

Lösningar till Komplex analys 2010-03-10

1. Ekvationen kan skrivas

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2i,$$

vilket efter förenkling blir

$$\begin{aligned} e^{2iz} - 4ie^{iz} + 1 &= 0 \\ e^{iz} &= 2i \pm \sqrt{-5} = (2 \pm \sqrt{5})i \end{aligned}$$

Notera att $2 - \sqrt{5} < 0$. Lösningarna blir därför

$$iz = \ln(\sqrt{5} + 2) + \frac{\pi}{2}i + 2n\pi i \quad \text{och} \quad iz = \ln(\sqrt{5} - 2) - \frac{\pi}{2}i + 2n\pi i,$$

vilket efter division med i ger

$$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \ln(\sqrt{5} + 2) \quad \text{och} \quad z = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \ln(\sqrt{5} - 2).$$

Eftersom $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 1$, är $\ln(\sqrt{5} - 2) = -\ln(\sqrt{5} + 2)$. Vi kan därför sammanfatta lösningarna ovan på formen (notera att n står för ett godtyckligt heltal):

$$z = \pm\left(\frac{\pi}{2} - i \ln(\sqrt{5} + 2)\right) + 2n\pi.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 - 4y & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy - 4x + 3 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -6x. \end{aligned}$$

Addition ger

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

så funktionen u är harmonisk i hela planet, vilket betyder att det finns en hel analytisk funktion $f = u + iv$. C-R:s ekvationer ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + 4x - 3 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \end{aligned}$$

Genom att integrera den sista av dessa ekvationer fås

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2y^2 + h(x)$$

för någon deriverbar funktion $h(x)$ med

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + h'(x)$$

som slutsats, och genom att jämföra med den första ekvationen ovan fås att $h'(x) = 4x - 3$, dvs. $h(x) = x^2 - 3x + c$, där c är en reell konstant.

Detta ger oss att

$$f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + 3y + i(3x^2y - y^3 - 2y^2 + 2x^2 - 3x + c)$$

och speciellt är således (sätt $y = 0!$)

$$f(x) = x^3 + i(2x^2 - 3x + c)$$

för alla reella x . Av entydighetsatsen följer därför att

$$f(z) = z^3 + i(2z^2 - 3z + c)$$

för alla komplexa tal z .

3. Enligt argumentprincipen och figurerna har funktionen $f(z)$

- Inget nollställe i $|z| \leq 1$.
- Ett nollställe i $|z| < 2$ (och inget på randen $|z| = 2$).
- Ett nollställe i halvcirkelområdet med radie 2.
- Tre nollställen i $|z| < 3$.
- Ett nollställe i halvcirkelområdet med radie 3.

Genom att sammanfatta ovanstående information fås:

Svar: Funktionen har ett nollställe i området $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Re} z > 0$, och två nollställen i området $2 < |z| < 3$, $\operatorname{Re} z < 0$.

4. Sätt $f(z) = \cos^2 \pi z$. Enligt Cauchys integralformel är

$$f''(1) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz,$$

varför

$$I = \int_C \frac{\cos^2 \pi z}{(z-1)^2} dz = \pi i f''(1).$$

Nu är $f'(z) = -2\pi \cos \pi z \sin \pi z = -\pi \sin 2\pi z$ och $f''(z) = -2\pi^2 \cos 2\pi z$, varför $f''(1) = -2\pi^2$. Integralens värde blir således

$$I = -2\pi^3 i.$$

5. a) Insättning av $w' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ och $w'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$ i differentialekvationen ger

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - a_n) z^n &= 0 \end{aligned}$$

med slutsatsen att

$$(n+1)^2 a_{n+1} = a_n \quad \text{för } n \geq 0.$$

Villkoret $f(0) = 1$ ger vidare begynnelsevillkoret $a_0 = 1$.

- b) Av rekursionsformeln $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} a_n$ och begynnelsevillkoret följer lätt att

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2}.$$

- c) För konvergensraden R gäller att

$$1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0,$$

dvs. $R = \infty$.

