

Lösningar till Övningstenta 2010

1. Ekvationen kan skrivas

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = -2 + i,$$

vilket efter förenkling blir

$$(2 + 2i)e^{iz} = -2ie^{-iz}$$

$$e^{2iz} = -\frac{1+i}{2}$$

$$2iz = \log\left(-\frac{1+i}{2}\right) = \ln\left|-\frac{1+i}{2}\right| + \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)i = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)i$$

$$z = \frac{5\pi}{8} + n\pi + \frac{i}{4} \ln 2$$

2. a) Täljaren $z^4 + 4\pi z^2 = z^2(z^2 + 4\pi^2)$ har ett dubbelt nollställe i 0 och enkla nollställena i $\pm 2\pi i$. Nämnarens nollställena bestäms:

$$e^z + e^{-z} - 2 = e^{-z}(e^{2z} + 1 - 2e^z) = e^{-z}(e^z - 1)^2,$$

och $e^z - 1 = 0$ för $z = 2n\pi i$. Det följer att nämnaren har dubbla nollställena i $2n\pi i$.

Funktionens singulära punkter är därför punkterna $2n\pi i$, $n \in \mathbf{Z}$.

0 är en hävbar singularitet, eftersom 0 är ett nollställe av multiplicitet 2 till såväl täljare som nämnare.

$\pm 2\pi i$ är poler av ordning 1, eftersom de är dubbla nollställena till nämnaren och enkla nollställena till täljaren.

Övriga punkter $2n\pi i$ är poler av ordning 2.

b) Med rätt definition av $f(0)$ är funktionen analytisk i skivan $|z| < 2\pi$ och har två poler på randen. Taylorseriens konvergensradie är därför lika med 2π .

3. Funktionen $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ är holomorf i $\mathbf{C} \setminus 0$. Insättning i Taylorutvecklingen för sin ger

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} - \dots$$

Detta innebär att $\text{Res}_{z=0} f(z) = -1/6$. Det följer därför av residysatsen att integralens värde är

$$2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

2

4.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -(3e^{-y} - e^y) \sin x & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -(3e^{-y} - e^y) \cos x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (-3e^{-y} - e^y) \cos x & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (3e^{-y} - e^y) \cos x\end{aligned}$$

Addition ger

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

så funktionen u är harmonisk.

Sätt nu $f = u + iv$. Funktionen f är holomorf om och endast om C-R:s ekvationer är uppfyllda, vilket innebär

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = (3e^{-y} + e^y) \cos x \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -(3e^{-y} - e^y) \sin x\end{aligned}$$

Genom att integrera den första av dessa ekvationer fås

$$v(x, y) = (3e^{-y} + e^y) \sin x + h(y)$$

för någon deriverbar funktion $h(y)$ med

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (-3e^{-y} + e^y) \sin x + h'(y)$$

som slutsats, och genom att jämföra med den andra ekvationen ovan fås att $h'(y) = 0$, dvs. $h(y) = c$, en reell konstant.

Detta ger oss att

$$f(z) = f(x + iy) = (3e^{-y} - e^y) \cos x + i(3e^{-y} + e^y) \sin x + ic$$

och speciellt är således

$$f(x) = 2 \cos x + 4i \sin x + ic$$

för alla reella x . Av entydighetssatsen följer därför att

$$f(z) = 2 \cos z + 4i \sin z + ic$$

för alla komplexa tal z .

5. Av förutsättningarna följer att

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + g(z),$$

där funktionen $g(z)$ är holomorf i hela planet. Vidare är

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{f(z)}{z} - \frac{A}{z(z-1)^2} - \frac{B}{z(z-1)} \right) = 5,$$

så det följer att $|f(z)| \leq 6|z|$ för alla tillräckligt stora $|z|$. Enligt (en generalisering av) Liouvilles sats betyder detta att $g(z)$ är ett första gradspolynom, och eftersom $g(z)/z \rightarrow 5$ måste $g(z)$ ha formen $g(z) = 5z + C$ för någon konstant C . Vi har alltså

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + 5z + C,$$

där koefficienten B är residyn till f i punkten $z = 1$.

Av residysatsen följer därför att

$$4\pi i = \int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot B,$$

med $B = 2$ som slutsats. Slutligen ger

$$\begin{aligned} f(0) &= A - B + C = 1 \\ f'(0) &= 2A - B + 5 = 1 \end{aligned}$$

att $A = \frac{1}{2}(B - 4) = -1$ och $C = 1 - A + B = 4$.

