

Skrivtid: 14.00 – 19.00

Tillåtna hjälpmedel: Valfri bok samt egna föreläsnings- och lektionsanteckningar.

Anvisningar: Efter varje uppgift anges den maximala poängen för densamma. För full poäng krävs att lösningen är *nöjaktigt motiverad*.

Betygsgränser: Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng.

1. Bestäm på formen $z = a + bi$ alla lösningar till ekvationen

$$\cos z = 2i.$$

2. Bestäm alla analytiska funktioner $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ med realdel

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + 3y.$$

(För full poäng skall $f(z)$ skrivas som en funktion av z och inte av x och y .)

3. Med hjälp av ett grafritande program har man för funktionen

$$f(z) = e^{-z} + z^3 + 5z - 7$$

ritat bildkurvorna $f(\Gamma_i)$ för följande fem slutna kurvor Γ_i :

Γ_1 : Enhetscirkeln $|z| = 1$.

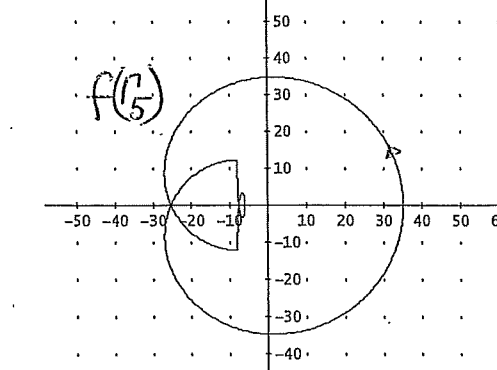
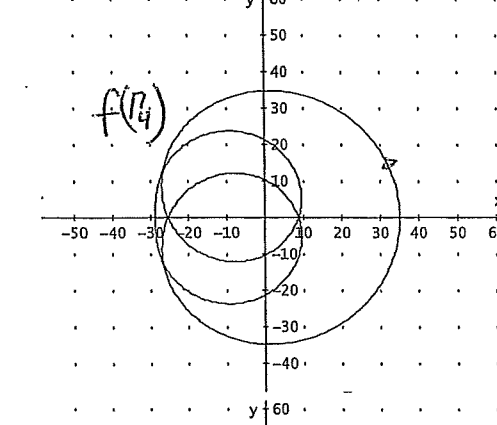
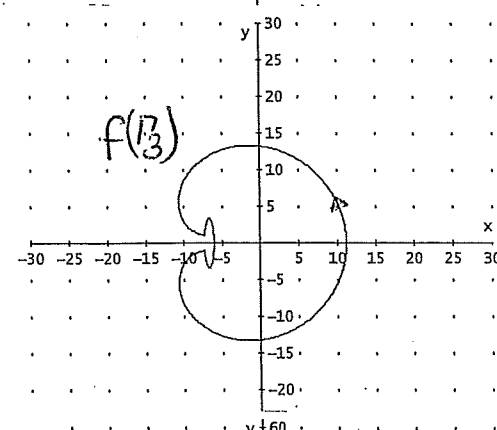
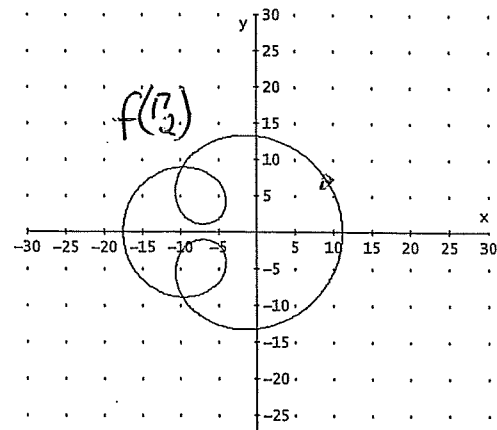
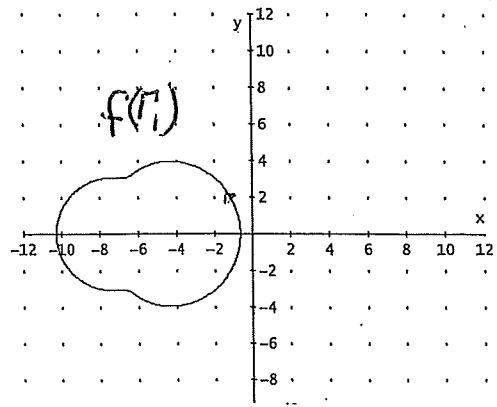
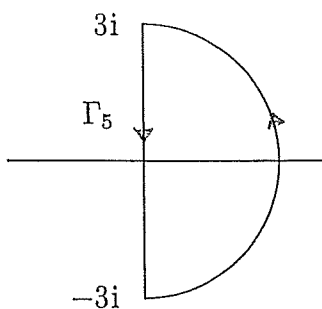
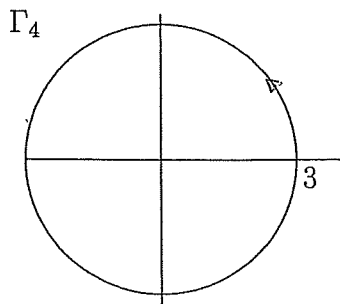
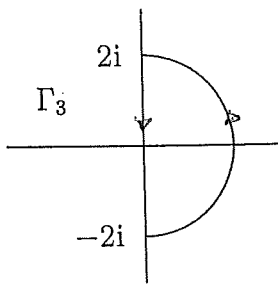
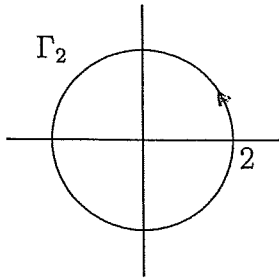
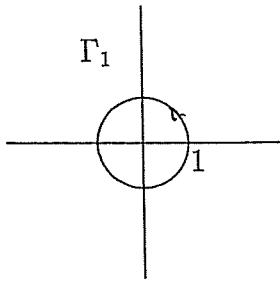
Γ_2 : Cirkeln $|z| = 2$.

