgs universitet

14. Språkens rikedomar och terminologins problem

Christer Kiselman

Språken utgör oskattbara rikedomar för mänskligheten. De är kanske sextusen till antalet. En osäkerhet vidlåder detta antal, ty dels har man troligen inte kartlagt alla språk, dels är det inte klart vad som skall räknas som dialekter eller språk. (Hur många språk är samiskan?)

I princip kan man uttrycka allt på varje språk, men med fler eller färre ord. I det australiska språket kaurna fanns innan det dog ut och senare återuppväcktes inte räkneord för naturliga tal större än fyra. Men man kunde ju säga att sju är lika med fyra plus tre. Det blir förstås litet opraktiskt när man kommer till större tal. Och romarna hade säkert stort besvär att räkna ut $\mathrm{XLIIII} - \mathrm{XXVI} = \mathrm{XVIII}$, d.v.s. $44 - 26 = 18$, för att nu inte tala om $\mathrm{XXVI} - \mathrm{XLIIII} = -\mathrm{XVIII}$, $26 - 44 = -18$, om de nu alls försökte ställa sig det problemet. Så även om XVIII och 18 är ekvivalenta representationer av ett visst tal, är det senare beteckningssättet mera praktiskt när det gäller det matematiska språkets operationella funktion (i motsats till dess representativa funktion).

Nils Jernsletten listar i en artikel[1] 176 samiska termer som rör snö och is. Många av dessa har långa definitioner på norska eller svenska. Ett enda exempel får illustrerar detta.

Det samiska ordet *doavˈke* betyder enligt Israel Ruong (1903–1986) ’ett tjockare snölager på marken som täcker tuvor och stenar så att man kan åka skidor och köra med akja eller kälke; snön når upp till vaden när man går i den; det är det första vinterflyttningsföret’.[2]

Norskan och svenskan saknar korta termer för denna typ av snö, men det innebär ju inte att man inte kan uttrycka fenomenet: den långa definitionen kan ju användas. Skillnaden är, förutom kortheten, att man får en tankemodell för fenomenet och om man dessutom har erfarenhet av denna typ av snö, så går tänkandet snabbare. Om två personer har denna erfarenhet, så går även kommunikationen mellan dem snabbare. Så är det i princip med alla begrepp som fått ett namn som man kan komma ihåg.

Kan man tänka utan språk? B. L. van der Waerden (1903–1996) hävdade det i en uppsats.[3] Men Adam Schaff (1913–2006) polemiserade häftigt mot denna uppfattning i en bok.[4] Frågan kan väl knappast få ett klart svar innan man klargjort vad som skall menas med orden *tänka* och *språk*. Själv har jag många gånger upplevt att jag haft en vag, ordlös uppfattning om matematiska förhållanden men ändå kunnat tänka konstruktivt på dem. Hur som helst är det väl klart

[1] Nils Jernsletten, Tradisjonell samisk fagterminologi. I: *Festskrift till Ørnulv Vorren*, sidorna 234 — 253. Tromsø: Tromsø Museum, Universitetet i Tromsø 1994.

[2] Israel Ruong, Jåhkåkaska sameby, sidan 78. I: *Svenska Landsmål och Svenskt Folkliv*, sidorna 41 — 158, 1964.

[3] B. L. van der Waerden, Denken ohne Sprache. *Acta Psychologica*, **10** (1954), nr. 1–2, 165–174.

[4] Adam Schaff, *Langage et connaissance.* Editions Anthropos, 1969.

att språket förenklar tänkandet. Det fixerar vissa begrepp. Och för kommunikation av idéer är väl ett språk nödvändigt.

Termer som övertalar

Det är en fördel om en term lätt ger tankeassociationer till begreppet, och helst då korrekta sådana. Det kan underlätta både inlärning och förståelse. Ibland kan associationen leda fel, men sådana fel kan vara en nyttig varning vid inlärandet. En sjöhäst är ingen häst utan en kantnålfisk. En bläckfisk är ingen fisk utan en mollusk. En talgoxe är ingen oxe utan en tätting.

De reella talen har fått sitt namn för att de i någon mening skulle vara verkliga, i motsats till de imaginära talen, som skulle vara inbillade. Det är också sant att de reella talen är grunden för många mycket framgångsrika matematiska modeller av verkligheten. Men de komplexa talen kan också vara grunden för matematiska modeller, liksom heltalen. Det faktum att det svenska adjektivet *reell* också betyder 'verklig', liksom att man använder samma adjektiv på engelska, *real*, för både 'verklig' och 'reell', är förledande, och man får inte ta det till intäkt för att tro att de reella talen är verkliga, eller verkligare än andra tal. Heltal och komplexa tal är alltså inte mindre verkliga eller har sämre kontakt med verkligheten än de reella talen.

