Linjär algebra

Lars-Åke Lindahl

2009

Fjärde upplagan

Innehåll

Förord

Denna text innehåller material för en kurs i linjär algebra om ca 10 högskolepoäng. Av naturliga skäl ligger tonvikten på teorin för ändligdimensionella rum, men definitioner och bevis är i största möjliga utsträckning gjorda så att de skall fungera i det oändligdimensionella fallet; det är sällan som detta medför några komplikationer och därigenom förbereds läsaren för fortsatta studier av algebra eller funktionalanalys.

Framställningen är fullständig såtillvida att den startar från grunden och innehåller bevis för samtliga resultat som presenteras. Den börjar med en genomgång av linjära ekvationssystem och matriser; den som behärskar detta kan gå direkt på kapitel 3.

De förkunskaper som krävs är första terminens inledande kurs i grundläggande algebra. Några exempel förutsätter också kunskaper i analys från första terminens analyskurs. Det är naturligtvis en fördel men absolut inte nödvändigt att ha studerat konkreta vektorer i planet och rummet.

Materialet till den här boken växte fram under läsåret 1999/2000, då en preliminär version användes på den s. k. fördjupningskursen i matematik. Ett stort tack till studenterna Samuel Envall, Jonas Lith, Erik Melin, Anna Neuman och Alper Yilmaz, som förutom att läsa texten också tvingades undervisa på stora delar av densamma och därigenom direkt eller indirekt inspirerade mig till att göra en del omfattande förändringar.

Den första upplagan blev föremål för en ordentlig revision i samband med att jag gav kursen på nytt läsåret 2002/2003 – den största förändringen var tillkomsten av ett rejält avsnitt om alternerande former. Ytterligare tillägg, rättelser och omredigeringar har sedan gjorts varje gång jag givit kursen så att det här nu är den fjärde och förhoppningsvis sista versionen av materialet.

Uppsala den 31 mars 2009
Lars-Åke Lindahl

Kapitel 1

Linjära ekvationssystem

Det här kapitlet handlar huvudsakligen om hur man löser linjära ekvationssystem med hjälp av elimination. Förutom algoritmer för att lösa linjära ekvationssystem ges också kriterier för lösbarhet och entydig lösbarhet. För att underlätta beskrivningen av linjära system införs matrisbegreppet.

1.1 Inledning

Man löser linjära ekvationssystem genom att successivt eliminera en variabel i taget. Vi illustrerar först principen i ett exempel.

Exempel 1.1.1 För att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

börjar vi med att lösa ut t. ex. x ur den första ekvationen, vilket ger

$$x = 1 + y - z.$$

Genom att sätta in detta uttryck för x i systemets övriga två ekvationer eliminerar vi variabeln x och erhåller systemet

$$\begin{cases} 2(1 + y - z) - y + 4z = 4 \\ (1 + y - z) - 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

vilket förenklas till

$$\begin{cases} y + 2z = 2 \\ -y + z = -1. \end{cases}$$

Detta är ett ekvationssystem i variablerna y och z. Vi använder nu den första ekvationen för att lösa ut y, vilket ger

$$y = 2 - 2z,$$

och sätter in detta i den andra ekvationen. Vi får då ekvationen

$$-(2 - 2z) + z = -1$$

med lösningen

$$z = \tfrac{1}{3}.$$

Genom att sätta $z = \frac{1}{3}$ i uttrycket för y får vi

$$y = 2 - 2 \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}.$$

Insättning i uttrycket för x ger slutligen

$$x = 1 + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3} = 2.$$

Ekvationssystemet har således lösningen $(x, y, z) = (2, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$. □

Lösningsmetoden i exemplet kan sammanfattas på följande sätt: Använd en av systemets ekvationer för att eliminera en av variablerna ur de övriga ekvationerna. Dessa övriga ekvationer kommer då att utgöra ett system som innehåller en ekvation mindre och färre variabler. Upprepa proceduren till dess att endast en ekvation återstår. Variablernas värden kan nu bestämmas successivt.

Genom att organisera räkningarna på ett systematiskt sätt får man en algoritm som brukar kallas *Gausselimination*, och som vi skall studera i detalj i det här kapitlet.

Under eliminationsprocessen utnyttjar man inte några andra räkneoperationer än de fyra räknesätten, dvs. addition, subtraktion, multiplikation och division. Att lösningen i exemplet ovan består av tre rationella tal är därför ingen tillfällighet utan en följd av att systemets koefficienter är hela tal.

I vårt nästa exempel är ekvationssystemets koefficienter inte längre tal utan funktioner.

Exempel 1.1.2 Betrakta systemet[1]

$$\begin{cases} (s^2+1)X(s) + 2sY(s) = \dfrac{s+2}{s} \\ sX(s) + (s^2+1)Y(s) = \dfrac{s^4+s^3+2s^2+1}{s^2(s^2+1)} \end{cases},$$

[1]System av denna typ uppkommer när man löser system av linjära differentialekvationer med hjälp av Laplacetransformering; se t. ex. kursen i fourieranalys eller transformmetoder.

där de obekanta $X(s)$ och $Y(s)$ är funktioner och koefficienterna s^2+1, $2s$, $(s+2)/s$, osv. är rationella funktioner. Eftersom man kan addera, subtrahera, multiplicera och dividera rationella funktioner precis på samma sätt som rationella tal, kan systemet lösas med metoden i exempel 1.1.1. Vi löser först ut $X(s)$ ur den första ekvationen, vilket ger

$$X(s) = \frac{s+2}{s(s^2+1)} - \frac{2s}{s^2+1}Y(s),$$

och sätter sedan in detta i den andra ekvationen, vilket resulterar i ekvationen

$$\frac{s+2}{s^2+1} - \frac{2s^2}{s^2+1}Y(s) + (s^2+1)Y(s) = \frac{s^4+s^3+2s^2+1}{s^2(s^2+1)}.$$

Efter förenkling fås $Y(s) = 1/s^2$, och insättning av $Y(s)$ i uttrycket för $X(s)$ ger slutligen

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Ekvationssystemets lösning består alltså av ett par av rationella funktioner.

$\square$

Kroppar

Exempel 1.1.2 lär oss att koefficienterna i ett linjärt ekvationssystem inte nödvändigtvis behöver vara tal. Förutsatt att man kan utföra de fyra räknesätten på koefficienterna, kan man lösa systemet med elimination och lösningen kommer att bestå av summor, differenser, produkter och kvoter av de ursprungliga koefficienterna.

En mängd $\mathbf{K}$ kallas en *kropp* om de fyra räknesätten är definierade för mängdens element på ett sådant sätt att mängden blir *sluten* under räkneoperationerna och de ”vanliga” räknereglerna gäller. Slutenheten innebär att *summan* $a+b$, *differensen* $a-b$, *produkten* ab och, förutsatt att $b \neq 0$, *kvoten* a/b av två element a, b i $\mathbf{K}$ också tillhör $\mathbf{K}$. Elementen i kroppen kallas ibland för *skalärer*.

