UPPSALA UNIVERSITET — ÖVNINGSTENTA

Matematiska institutionen — **Komplex analys, allmän kurs**

Övningstentan kommer att gås igenom på föreläsningen onsdagen den 3 mars.

Tillåtna hjälpmedel: En valfri bok samt egna föreläsnings- och lektionsanteckningar.

1. Lös ekvationen $\tan z = -2 + \mathrm{i}$.

2. Sätt
$$f(z) = \frac{z^4 + 4\pi^2 z^2}{e^z + e^{-z} - 2}.$$
   (a) Bestäm funktionens singulära punkter samt ange deras typ.
   (b) Bestäm konvergensradien för funktionen f:s Taylorserie kring punkten $z = 0$.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$.

4. Visa att funktionen
$$u(x, y) = (3\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}) \cos x$$
är harmonisk och bestäm en analytisk funktion $f(z)$ så att
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy).$$

5. Bestäm funktionen f givet att f är analytisk i hela planet sånär som på en dubbelpol i $z = 1$, $f(0) = f'(0) = 1$,
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 5 \qquad \text{och} \qquad \int_C f(z)\, dz = 4\pi \mathrm{i},$$
där C är den positivt orienterade cirkeln $|z| = 2$.

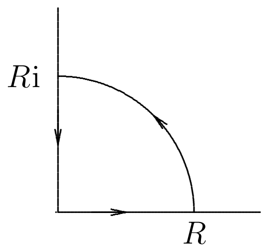
6. Funktionen f har en isolerad singularitet i 0. Vilken typ kan det vara och vilken typ kan det inte vara i följande tre fall:
   (a) $f(1/n) = (-1)^n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (b) $f(1/n) = n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (c) $f(1/n) = n(-1)^n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   Motivera dina svar med exempel respektive genom att ange varför en viss typ av singularitet inte kan föreligga.

7. Bevisa för $a > 0$ formeln $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x+a}\,dx = \int_0^\infty \frac{y\mathrm{e}^{-y}}{y^2+a^2}\,dy$ genom att studera integralen

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+a}\,dz,$$

där C_R är kurvan i figuren



Kurvan C_R

Motivera eventuella gränsövergångar noga. Ange också en motsvarande formel för $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a}\,dx$.

8. Bestäm antalet nollställen till funktionen

$$z^4 - z^2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

i första kvadranten.