Adjektivens roll

I det matematiska språket, liksom i allmänspråket, har adjektiven som attribut oftast en inskränkande roll. En likbent triangel är en speciell typ av triangel; en abelsk grupp är en grupp som uppfyller ett nytt villkor. Adjektiven avgränsar delmängder av den mängd av objekt man talar om. Men ibland har adjektiven en helt annan roll.

Ett exempel är *undre gränsvärde* och *övre gränsvärde*, som inte är gränsvärden, utan tvärtom syftar på ett allmännare begrepp, som kommer till användning när gränsvärdet inte finns. Här tjänar *undre* och *övre* till utvidgning i stället för till inskränkning. En liknande roll har prefixen *pseudo-*, *kvasi-*, *hypo-* som aktuell matematisk forskning använder i sin jakt efter nya ord. Pseudodifferentialoperatorer, kvasianalytiska funktioner och hypoelliptiska operatorer är alltså inte alltid differentialoperatorer, analytiska respektive elliptiska.

Ytterligare en annan och mycket specifikt matematisk roll hos attributet uppvisar termen *riktad sträcka*, som inte betecknar en speciell sträcka, utan en sträcka försedd med en extra struktur, i detta fall information om vilken av ändpunkterna som valts som utgångspunkt. Attributet *riktad* tjänar här snarast till att definiera en helt ny term, inte till att inskränka omfånget hos huvudtermen.

Idealet

Terminologins ideal är att varje begrepp betecknas av en och endast en term, och att omvänt varje term syftar på ett och endast ett begrepp. Detta har uttryckts av till exempel Eugen Wüster (1898–1977):

> Av den varaktiga språkliga tillordningen skall man i terminologin kräva att den, för att använda ett matematiskt uttryckssätt, är bijektiv. D.v.s. att i princip varje begrepp tillordnas blott en benämning, och omvänt.
>
> Detta är avsett för en bestämd tidpunkt, mestadels för nutiden, alltså i ett synkroniskt betraktande av språket.

> Det bör alltså varken förekomma flertydiga benämningar (homonymer eller polysemi) eller flera benämningar för ett begrepp (synonymer).[5]

Wüster ställer detta krav på terminologin, men framhåller genast att motsvarande krav ingalunda gäller för allmänspråket eller det litterära språket. Där är det inte ens önskvärt att ställa det.

Men så som språken ser ut, kan detta ideal inte uppnås ens för de matematiska termerna. Låt oss se på några exempel.

Synonymer: flera termer för ett begrepp

Kärt barn har många namn, säger ordspråket, och vissa begrepp har flera termer knutna till sig, termer som är synonymer i en viss mening, d.v.s. det är inte logiskt möjligt att definiera dem så att de svarar mot olika begrepp. Detta betyder dock inte att dessa termer skulle vara onödiga, ty de används i olika sammanhang, och underlättar förståelsen. Genom dessa olika sammanhang kan de få olika bibetydelser eller betydelsenyanser.

Ett viktigt exempel är orden *avbildning, funktion, transformation, operator, operation*, som alla är synonyma eller nästan synonyma. Logiskt sett finns det bakom dessa ord endast ett begrepp: avbildning. Men i en utsaga som *Derivatan av funktionens bild under transformationen är lika med transformen av* $-ix$ *gånger funktionen* är det uppenbart att det skulle bli en obegriplig mening om *funktion* och *transformation* ersattes med en enda term; samma kommentar angående *bild* och *transform.* Det är alltså uppenbart att vi behöver flera ord för att inte uttalandet skall smälta ihop till en obegriplighet. I boken har vi valt att ha två termposter, *avbildning* och *funktion*, på grund av att båda är så vanliga i matematiska texter, och att termen *funktion* har en särställning i skolans arbete.

Ett annat exempel är *kurva* och *linje*, där inget av orden kan rensas ut, eftersom båda förekommer i många sammanhang. Detsamma gäller till exempel paret *addera, summera.*

En särskild grupp av synonymer är de par där ett inhemskt ord uppträder tillsammans med ett låneord, i matematiken mest från grekiskan och latinet. Här kan orden ha olika stilvärden. Några exempel är: *differens, skillnad*; *gränsvärde, limes*; *limes superior, övre gränsvärde*; *limes inferior, undre gränsvärde*; *medelpunkt, centrum*; *omkrets, perimeter*; *lemma, hjälpsats*; *sats, teorem*; *korollarium, följdsats.* (Det första ordet i varje par är det som vi föredragit som huvudord; det andra är angivet som synonym. Någon kan vilja kasta om ordningen i vissa fall.) Många liknande exempel finns också utanför matematiken, och de utgör kanske ett problem vid inlärningen men inget stort begreppsmässigt problem.