Exempel på kroppar är de rationella talen $\mathbf{Q}$, de reella talen $\mathbf{R}$, de komplexa talen $\mathbf{C}$ och mängden av alla rationella funktioner. Däremot är heltalen $\mathbf{Z}$ inte någon kropp, ty $\mathbf{Z}$ är inte sluten under division ($2/3 \notin \mathbf{Z}$).

Beskrivningen ovan av begreppet kropp är obestridligen något vag, eftersom den inte preciserar vad som menas med ”vanliga” räkneregler. De kroppar som vi huvudsakligen skall syssla med är emellertid $\mathbf{R}$ och $\mathbf{C}$, och dem är ju läsaren väl förtrogen med. Motivet för att blanda in godtyckliga kroppar är att teorin blir mer allmängiltig utan att för den skull försvåras.

Den som så önskar kan emellertid utan att missa något väsentligt läsa **K** som **R** eller **C** varhelst beteckningen förekommer samt hoppa över de fåtal exempel och övningar som använder mer exotiska kroppar. Den som nöjer sig med ovanstående förklaring av begreppet kropp kan vidare hoppa över resten av det här delavsnittet och återuppta läsningen efter övning 1.2. För övriga följer nu en precis definition och några exempel och övningar.

Definition 1.1.1 En mängd **K** kallas en *kropp* om

(α) summan $a+b$ och produkten ab är definierade och tillhör **K** för alla a och b i **K**;

(β) **K** innehåller två speciella element 0 och 1;

(γ) till varje a i **K** hör ett unikt element $-a$ (*minus* a) i **K** och, om $a \neq 0$, ett unikt element a^{-1} (a-*invers*) i **K**;

(δ) följande räkneregler är uppfyllda

(i)	$a+b=b+a$	*(kommutativa lagen för addition)*
(ii)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	*(associativa lagen för addition)*
(iii)	$a+0=a$	
(iv)	$a+(-a)=0$	
(v)	$ab=ba$	*(kommutativa lagen för multiplikation)*
(vi)	$a(bc)=(ab)c$	*(associativa lagen för multiplikation)*
(vii)	$a\cdot 1=a$	
(viii)	$aa^{-1}=1$	
(ix)	$a(b+c)=ab+ac$	*(distributiva lagen).*

Subtraktion och division i **K** definieras av formlerna

$$\begin{aligned} b-a &= b+(-a), \\ b/a &= ba^{-1} \qquad \text{för } a \neq 0. \end{aligned}$$

Exempel 1.1.3 Mängden av alla tal på formen $a+b\sqrt{2}$, där $a,\, b \in \mathbf{Q}$, är en kropp, som brukar betecknas $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Det är självklart att $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ är sluten under addition och att varje element har ett minuselement. Slutenheten under multiplikation och existensen av multiplikativa inverser följer av kalkylerna

$$\begin{aligned} (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) &= ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2} \\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} &= \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\,. \end{aligned}$$

□

Exempel 1.1.4 Låt $\mathbf{Z}_5$ vara mängden $\{0,1,2,3,4\}$ med addition och multiplikation definierade såsom heltalsaddition och heltalsmultiplikation modulo 5. Detta innebär att additions- och multiplikationstabellerna för $\mathbf{Z}_5$ ser ut så här:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbf{Z}_5$ är en kropp. Av multiplikationstabellen framgår nämligen att varje nollskilt element har en multiplikativ invers som uppfyller räkneregel (viii), och de övriga räknereglerna för en kropp följer lätt av det faktum att de gäller för $\mathbf{Z}$. $\square$

Exempel 1.1.5 För godtyckliga heltal $n \geq 2$ definieras $\mathbf{Z}_n$ analogt som mängden $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ med addition och multiplikation modulo n. Från $\mathbf{Z}$ ärver $\mathbf{Z}_n$ samtliga egenskaper i kroppsdefinitionen utom existensen av en multiplikativ invers till varje element.

Om n är ett sammansatt heltal och $n = n_1 n_2$ med $n_1, n_2 \geq 2$, så är $n_1 n_2 = 0$ i $\mathbf{Z}_n$. Det följer att elementet n_1 inte kan ha någon multiplikativ invers. $\mathbf{Z}_n$ är således inte en kropp i det fallet.

Om däremot p är ett primtal, så har varje nollskilt $m \in \mathbf{Z}_p$ en multiplikativ invers. Detta följer genom att betrakta den diofantiska ekvationen $px + my = 1$, som för varje heltal m som inte är delbart med p har heltalslösningar x, y med $1 \leq y \leq p-1$, vilket betyder att $my = 1$ i $\mathbf{Z}_p$. $\mathbf{Z}_p$ är således en kropp.

Sammanfattningsvis är alltså $\mathbf{Z}_n$ en kropp om och endast om n är ett primtal. $\square$

Övningar

1.1 Visa att $\mathbf{Q}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ är en kropp.

1.2 Sätt upp additions- och multiplikationstabellerna för $\mathbf{Z}_2$ och $\mathbf{Z}_3$ och verifiera att de är kroppar.

Linjära ekvationssystem

I våra inledande exempel har vi förutsatt att läsaren vet vad som menas med ett linjärt ekvationssystem och med en lösning till ett sådant. För säkerhets skull ger vi nu ett antal formella definitioner.

Definition 1.1.2 Med en *linjär* ekvation i n *variabler* eller *obekanta* x_1, x_2, ..., x_n med koefficienter i kroppen $\mathbf{K}$ menas en ekvation på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

där *koefficienterna* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ och b är givna element i $\mathbf{K}$. Om $b = 0$ kallas ekvationen *homogen.* En n-tipel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ av element i $\mathbf{K}$ kallas en *lösning* till ekvationen om $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$.

Ett *linjärt ekvationssystem* är en uppsättning av ändligt många linjära ekvationer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Systemet kallas *homogent* om alla ingående ekvationer är homogena, dvs. om alla högerledskoefficienter b_i är lika med noll.

Med en lösning till systemet menas en n-tipel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ som samtidigt löser alla ingående ekvationer. Ett system kallas lösbart eller *konsistent* om det har minst en lösning och olösbart eller *inkonsistent* om det saknar lösning.

Att lösa ett linjärt ekvationssystem innebär att beskriva mängden av alla lösningar på ett explicit sätt. Vi skall ägna avsnitten 1.3 och 1.4 åt hur man löser ett godtyckligt linjärt ekvationssystem.