6. Substitutionen $z = e^{it}$ ger

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t + \cos t} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{z-1/z}{2i} + \frac{z+1/z}{2} \right)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{2dz}{(1+i)z^2 + 4iz + (i-1)} = \int_{|z|=1} \frac{1-i}{z^2 + (2+2i)z + i} dz. \end{aligned}$$

Nämnares nollställen är

$$z_{1,2} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} = (1+i) \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Av dessa ligger endast $z_1 = (1+i)(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)$ innanför integrationskurvan $|z| = 1$. Nollstället z_1 är en enkelpol till integranden och residyn i denna punkt är

$$\frac{1-i}{2z_1 + (2+2i)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-i}{\sqrt{2}}.$$

Enligt residysatsen är därför integralen

$$I = 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi.$$

7. Funktionerna $F(z) = f(z)/g(z)$ och $1/F(z) = g(z)/f(z)$ är på grund av förutsättningarna båda analytiska i ett område som innehåller cirkelskivan $|z| \leq 1$, och på randen $|z| = 1$ är såväl $|F(z)|$ som $|1/F(z)|$ lika med 1. Enligt maximumprincipen är därför $|F(z)| \leq 1$ och $|1/F(z)| \leq 1$ i hela cirkelskivan $|z| \leq 1$. Den sistnämnda olikheten innebär att $|F(z)| \geq 1$, så slutsatsen blir att $|F(z)| = 1$ i hela cirkelskivan. Men en analytisk funktion, vars belopp är konstant, är själv konstant. Därför är $F(z) = \alpha$ för någon konstant α (med belopp $|\alpha| = 1$). Följaktligen är $f(z) = \alpha g(z)$ i cirkelskivan och därmed på grund av entydighetssatsen också i hela domänen Ω .

8. Sätt $f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$.

På C_I är $z = x$, varför

$$\int_{C_I} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

På kurvan C_{III} är $z = x + i\pi$ och

$$f(z) = \frac{e^{ix-\pi}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}} = \frac{e^{-\pi}e^{ix}}{-e^x - e^{-x}} = -e^{-\pi} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}},$$

varför

$$\int_{C_{III}} f(z) dz = e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Genom att utnyttja att $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ samt triangelolikheten $|w_1 + w_2| \geq ||w_1| - |w_2||$ får man följande uppskattningen av $f(z)$ för $z = x + iy$ i övre halvplanet

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|e^z + e^{-z}|} \leq \frac{e^{-y}}{|e^x - e^{-x}|} \leq \frac{1}{|e^x - e^{-x}|}.$$

På kurvorna C_{II} och C_{IV} , där $z = \pm R + iy$ och $0 \leq y \leq \pi$, är därför

$$|f(z)| \leq \frac{1}{e^R - e^{-R}}.$$

Följaktligen gäller att

$$\left| \int_{C_{II}} f(z) dz \right| \leq \int_{C_{II}} |f(z)| |dz| \leq \frac{1}{e^R - e^{-R}} \times C_{II}\text{:s längd} = \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \rightarrow 0,$$

då $R \rightarrow \infty$. Exakt samma uppskattning och gränsvärde fås för integralen över C_{IV} .

Eftersom $e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \pi i + 2n\pi i \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}i + n\pi i$ har funktionen $f(z)$ en enkelpol i punkten $\frac{\pi}{2}i$ innanför kurvan C . Residyn i denna punkt är lika med

$$\frac{e^{-\pi/2}}{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}} = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}.$$

Residysatsen ger därför att

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \times \frac{e^{-\pi/2}}{2i} = \pi e^{-\pi/2}.$$

Genom att låta $R \rightarrow \infty$ fås därför

$$(1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \pi e^{-\pi/2},$$

dvs.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{2 \cosh \pi/2}.$$

Genom att ta realdelen av ovanstående fås också

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2 \cosh \pi/2}.$$