När en synonym angivits, skall enligt terminologins regler endast huvudtermen användas i definitioner och förklaringar i samma verk. Så har vi förstås gjort, men det finns undantag. Vi har angivit *helt tal* som synonym till *heltal.* Men om man gör en uppräkning som *naturliga, hela, rationella, reella och komplexa tal*, så blir det störande att bryta den genom att sätta in *heltal.*

---

[5] Eugen Wüster, *Einführung in die Allgemeine Terminologielehre und Terminologische Lexikographie*, International Information Centre for Terminology (Infoterm), 1985. Citatet är från sidan 79 och återges här i min översättning.

Polysemi: en term för flera begrepp

Det finns åtskilliga termer som syftar på flera mer eller mindre besläktade begrepp: *bas, kropp, kvot, differens, kub, kvadrat, argument, lineär, algebra, topologi.* Av dessa är kanske *kvot* det vanskligaste i skolan. Men det går inte att komma ifrån det.

Termen *bas* finns i inte mindre än fyra termposter. Bas_1 syftar på basen i en triangel eller annan månghörning; bas_2 på basen b i en potens b^x; bas_3 på basen i ett positionssystem, alltså något mycket närbesläktat med bas_2, samt slutligen bas_4 på en bas i ett vektorrum. I alla dessa fall kan man säga att det finns en grundbetydelse, nämligen något som ligger i botten och som något annat bygger på. Denna grundbetydelse är förstås till hjälp när man lär sig, men att sammanföra alla fyra definitionerna i en skulle inte vara klargörande.

Termen *lineär* har två besläktade men olika betydelser. Ibland betyder ordet detsamma som *affin*, ibland inskränks det till en affin avbildning som är noll i origo. Det innebär att lineär$_1$ är ett specialfall av lineär$_2$ och att en avbildning är lineär$_2$ om den är summan av en konstant och en avbildning som är lineär$_1$.

En speciell form av polysemi uppvisar termerna *algebra* och *topologi.* De är namn på både ett visst slag av matematisk struktur och på den vetenskapsgren som behandlar dessa strukturer.

En typ av polysemi är mycket vanlig när det gäller namn på sträckor. Här använder man ofta sträckans namn för att beteckna dess längd. Höjd, diagonal, hypotenusa och katet är alla speciella sträckor och termerna betecknar även deras längd. Man säger att en rektangels area är basen gånger höjden. Om man är mycket noga, så skall man säga: rektangelområdets area är basens längd gånger höjdens längd, men det hörs ju att det är för tungt. Detta är en ganska ofarlig polysemi. Man kan här jämföra med vanliga uttryck som *Jag är en och åttiosex*, vilket ju syftar på att min kroppslängd är 1,86 meter – ingen missförstår detta.

Distinktioner

I flera fall gör man i matematiken distinktioner som inte alltid motsvaras av distinktioner i vardagsspråket. En grupp av sådana termer är *cirkel, cirkelskiva*; *sfär, klot*; *triangel, triangelområde*; *kvadrat, kvadratområde.* Här är begreppen klart olika: en cirkel är en kurva, medan en cirkelskiva är det område som omsluts av en cirkel. En cirkelskiva med radie r har arean πr^2, medan cirkeln med samma radie har arean noll. På motsvarande sätt skiljer man mellan en triangel, som har arean noll eftersom den består av tre linjestycken, och ett triangelområde, som är det område som omsluts av en triangel. Att begreppen är olika är inte diskutabelt, men det kan förstås diskuteras om det är nödvändigt med två termer. Man kan se utsagor som att triangelns area är basen gånger höjden genom två, och då förstår man att det handlar om ett triangelområde.

När det gäller termer som *kub, tetraeder* och *oktaeder* finns motsvarande begreppsmässiga distinktion mellan en union av plana ytor och den kropp de omsluter. Men här har man inte skapat termer motsvarande *sfär* och *klot.* Distinktionen mellan begreppen finns, men den motsvaras inte av termerna. Vi får leva med detta, och även acceptera att en triangel i vissa böcker kan ha en positiv area.