Exempel 1.1.6

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x_1 + 2x_2 - 2\mathrm{i}x_3 = 4 \\ \mathrm{i}x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 + (1-\mathrm{i})x_3 = 2 + 2\mathrm{i} \end{cases}$$

är ett linjärt ekvationssystem i tre obekanta med koefficienter i $\mathbf{C}$. Man verifierar lätt att $(1 - \mathrm{i}, 0, \mathrm{i})$ är en lösning. Lösningen är inte unik, ty $(0, 2, 0)$ är också en lösning. Ekvationssystemet har i själva verket oändligt många lösningar. □

Exempel 1.1.7 Systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

är ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta med koefficienter i $\mathbf{R}$ (eller i $\mathbf{Q}$ om vi så vill). Systemet saknar lösning, ty om $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ löser den första ekvationen, så är $2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 3$, dvs. det finns ingen uppsättning tal som samtidigt löser båda ekvationerna. □

1.2 Matriser

I ett linjärt ekvationssystem spelar namnen på de obekanta inte någon roll – om vi kallar dem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eller $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är likgiltigt. De obekantas primära funktion är att vara "platshållare". Om vi kan hålla reda på vilken koefficient som hör till vilken obekant och vilken ekvation, klarar vi oss utan att ge de obekanta namn. Detta kan vi göra genom att skriva upp ekvationssystemets koefficienter på ett systematiskt sätt.

Således kan vi sammanfatta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

i koefficientschemat

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

där den första raden i schemat svarar mot den första ekvationen, den andra raden svarar mot den andra ekvationen och den tredje raden mot den tredje ekvationen. Rektangulära scheman av ovanstående slag kallas matriser.

Definition 1.2.1 En *matris* av *typ* $m \times n$ är en uppsättning av mn stycken *element* a_{ij} arrangerade i m stycken *rader* och n stycken *kolonner* (eller *kolumner*) på följande vis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Som synes anger indexen ij att matriselementet a_{ij} befinner sig i rad nr i och kolonn nr j. Denna position kallas för *plats* (i, j) i matrisen.

Att skriva ut en allmän matris tar mycket plats. Om matrisens typ framgår av sammanhanget eller är oväsentlig för resonemanget, använder vi därför ibland det kompakta skrivsättet $[a_{ij}]$ för ovanstående matris.

Vi kommer i det här kapitlet i allmänhet att beteckna matriser med stora bokstäver A, B, C, …och deras element på plats (i, j) med motsvarande små bokstäver a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, … .

Om en matris har lika många rader som kolonner, kallas den *kvadratisk.* Antalet rader i en kvadratisk matris kallas matrisens *ordning.*

Definition 1.2.2 Två matriser A och B är *lika*, vilket förstås skrives $A = B$, om de är av samma typ och elementen på motsvarande platser är lika, dvs. om $a_{ij} = b_{ij}$ för alla index i, j.

Exempel 1.2.1

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \iff x = 4.$$

□

Definition 1.2.3 En matris med enbart en rad kallas en *radmatris*, och en matris med enbart en kolonn kallas en *kolonnmatris*.

Rad- och kolonnmatriser betecknar vi oftast med små bokstäver. För sådana matriser är det förstås onödigt att indicera elementen med dubbla index, utan vi skriver i allmänhet

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Ibland visar det sig praktiskt att uppfatta en matris såsom sammansatt av delmatriser. En $m \times n$-matris är på ett naturligt sätt sammansatt av m stycken radmatriser eller av n stycken kolonnmatriser, men även andra uppdelningar eller *partitioneringar* är ibland användbara.

Exempel 1.2.2 Matrisen

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

är partitionerad i sex delmatriser av det horisontella och de båda vertikala strecken. □

Om vi har $p \cdot q$ stycken matriser A_{ij} av typ $m_i \times n_j$, så kan vi bilda en ny matris A av typ $(m_1 + m_2 + \dots + m_p) \times (n_1 + n_2 + \dots + n_q)$ genom att sätta samman matriserna på följande sätt

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix}.$$

Om omvänt A är en matris av typ $m \times n$ och talen m_i och n_j uppfyller sambanden $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = m$ och $n_1 + n_2 + \cdots + n_q = n$, så kan vi på ett naturligt sätt partitionera A i $p \cdot q$ delmatriser A_{ij} av typ $m_i \times n_j$ så att likheten ovan gäller.

Definition 1.2.4 En matris, vars samtliga element är noll, kallas en *nollmatris.*

Nollmatriser kommer att betecknas med symbolen 0, dvs. vi använder samma symbol för matrisen noll och elementet noll. (För varje typ finns det förstås en nollmatris. Typen kommer alltid att framgå av sammanhanget, så därför kan vi utan risk för förväxling använda samma beteckning 0 för alla nollmatriser.)

Definition 1.2.5 En matris T kallas en *trappmatris* om följande två villkor är uppfyllda:

(i) Alla rader som enbart består av nollor − om det finns några sådana rader − förekommer längst ned i matrisen.

(ii) För matrisens icke-nollrader gäller att det (från vänster räknat) första nollskilda elementet i rad nr i tillhör en kolumn som ligger till vänster om det första nollskilda elementet i rad nr $i + 1$.

Det första nollskilda elementet i en rad kallas radens *ledande element.* I varje kolonn finns det per definition högst ett ledande element. De kolonner som innehåller ledande element, kallas trappmatrisens *ledande kolonner.*

Exempel 1.2.3 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är en trappmatris, ty det första nollskilda elementet i den första raden ligger till vänster om det första nollskilda elementet i den andra raden, och detta element ligger i sin tur till vänster om det första nollskilda elementet i den tredje raden, som i sin tur ligger till vänster om det första nollskilda elementet i den fjärde raden. Slutligen består den femte och sista raden enbart av nollor. De ledande elementen är understrukna, och de ledande kolonnerna är kolonnerna nr 2, 4, 5 och 7. □

Om man stryker den första raden i en trappmatris och alla kolonner upp till och med den första ledande kolonnen, så återstår en ny trappmatris av mindre storlek. Detta ger oss följande rekursiva karakterisering av trappmatriser och ledande element.

Påstående 1.2.6 (i) *Varje radmatris* $a = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n]$ *är en trappmatris. Om* $a \neq 0$*, så är det nollskilda element* a_i *som har minst index* i*, trappmatrisens ledande element. Om* $a = 0$*, saknas ledande element.*

(ii) *Matrisen*

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & T' \end{bmatrix},$$

där T' *är en trappmatris, och* a *och* b *är radmatriser, är en trappmatris om*

(a) $a \neq 0$*, i vilket fall* T*:s ledande element består av de ledande elementen i* T' *och det ledande elementet i* a*;*

(b) $a = 0$ *och* $T' = 0$*, i vilket fall* T *har samma ledande element som* b*.*

Definition 1.2.7 En trappmatris kallas *reducerad* om samtliga ledande element är 1, och dessa är de enda nollskilda elementen i sina kolonner.

Exempel 1.2.4 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är en reducerad trappmatris. □

Definition 1.2.8 Till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = \ b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = \ b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \ b_m \end{cases}$$

associerar vi $m \times (n+1)$-matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

som kallas ekvationssystemets *totalmatris*. Vi har partitionerat totalmatrisen i två delmatriser – den vänstra delmatrisen $A = [a_{ij}]$ av typ $m \times n$

kallas ekvationssystemets *koefficientmatris*, och den högra kolonnmatrisen b är systemets *högerledsmatris*.