Γ_3 : Halvcirkeln $z = 2e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ följd av sträckan från $2i$ till $-2i$ på imaginära axeln.

Γ_4 : Cirkeln $|z| = 3$.

Γ_5 : Halvcirkeln $z = 3e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ följd av sträckan från $3i$ till $-3i$ på imaginära axeln.

De fem bildkurvorna visas på nästa sida. Bestäm med hjälp av dessa antalet nollställen till funktionen f innanför cirkeln $|z| = 3$ samt ge så precis information som möjligt om var dessa nollställen ligger.



4. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{\cos^2 \pi z}{(z-1)^3} dz$$

där C är cirkeln $|z| = 2$ genomlöst ett varv i positiv led.

5. Funktionen $w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ satisfierar differentialekvationen

$$zw'' + w' - w = 0$$

och uppfyller begynnelsevillkoret $f(0) = 1$.

- Bestäm en rekursionsformel för koefficienterna a_n .
- Använd rekursionsformeln för att bestämma en explicit formel för a_n .
- Bestäm konvergensradien i f :s potensseriutveckling.

6. Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t + \cos t}.$$

7. Funktionerna f och g är analytiska i en domän Ω som innehåller den slutna cirkelskivan $|z| \leq 1$ och saknar nollställen i skivan. Vidare är

$$|f(z)| = |g(z)|$$

för alla z på cirkeln $|z| = 1$. Visa att det finns en konstant α så att

$$f(z) = \alpha g(z)$$

för alla z i Ω .

8. Beräkna integralen

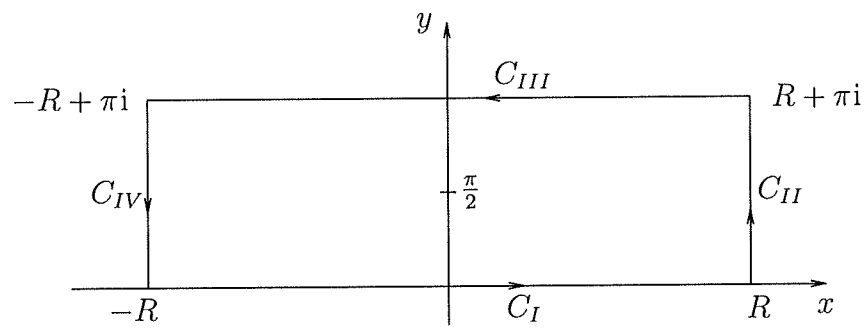
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx$$

genom att integrera funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

längs den kontur $C = C_I + C_{II} + C_{III} + C_{IV}$ som visas i figuren på nästa sida och låta $R \rightarrow \infty$.

[Motivera nogga vad som händer med integralerna över C_{II} och C_{IV} då $R \rightarrow \infty$.]



Figur 1: Figur till problem nr 8