En speciell distinktion görs av fysikerna när det gäller fart och hastighet. Den är relativt sentida. Nationalencyklopedin talar ännu 1993 om ljushastigheten och ljusets utbredningshastighet. Men i grundskolans läroböcker fanns distinktionen redan 1989. Hastigheten är en vektor v, och farten är denna vektors längd $\|v\|$. När det gäller acceleration finns samma skillnad mellan begreppen, accelerationen a är en vektor, och $\|a\|$ dess längd. Men här har man inte hittat två olika ord. Så det har inte varit möjligt att vara konsekvent när det gäller vektorer som hastighet och acceleration. Vi följer här fysikerna.

Vi kan alltså konstatera att principen *ett begrepp – en term* är värdefull som ett riktmärke i det terminologiska arbetet, och likaså värdefull som pedagogisk ledstjärna, men att den har undantag åt båda hållen, undantag som vi får leva med och utan vilka språket skulle bli allför tungt eller alltför pedantiskt.

Korrekt, pedandiskt och slarvigt språkbruk

Det matematiska språkbruket är oftast mer precist än det vardagliga. Ett exempel på detta är disktinktionen mellan *om* och *om och endast om*, som är viktig i matematiken men inte alltid upprätthålles i vardagen. Men även det matematiska språket utsätts för förenklingar genom samma mekanismer som det vanliga. Vi har redan talat om att *höjd* kan syfta på såväl en sträcka som denna sträckas längd. En annan typ av förenkling uppträder när man säger *Linjerna* $2x + 3y = 11$ *och* $3x - y = -11$ *skär varandra i punkten* $(-2, 5)$. I undervisningen måste man ju understryka att en punkt i planet inte är detsamma som ett par av tal, utan att talen är punktens koordinater. Distinktionen är viktig när man håller på att lära sig. Så till en början bör man göra mer fullständiga uttalanden som *Linjerna med ekvationerna* $2x + 3y = 11$ *och* $3x - y = -11$ *skär varandra i punkten med koordinaterna* $(-2, 5)$. En ekvation är ju inte en linje och ett par av koordinater är inte en punkt. Men när man blivit van, så blir den typen av förenklingar oundvikliga och känns dessutom naturliga.

Beskrivning och normering

Det finns två poler mellan vilka alla ordböcker, grammatikor och termlistor rör sig: den deskriptiva (beskrivande) och den normerande (rekommenderande). Man vill å ena sidan beskriva språket så som det faktiskt används, men man behöver å andra sidan ge vägledning för ett gott språkbruk i utbildningen. Ingen av dessa viktiga ledstjärnor för terminologiskt arbete kan få ta över helt. Om man beskrev allt som faktiskt förekommer, skulle förvirring uppstå; en fullständigt deskriptiv ordbok skulle inte bara ta upp *dublett* som en vanligare stavning än *dubblett*, utan också lista *coh* och *jga* som alternativa stavningar av *och* och *jag*. Ett urval måste med nödvändighet ske, och varje urval innebär ett ställningstagande, en rekommendation, och därmed en normering. Men man kan man inte normera allt, ty då avlägsnar man sig snabbt från språkbruket och svävar långt utanför det språk som används. Det blir en balansgång, där den största respekt för det hävdvunna språkbruket måste samsas med välgrundad kritik och försiktig normering.

Terminologins arbetssätt

Inom terminologin bör man gå från det allmänna till det mer specifika: man definierar *verktyg* innan man går in på *hyvel* och *stämjärn*. Man tar hyperonymen före hyponymen.

Tillämpat på matematiken innebär detta att man bör utgå från de allmännaste talen, de komplexa, och sedan definiera ett reellt tal som ett komplext tal med imaginärdel noll, därefter ett rationellt tal som ett speciellt reellt tal (men hur?). Sedan kommer man till ett heltal och sist till ett naturligt tal. Men barnen lär sig talen i den motsatta ordningen, och detta måste vi följa i vår presentation. Så här har vi ett klart brott mot terminologins rekommenderade tillvägagångssätt. Inlärningsordningen måste här få ett visst genomslag. Och inom zoologin finns det liknande problem. Barnen lär sig inte djuren i ordningen eukaryota organismer, ryggradsdjur, däggdjur, rovdjur, hundar och katter, utan börjar snarare med vovvar och kissar.

Ett annat exempel är kvadraten som polygon. Här går det att följa den terminologiska ordningen, och det har vi också gjort: först definieras en polygon, sedan en månghörning som en speciell polygon, därefter en fyrhörning. Vi specialiserar ytterligare till parallelltrapets, sedan till parallellogram, rektangel och kvadrat. Det blir en lång kedja av successiva specialiseringar, som inte blir enklare av att vi också kan gå från parallellogram via romb till kvadrat. Men kanske någon invänder att små barn lär sig att rita kvadrater före polygoner. Här behövs kanske mera forskning. Nu är det i alla fall sagt hur vi resonerat.

***