Totalmatrisen innehåller all nödvändig information om ekvationssystemet i koncentrerad form, och i fortsättningen kommer vi att utföra de räkningar som behövs för att lösa ett linjärt ekvationssystem i systemets totalmatris.

1.3 Trappsystem

Definition 1.3.1 Ett linjärt ekvationssystem, vars totalmatris är en trappmatris, kallas ett *trappsystem*, och om totalmatrisen är en reducerad trappmatris kallas systemet ett *reducerat trappsystem*.

Att lösa ett trappsystem är en trivial uppgift.

EXEMPEL 1.3.1 Det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

är ett trappsystem eftersom totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

är en trappmatris. För att lösa systemet utnyttjar vi ekvationerna i omvänd ordning och bestämmer i tur och ordning x_3, x_2 och x_1. Den sista ekvationen ger direkt $x_3 = 1$, och insättning av detta i den näst sista ekvationen ger $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2 = 2$. Slutligen följer ur den första ekvationen att $x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 4 + 1 = -2$. Systemet har således den unika lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 2, 1)$. □

EXEMPEL 1.3.2 Trappsystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ -x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ 3x_4 - x_5 = 3, \end{cases}$$

vars totalmatris är

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

har fler variabler än ekvationer. För att lösa systemet multiplicerar vi den första ekvationen med 1/2, den andra med −1 och den tredje ekvationen med 1/3; detta leder till följande ekvationssystem, som uppenbarligen har samma lösningar som det ursprungliga systemet.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 = \frac{3}{2} \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 1. \end{cases}$$

Därefter flyttar vi över variablerna x_3 och x_5 till högerleden och får systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 + x_5 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 3x_4 = -2 - 2x_3 - 2x_5 \\ \phantom{x_1 + x_2 + \frac{1}{2}} x_4 = 1 \phantom{{} - 2x_3} + \frac{1}{3}x_5, \end{cases}$$

som vi nu kan lösa ”nerifrån och upp” med avseende på variablerna x_1, x_2 och x_4. Näst sista ekvationen ger

$$x_2 = -2 - 2x_3 - 2x_5 + 3x_4 = -2 - 2x_3 - 2x_5 + 3(1 + \tfrac{1}{3}x_5) = 1 - 2x_3 - x_5,$$

och insättning i den första ekvationen resulterar i

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}x_3 + x_5 - x_2 - \tfrac{1}{2}x_4 \\ &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}x_3 + x_5 - (1 - 2x_3 - x_5) - \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{3}x_5) = \tfrac{5}{2}x_3 + \tfrac{11}{6}x_5. \end{aligned}$$

Det ursprungliga systemet är med andra ord ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} x_1 = \phantom{1 - {}} \frac{5}{2}x_3 + \frac{11}{6}x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - \phantom{\frac{1}{1}}x_5 \\ x_4 = 1 \phantom{{} - 2x_3} + \frac{1}{3}x_5. \end{cases}$$

Detta system har oändligt många lösningar, ty vi kan tilldela variablerna x_3 och x_5 godtyckliga värden t resp. u och får för varje sådan tilldelning bestämda värden på de övriga variablerna. Lösningar till systemet har därför formen

$$(\tfrac{5}{2}t + \tfrac{11}{6}u,\ 1 - 2t - u,\ t,\ 1 + \tfrac{1}{3}u,\ u). \qquad \square$$

I ett reducerat trappsystem kan vi läsa av lösningen direkt.

Exempel 1.3.3 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{} + x_3 + x_4} + 2x_5 = 1 \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 \phantom{{} + x_4} - 3x_5 = 4 \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 + {}} x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

är ett reducerat trappsystem eftersom totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

är en reducerad trappmatris med första, tredje och fjärde kolonnen som ledande kolonner. Genom att flytta över variablerna x_2 och x_5 till högerleden erhåller vi

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 2x_5 \\ x_3 = 4 \qquad\quad + 3x_5 \\ x_4 = 3 \qquad\quad - 4x_5. \end{cases}$$

Ekvationssystemet har således lösningarna $(1 - t - 2u, t, 4 + 3u, 3 - 4u, u)$, där parametrarna t och u är godtyckliga. □

Definition 1.3.2 Betrakta ett trappsystem med m ekvationer och n obekanta; per definition har det formen

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + \qquad \dots \qquad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2k_2}x_{k_2} + \qquad \dots \qquad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \end{cases}$$

där $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ och koefficienterna a_{1k_1}, a_{2k_2}, ..., a_{rk_r} är skilda från noll. Dessa koefficienter, som ju är koefficientmatrisens ledande element, kallas också för systemets *ledande koefficienter*. (Om $r = m$, så finns förstås de nedersta ekvationerna $0 = b_{r+1}$, $0 = 0$, ..., $0 = 0$ inte med, och i fallet $r + 1 = m$ är ekvationen $0 = b_{r+1}$ systemets sista ekvation.) Variablerna x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r}, som svarar mot koefficientmatrisens ledande kolonner, kallas trappsystemets *basvariabler*, medan de resterande variablerna kallas trappsystemets *fria variabler*.

Trappsystemet saknar basvariabler ($r = 0$) endast om koefficientmatrisen är en nollmatris, vilket förstås är ett trivialt fall. Systemet saknar fria variabler om $r = n$; då är automatiskt $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, ..., $k_n = n$ och $m \geq n$.

Om $r < m$ och $b_{r+1} \neq 0$, så är trappsystemet (1) olösbart, eftersom ekvationen $0 = b_{r+1}$ i så fall är motsägelsefull.

Antag därför att $r = m$ eller att $r < m$ och $b_{r+1} = 0$. I det sistnämnda fallet har de $m - r$ sista ekvationerna formen $0 = 0$, och de kan därför strykas utan att systemets lösningsmängd påverkas. I båda fallen kan systemet således skrivas

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} = b_1 - \sum_{k=k_1+1}^{n} a_{1k}x_k \\ a_{2k_2}x_{k_2} = b_2 - \sum_{k=k_2+1}^{n} a_{2k}x_k \\ \qquad \vdots \\ a_{rk_r}x_{k_r} = b_r - \sum_{k=k_r+1}^{n} a_{rk}x_k, \end{cases} \tag{2}$$

där högerledet i den sista ekvationen bara innehåller fria variabler, högerledet i den näst sista ekvationen bara innehåller fria variabler och basvariabeln x_{k_r}, osv., och slutligen högerledet i den första ekvationen innehåller fria variabler och basvariablerna $x_{k_r}, \dots, x_{k_2}$. De fria variablerna x_j kan tilldelas godtyckliga värden t_j, varefter basvariablerna successivt kan lösas ut: x_{k_r} ur den sista ekvationen, $x_{k_{r-1}}$ ur den näst sista ekvationen, osv. Denna procedur att bestämma basvariablerna kallas *återsubstitution*. Varje tilldelning av värden till de fria variablerna bestämmer basvariablerna entydigt och ger upphov till en lösning till ekvationssystemet. Detta visar att systemet är lösbart. För att systemet skall ha unik lösning är det tydligen nödvändigt och tillräckligt att det inte finns några fria variabler.