Funktionen är således $f(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 5z + 4$.

6. i. Uppenbarligen existerar inte $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ då $z \rightarrow 0$, och $|f(z)|$ går inte mot ∞ . Singulariteten kan därför inte vara hävbar och inte vara en pol, utan måste vara *väsentlig*. Ett exempel på en funktion med dessa egenskaper är $f(z) = \cos(\pi/z)$.
- ii. Singulariteten kan inte vara hävbar, eftersom $f(z)$ saknar ändligt gränsvärde då $z \rightarrow 0$. Att den kan vara en *pol* visas av exemplet $f(z) = 1/z$ och att den kan vara *väsentlig* visas av exemplet $f(z) = z^{-1} \cos^2(\pi/z)$.
- iii. Betrakta funktionen $g(z) = zf(z)$; för den gäller att $g(1/n) = (-1)^n$, så enligt i) måste $g(z)$ ha en väsentlig singularitet i 0. Men då har uppenbarligen också $f(z)$ en *väsentlig* singularitet. Ett exempel på en funktion med angivna egenskaper är $f(z) = z^{-1} \cos(\pi/z)$.

7. Eftersom integranden är holomorf på och innanför kurvan C_R ger Cauchys sats att

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z+a} dz = 0.$$

Genom att dela upp kurvan C_R i sina tre naturliga delar och välja parametriseringarna $z = x$ resp. $z = iy$ på reella axeln resp. imaginära axeln får vi därför

$$\int_0^R \frac{e^{ix}}{x+a} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+a} dz - \int_0^R \frac{ie^{-y}}{iy+a} dy = 0$$

för alla $R > 0$, där Γ_R betecknar kvartscirkeln med radie R . Den mellersta integralen går enligt ett välbekant lemma (Jordans lemma) mot 0 då $R \rightarrow \infty$ eftersom nämnarens grad – täljarens grad ≥ 1 . Det följer därför genom gränsövergång i likheten ovan att

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x+a} dx = \int_0^\infty \frac{ie^{-y}}{iy+a} dy = \int_0^\infty \frac{ie^{-y}(-iy+a)}{(iy+a)(-iy+a)} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}(y+ia)}{y^2+a^2} dy$$

Genom att ta realdelarna resp. imaginärdelarna av de båda ytterleden får vi slutligen formlerna:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos x}{x+a} dx &= \int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{y^2+a^2} dy, \\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a} dx &= \int_0^\infty \frac{ae^{-y}}{y^2+a^2} dy. \end{aligned}$$

8. Sätt $f(z) = z^4 - z^2 + ie^{iz}$, och betrakta kurvan C_R som består av intervallet $I_R: z = x, 0 \leq x \leq R$ på positiva reella axeln, kvartscirkeln $\Gamma_R: z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi/2$, samt intervallet $J_R: z = iy, R \geq y \geq 0$ på ”positiva” imaginära axeln.

För $z = x \in I_R$ är $f(x) = x^4 - x^2 - \sin x + i \cos x$. Vi har $f(0) = i$ och i intervallet $0 \leq x < \pi/2$ är imaginärdelen av $f(x) > 0$, vilket betyder att motsvarande punkt $w = f(z)$ ligger i övre w -halvplanet. För $x \geq \pi/2$ är

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &= x^2(x^2 - 1) - \sin x \geq x^2(x^2 - 1) - 1 \\ &\geq (\pi/2)^2((\pi/2)^2 - 1) - 1 \geq 1.5^2(1.5^2 - 1) - 1 > 0, \end{aligned}$$

så från och med $x = \pi/2$ ligger säkert motsvarande punkter $w = f(z)$ i högra w -halvplanet.

På kvartscirkeln Γ_R är $|ie^{iz}| = e^{-y} \leq 1$, varför

$$f(z) = z^4 \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{ie^{iz}}{z^4} \right) = z^4 \left(1 + O(1/z^2) \right) = R^4 e^{i4t} (1 + O(1/R^2)).$$

Då z beskriver kvartscirkeln beskriver därför $w = f(z)$ så gott som ett helt varv runt origo.

För $z = iy \in J_R$ är $w = f(iy) = y^4 + y^2 + ie^{-y}$ och imaginärdelen e^{-y} är > 0 på hela intervallet. Detta betyder att bildkurvan $f(J_R)$ ligger i övre w -halvplanet.

Sammantaget får vi en bildkurva med följande utseende, som beskriver exakt ett varv runt origo. Detta betyder att funktionen har **ett** nollställe i första kvadranten.