Om trappsystemet (1) är reducerat, så innehåller den första ekvationen inga andra basvariabler än x_{k_1}, den andra ekvationen inga andra basvariabler än x_{k_2}, etc. (och de ledande koefficienterna a_{ik_i} är lika med 1). I detta fall innehåller högerleden i (2) inga basvariabler alls, och vi kan därför bestämma basvariablernas värden direkt för varje tilldelning av värden till de fria variablerna.

Vi sammanfattar vad vi kommit fram till i följande sats om lösbarhet och entydighet för trappsystem.

Sats 1.3.3 (a) *Trappsystemet (1) är konsistent om och endast om $r = m$ eller $r < m$ och $b_{r+1} = 0$.*

(b) *Ett konsistent trappsystem har entydig lösning om och endast om fria variabler saknas.*

(c) *Varje tilldelning av värden till de fria variablerna i ett konsistent trappsystem ger en lösning. Basvariablernas värden kan bestämmas med återsubstitution. Om trappsystemet är reducerat fås basvariablernas värden direkt.*

Övningar

1.3 Lös följande ekvationssystem

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 6x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} (s^2+1)x_1 + (s+1)x_2 + (s-1)x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + sx_3 = s^2+1 \\ \qquad (s+1)x_3 = s^2-1 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} x_1 + (1-\mathrm{i})x_2 + \mathrm{i}x_3 + x_4 = 1+\mathrm{i} \\ \qquad (1+\mathrm{i})x_3 + 2x_4 = 1+\mathrm{i} \\ \qquad x_4 = \mathrm{i} \end{cases}$$

med koefficienter i $\mathbf{R}$, kroppen av rationella funktioner, resp. $\mathbf{C}$.

1.4 Gausselimination

För varje linjärt ekvationssystem finns det ett reducerat trappsystem som har samma lösningsmängd, och i det här avsnittet skall vi i detalj beskriva en algoritm för att konstruera detta trappsystem. Algoritmen kallas *Gausselimination*. Eftersom det är trivialt att lösa trappsystem får vi därigenom en metod för att lösa godtyckliga linjära ekvationssystem.

Inledande exempel

Vi börjar vår beskrivning av Gausselimination med ett illustrerande exempel.

Exempel 1.4.1 Betrakta systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 8. \end{cases}$$

Av pedagogiska skäl skall vi utföra alla beräkningar parallellt i det fullständigt utskrivna systemet och i systemets totalmatris:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right].$$

Genom att addera lämpliga multipler av den första ekvationen till systemets övriga ekvationer kan vi få ett nytt ekvationssystem med samma lösningar som det givna men vars andra, tredje och fjärde ekvation inte längre innehåller variabeln x_1. Genom att jämföra koefficienterna för x_1 ser vi att vi bör addera den första ekvationen multiplicerad med -2 till den andra ekvationen, multiplicerad med 1 till den tredje ekvationen, samt multiplicerad med -1 till den fjärde ekvationen. Detta resulterar nämligen i följande system:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ - x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

I det delsystem som består av ekvationerna nr 2–4 är variabeln x_1 nu eliminerad, och av en tillfällighet råkar även variabeln x_2 bli eliminerad. Vi vill nu gå vidare och eliminera variabeln x_3 ur delsystemet. Eftersom x_3 saknas i den andra ekvationen men finns i den tredje, låter vi först dessa ekvationer byta plats med varandra:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ - x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

Det är praktiskt om koefficienten för den variabel som skall elimineras (i det här fallet x_3) är lika med 1 i den ekvation som skall utnyttjas för eliminationen. Därför multiplicerar vi nu den (nya) andra ekvationen med 1/2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ - x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

Eftersom x_3 saknas i ekvation nr 3 räcker det här att addera den andra ekvationen multiplicerad med -2 till den fjärde ekvationen, vilket ger oss systemet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ - x_4 - 3x_5 = 1 \\ - x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Vi fortsätter nu med det delsystem som består av de två sista ekvationerna, dvs. vi multiplicerar den tredje ekvationen med -1 samt adderar den resulterande ekvationen till ekvationen nr 4. Detta leder till följande trappsystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 + 3x_5 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

som har x_1, x_3 och x_4 som basvariabler och följaktligen x_2 och x_5 som fria variabler.

Trappsystemet kan vi lösa med hjälp av återsubstitution; vi sätter $x_2 = t$ och $x_5 = u$ och får successivt

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 - 3x_5 = -1 - 3u \\ x_3 &= 3 - 2x_4 = 3 - 2(-1 - 3u) = 5 + 6u \\ x_1 &= 1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 - t - (5 + 6u) - (-1 - 3u) - u \\ &= -3 - t - 4u. \end{aligned}$$

Systemets allmänna lösning är således $(-3 - t - 4u,\ t,\ 5 + 6u,\ -1 - 3u,\ u)$, där parametrarna t och u är godtyckliga.

Istället för att använda återsubstitution kan vi emellertid välja att förenkla trappsystemet ytterligare till dess att vi erhållit ett reducerat trappsystem. Vi kan i trappsystemet ovan använda den tredje ekvationen för att eliminera basvariabeln x_4 ur de två första ekvationerna. Addera den tredje ekvationen multiplicerad med -2 till den andra ekvationen och multiplicerad med -1 till den första ekvationen. Vi får då systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = 2 \\ x_3 - 6x_5 = 5 \\ x_4 + 3x_5 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eliminera slutligen basvariabeln x_3 ur den första ekvationen genom att addera den andra ekvationen multiplicerad med -1 till den första ekvationen. Resultatet blir det reducerade trappsystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_5 = -3 \\ x_3 - 6x_5 = 5 \\ x_4 + 3x_5 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Genom att flytta över de fria variablerna till högerleden får vi slutligen

$$\begin{cases} x_1 = -3 - x_2 - 4x_5 \\ x_3 = 5 + 6x_5 \\ x_4 = -1 - 3x_5, \end{cases}$$

och vi har nu bara att läsa av lösningen. □

Elementära radoperationer

För att överföra ekvationssystemet i exempel 1.4.1 till ett reducerat trappsystem utförde vi på ett systematiskt sätt tre operationer på systemets ekvationer − vi multiplicerade en ekvation med en nollskild konstant, vi lät två ekvationer byta plats med varandra, och vi adderade en konstant multipel av en ekvation till en annan ekvation.

Dessa operationer kan naturligtvis också tolkas som operationer på raderna i systemets totalmatris. Vi inför därför följande definition.

Definition 1.4.1 Följande tre operationer utförda på raderna i en matris A kallas *elementära radoperationer:*

1. Multiplicera en rad med en nollskild konstant c (dvs. multiplicera samtliga element i raden med konstanten c).
2. Låt två rader byta plats med varandra.
3. Addera en konstant multipel c av en rad till en annan rad, (dvs. ersätt elementen a_{jk} i rad nr j med $a_{jk} + ca_{ik}$, där $i \neq j$ och konstanten c är godtycklig).

Två matriser A och B kallas *radekvivalenta*, vilket skrives $A \sim B$, om det finns en följd av elementära radoperationer som överför matrisen A till matrisen B.

Observera att för varje elementär radoperation finns det en invers elementär radoperation som upphäver effekten av den förstnämnda radoperationen. Inversen till en elementär radoperation av typ 1 är att multiplicera samma rad med konstantens invers c^{-1}, radoperationerna av typ 2 är sina egna inverser, och inversen till en operation av typ 3 består i att addera rad nr i multiplicerad med $-c$ till rad nr j.

Påstående 1.4.2 *Radekvivalens är en ekvivalensrelation, dvs.*

(i) $A \sim A$ *för alla matriser* A,

(ii) $A \sim B \implies B \sim A$,

(iii) $A \sim B$ *och* $B \sim C \implies A \sim C$.

Bevis. Det första påståendet är uppenbart (en radoperation av typ 1 med $c = 1$ ändrar inte matrisen), det andra följer av att om R_1, R_2, …, R_k är en följd av elementära radoperationer som överför matrisen A till matrisen B, så överför dessa operationers inverser tagna i omvänd ordning, dvs. R_k^{-1}, …, R_2^{-1}, R_1^{-1} matrisen B till matrisen A, och det tredje påståendet är också uppenbart (utför först de elementära radoperationer som leder från A till B och fortsätt sedan med de operationer som leder från B till C; detta är en följd av radoperationer som leder från A till C). $\square$

EXEMPEL 1.4.2 Genom att i tur och ordning addera första raden multiplicerad med -2 till andra raden och multiplicerad med 1 till tredje raden samt slutligen låta andra och tredje raderna byta plats med varandra får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Lösandet av linjära ekvationssystem med hjälp av Gausselimination går ut på att ersätta det givna systemet med ett radekvivalent reducerat trappsystem. För att metoden skall fungera är det förstås viktigt att trappsystemet har samma lösningsmängd som det ursprungliga ekvationssystemet. Detta garanteras av nästa sats.

Sats 1.4.3 *Ekvationssystem med radekvivalenta totalmatriser har samma mängd av lösningar.*

Bevis. Det räcker att observera att varje enskild tillämpning av någon av de tre slagen av elementära radoperationerna resulterar i system med samma lösningsmängd. För de båda förstnämnda operationerna är detta helt självklart. Att även den tredje radoperationen leder till ett system med samma lösningsmängd följer av att den är omvändbar – om man transformerar ett ekvationssystem genom att först addera c gånger ekvation nr i till ekvation nr j och sedan adderar $-c$ gånger ekvation nr i till ekvation nr j så har man återkommit till det ursprungliga systemet. De båda systemen måste därför ha samma lösningar. $\square$

Vi har i ljuset av satserna 1.4.3 och 1.3.3 (c) reducerat problemet att lösa godtyckliga linjära ekvationssystem till problemet att för varje matris bestämma en radekvivalent trappmatris. Vi skall nu beskriva en algoritm för detta. Algoritmen kallas *Gausselimination*, och beskrivningen är rekursiv.

Gausseliminationsalgoritmen

1. Nollmatriser är redan reducerade trappmatriser.

2. Nollskilda radmatriser är redan trappmatriser och transformeras till radekvivalenta reducerade trappmatriser genom att multipliceras med inversen till det ledande elementet.

3. (*Iterationssteget*) Antag att algoritmen beskriver hur matriser med $m-1$ rader transformeras till radekvivalenta reducerade trappmatriser, och betrakta en nollskild $m \times n$-matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Låt k_1 vara index för den första kolonn i A som innehåller ett nollskilt element. Välj ett nollskilt element i denna kolonn, och låt i_1 vara elementets radindex. Det utvalda nollskilda elementet $a_{i_1k_1}$ kallas iterationens *pivotelement*. Om $i_1 \neq 1$ låter vi första raden och rad nr i_1 byta plats med varandra; pivotelementet hamnar därigenom i första raden, och vi har erhållit en med A radekvivalent matris med följande utseende

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1k_1} & a'_{1k_1+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2k_1} & a'_{2k_1+1} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mk_1} & a'_{mk_1+1} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

där sambandet mellan de nya och de gamla koefficienterna ges av att

$$a'_{1j} = a_{i_1j}, \quad a'_{i_1j} = a_{1j} \quad \text{och} \quad a'_{ij} = a_{ij} \quad \text{för } i \neq 1,\ i_1.$$

Eftersom $a'_{1k_1} \neq 0$ kan vi multiplicera den första raden med $1/a'_{1k_1}$ samt därefter för $i = 2, \dots, m$ addera $-a'_{ik_1}$ gånger den resulterande raden till rad nr i. Detta leder till följande radekvivalenta matris

$$A'' = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & a''_{1k_1+1} & \dots & a''_{1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{2k_1+1} & \dots & a''_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{mk_1+1} & \dots & a''_{mn} \end{array}\right]$$

där alltså

$$\begin{aligned} a''_{1j} &= a'_{1j}/a'_{1k_1} && \text{och} \\ a''_{ij} &= a'_{ij} - a'_{ik_1}a''_{1j} && \text{för } 2 \leq i \leq m \text{ och } k_1 + 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Om $k_1 = n$, så finns det förstås inte några element till höger om det vertikala strecket i matrisen A'', dvs. matrisen är redan en reducerad trappmatris, och vi är klara. I annat fall är matrisen A'' partitionerad i fyra delmatriser. Delmatrisen i det nedre högra hörnet är en $(m-1)\times(n-k_1)$-matris, och enligt vårt induktionsantagande transformerar Gausselimination denna delmatris till en radekvivalent reducerad trappmatris T''. Eftersom delmatrisen i det nedre vänstra hörnet är en nollmatris, kommer samma radoperationer utförda på matrisen A'' att transformera denna till trappmatrisen

$$T = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & a''_{1k_1+1} & \dots & a''_{1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & T'' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{array}\right].$$

Om $T'' = 0$, så är trappmatrisen T reducerad. Antag därför att $T'' \neq 0$. Då har matrisen T ett antal ledande kolonner utöver kolonn nr k_1; låt dessa ha kolonnindex $k_2 < \cdots < k_r$. De ledande elementen i matrisen T finns med andra ord på platserna $(1, k_1)$, $(2, k_2)$, ..., (r, k_r). Samtliga ledande element är lika med 1 och alla övriga element i en ledande kolonn förutom elementet i första raden är lika med 0. För att transformera matrisen T till en radekvivalent reducerad trappmatris återstår därför endast att addera rad nr i multiplicerad med $-a''_{1k_i}$ till den första raden för $2 \leq i \leq r$.

Därmed är beskrivningen av Gausseliminationsalgoritmen komplett.

Den rekursiva beskrivningen av Gausseliminationsalgoritmen utgör samtidigt ett bevis för för följande sats.

Sats 1.4.4 *Varje matris är radekvivalent med en reducerad trappmatris.*

Anmärkning. Man kan visa att varje matris är radekvivalent med en *unik* reducerad trappmatris. Detta kan visas med hjälp av satserna 1.5.1 och 1.4.3.

Som korollarium till sats 1.4.4 följer omedelbart

Korollarium 1.4.5 *För varje linjärt ekvationssystem finns det ett reducerat trappsystem med samma lösningsmängd.*

Den uppmärksamme läsaren kommer att notera att vi i våra lösta exempel kommer att utföra de elementära radoperationerna i en något annan ordning än den som angivits ovan i vår beskrivning av Gausselimination. Vi kommer först att skaffa oss en trappmatris och sedan utföra de återstående operationerna så att först den sista ledande kolonnen blir reducerad, sedan den näst sista, osv. Detta förfarande är nämligen ”bokföringstekniskt” enklare att redovisa i totalmatrisen vid handräkning.

Vi avslutar det här avsnittet med ytterligare lösta exempel.

EXEMPEL 1.4.3 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Lösning: Vi använder Gausselimination och utför samtliga beräkningar i totalmatrisen.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{subtrahera } 2 \times \text{rad 1 från rad 2} \\ \leftarrow \text{addera rad 1 till rad 3} \\ \leftarrow \text{subtrahera rad 1 från rad 4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{låt rad 2 och rad 3 byta plats} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{dividera rad 3 med 3} \\ \leftarrow \text{addera rad 2 till rad 4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{subtrahera } 3 \times \text{rad 3 från rad 4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{addera rad 3 till rad 1} \\ \leftarrow \text{subtrahera rad 3 från rad 2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{subtrahera } 2 \times \text{rad 2 från rad 1} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Det mot den sista totalmatrisen svarande systemet kan skrivas

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 + x_4, \end{cases}$$

och lösningen är $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 - t,\ 2,\ 1 + t,\ t)$, där $t \in \mathbf{R}$. □

EXEMPEL 1.4.4 Lös ekvationssystemen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Lösning: De båda systemen har samma koefficientmatris. Eftersom valet av pivotelement i iterationssteget av Gaussalgoritmen enbart beror av koefficientmatrisen och inte av högerledsmatrisen, kan vi använda samma sekvens av radoperationer för att lösa de båda systemen. Detta innebär att vi kan utföra beräkningarna simultant i följande matris, som innehåller den gemensamma koefficientmatrisen och de båda högerledsmatriserna:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Här representerar den första kolumnen i den högra delmatrisen högerledet i det första ekvationssystemet och den andra kolumnen högerledet i det andra systemet. Gausselimination på ovanstående matris leder till följande sekvens av matriser:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

Vi kan nu läsa av de båda systemens lösningar; det första systemet har lösningen $(-2, 2, 1)$ och det andra systemet lösningen $(-9, 16, 20)$. □

Exempel 1.4.5 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + sx_3 = 1 \\ x_1 + sx_2 + x_3 = s \\ sx_1 + x_2 + x_3 = s^2 \end{cases}$$

för samtliga värden på den reella parametern s.

Lösning: Vi använder förstås elimination. Somliga koefficienter kommer då att bero av parametern s, och vi måste därför se till att vi inte av misstag väljer en koefficient som är 0 till pivotelement.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & s & 1 & s \\ s & 1 & 1 & s^2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{subtrahera rad 1 från rad 2} \\ \leftarrow \text{subtrahera } s \times \text{ rad 1 från rad 3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 1 \\ 0 & s-1 & 1-s & s-1 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & s^2-s \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{addera rad 2 till rad 3} \end{array}$$

$$(1) \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 1 \\ 0 & s-1 & 1-s & s-1 \\ 0 & 0 & 2-s-s^2 & s^2-1 \end{array}\right]$$

Om $s - 1 \neq 0$ och $2 - s - s^2 \neq 0$, dvs. om $s \neq 1$ och $s \neq -2$, så kan vi dividera den andra raden i matrisen (1) med $s - 1$ och den tredje raden med $2 - s - s^2$ $(= -(s-1)(s+2))$ och får då fortsättningsvis

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(s+1)/(s+2) \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{subtrahera } s \times \text{ rad 3 från rad 1} \\ \leftarrow \text{addera rad 3 till rad 2} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & (s^2+2s+2)/(s+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(s+2) \\ 0 & 0 & 1 & -(s+1)/(s+2) \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{subtrahera rad 2 från rad 1} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (s^2+2s+1)/(s+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(s+2) \\ 0 & 0 & 1 & -(s+1)/(s+2) \end{array}\right]$$

I fall $s \neq 1$ och $s \neq -2$ har systemet således den unika lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{s^2 + 2s + 1}{s + 2}, \frac{1}{s + 2}, -\frac{s + 1}{s + 2}\Big).$$

Då $s = 1$ reduceras totalmatrisen (1) till

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vilket svarar mot ekvationssystemet $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. För $s = 1$ har ekvationssystemet således oändligt många lösningar på formen

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - t - u,\ t,\ u),$$

där t och u är godtyckliga reella tal.

För $s = -2$ slutligen är totalmatrisen i (1) lika med

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right],$$

och ekvationssystemet är därför olösbart. □

Exempel 1.4.6 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + sx_3 = 1 \\ x_1 + sx_2 + \ \ x_3 = s \\ sx_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = s^2, \end{cases}$$

där koefficienterna nu uppfattas som polynom i variabeln s.

Lösning: Vi har samma system som i exempel 1.4.5, men skillnaden är att s och s^2 nu skall uppfattas som polynom och inte som reella tal. Vi kan därför använda samma lösning, men problemet att ett pivotelement kan vara 0 för vissa värden på parametern s uppkommer inte. Som rationella funktioner har $s - 1$ och $2 - s - s^2$ multiplikativa inverser, och därför kan vi gå vidare från (1) utan att som i exempel 1.4.5 behöva undanta några värden på s. Slutsatsen blir att systemet har den entydiga rationella lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{s^2 + 2s + 1}{s + 2}, \frac{1}{s + 2}, -\frac{s + 1}{s + 2}\Big).$$

□

Övningar

1.4 Lös följande ekvationssystem med Gausselimination

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$
f) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$
h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

1.5 Lös följande ekvationssystem för varje högerled

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = b_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = b_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = b_4. \end{cases}$$

1.6 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = a \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

för $(a, b, c) = (5, 3, 2)$ och $(a, b, c) = (4, -1, 7)$.

1.7 Bestäm för varje värde på den reella parametern s samtliga lösningar till ekvationssystemet

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + sx_3 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + sx_2 - x_3 = 1 \\ sx_1 + 2x_2 + (s+3)x_3 = 2. \end{cases}$

1.8 Lös följande ekvationssystem med koefficienter i $\mathbf{Z}_3$

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

1.5 Rang

Varje matris A är naturligtvis radekvivalent med oändligt många trappmatriser, men platserna för de ledande kolonnerna i dessa trappmatriser är som vi strax skall visa entydigt bestämda av A. (Därav följer sedan ganska lätt att det bara finns en reducerad trappmatris som är radekvivalent med A.) Speciellt har alla med A radekvivalenta trappmatriser lika många ledande kolonner, och detta faktum skall vi utnyttja för att definiera begreppet rang.

Sats 1.5.1 *Om T_1 och T_2 är två radekvivalenta trappmatriser, så har de ledande kolonnerna i T_1 samma kolonnindex som de ledande kolonnerna i T_2. Speciellt har alltså radekvivalenta trappmatriser lika många ledande kolonner.*

Bevis. Betrakta de båda homogena linjära ekvationssystemen som har T_1 och T_2 som sina koefficientmatriser. Dessa båda system har samma lösningsmängd, ty radekvivalenta system har samma lösningsmängd. Satsen följer därför om vi kan visa att indexnumren hos de ledande kolonnerna i en trappmatris T är entydigt bestämda av motsvarande homogena trappsystems lösningsmängd $\mathcal{L}$.

Låt därför $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ vara indexen för de ledande kolonnerna i trappmatrisen T. Detta innebär att $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ är trappsystemets basvariabler. Efter division med de ledande koefficienterna och överflyttning till högerledet kan trappsystemet skrivas på formen (jämför med ekvation (2) i avsnitt 1.3):

$$\begin{cases} x_{k_1} = \sum_{k=k_1+1}^{n} c_{1k}x_k \\ x_{k_2} = \sum_{k=k_2+1}^{n} c_{2k}x_k \\ \qquad \vdots \\ x_{k_r} = \sum_{k=k_r+1}^{n} c_{rk}x_k, \end{cases}$$

där högerledet i den sista ekvationen bara innehåller fria variabler, högerledet i den näst sista ekvationen bara innehåller fria variabler och basvariabeln x_{k_r}, osv., och slutligen högerledet i den första ekvationen innehåller fria variabler och basvariablerna $x_{k_r}, \ldots, x_{k_2}$.

Varje tilldelning av värden till de fria variablerna bestämmer basvariablernas värden entydigt. Speciellt gäller att om $k = k_p$ är index för en ledande kolonn och $x_j = 0$ för $j > k$ så är $x_k = 0$. Det finns således ingen lösning till ekvationssystemet som uppfyller $x_k = 1$ och $x_j = 0$ för alla $j > k$. Om däremot k inte är index för en ledande kolonn så att x_k är en fri variabel, så finns det en lösning x med $x_k = 1$ och $x_j = 0$ för alla $j > k$.

Kolonn nr k i trappmatrisen T är med andra ord en ledande kolonn om och endast om det inte finns en lösning x i $\mathcal{L}$ som uppfyller

$$x_k = 1 \quad \text{och} \quad x_j = 0 \quad \text{för } j > k.$$

Detta visar att de ledande kolonnerna är entydigt bestämda av lösningsmängden $\mathcal{L}$. $\square$

Vi illustrerar beviset ovan i ett konkret exempel.

Exempel 1.5.1 Betrakta trappmatrisen

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Motsvarande homogena linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 5x_7 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_4 + 4x_5 \qquad + 6x_7 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2x_6 + 4x_7 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

är ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 2x_6 - 5x_7 \\ x_4 = \qquad\qquad - 2x_5 \qquad - 3x_7 \\ x_6 = \qquad\qquad\qquad\qquad - 2x_7. \end{cases}$$

Genom att studera lösningsmängden $\mathcal{L}$ ser vi att det finns en lösning med $x_7 = 1$ (t. ex. lösningen $(0, 8, 0, -3, 0, -2, 1)$), så kolonn nr 7 kan inte vara en ledande kolonn. Vidare finns det ingen lösning med $x_6 = 1$ och $x_7 = 0$, så kolonn nr 6 måste vara en ledande kolonn. Däremot finns det lösningar med $x_5 = 1$ och $x_6 = x_7 = 0$ (t. ex. lösningen $(0, 3, 0, -2, 1, 0, 0)$), så kolonn nr 5 är inte en ledande kolonn, osv. $\square$

På grund av föregående sats blir följande definition av begreppet rang entydig.

Definition 1.5.2 Med *rangen* av en matris A menas antalet ledande kolonner i en med A radekvivalent trappmatris. Rangen betecknas $\operatorname{rang} A$.

En $m \times n$-matris rang r uppfyller olikheten $0 \le r \le \min(m, n)$.

Exempel 1.5.2 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

är radekvivalent med trappmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

och har därför rang 3. □

Sats 1.5.3 *Radekvivalenta matriser har samma rang.*

Bevis. Radekvivalenta matriser är radekivalenta med samma trappmatris. □

Övningar

1.9 Bestäm rangen för matriserna

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -9 & 11 \\ 0 & 7 & 8 & -14 & 17 \end{bmatrix}$

1.10 Visa att matriserna A och $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ har samma rang.

1.11 Visa att varje matris är radekvivalent med en unik reducerad trappmatris.

1.6 Satser om lösbarhet och entydighet

Ett homogent ekvationssystem är naturligtvis alltid lösbart eftersom vi får en lösning genom att låta alla variabler vara 0; denna lösning kallas den *triviala lösningen*. Ett tillräckligt villkor för att det skall finnas fler lösningar än den triviala ges i nästa sats.

Sats 1.6.1 *Varje homogent ekvationssystem med fler variabler än ekvationer har icke-triviala lösningar.*

Bevis. Om ett ekvationssystem har fler variabler än ekvationer, måste det radekvivalenta trappsystemet ha fria variabler (antalet basvariabler kan inte överstiga antalet ekvationer). Påståendet i satsen följer därför av sats 1.3.3. □

Med hjälp av rangbegreppet får vi följande kriterier för lösbarhet resp. entydig lösbarhet hos godtyckliga linjära ekvationssystem.

Sats 1.6.2 *Ett linjärt ekvationssystem*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(a) *är lösbart om och endast om koefficientmatrisen A har samma rang som totalmatrisen $[A \,|\, b]$,*

(b) *och det är entydigt lösbart om och endast om denna gemensamma rang är lika med n, antalet obekanta.*

(c) *Ekvationssystemet är lösbart för varje högerled $b_1, b_2, \ldots, b_m$ om och endast om koefficientmatrisens rang är lika med m, antalet ekvationer,*

(d) *och det är entydigt lösbart för varje högerled $b_1, b_2, \ldots, b_m$ om och endast om dessutom antalet ekvationer är lika med antalet obekanta, dvs. $m = n$.*

Bevis. Vid Gausselimination transformeras det givna ekvationssystemet till ett trappsystem med samma antal obekanta, samma antal ekvationer och samma lösningsmängd. Låt $[T \,|\, b']$ beteckna trappsystemets totalmatris; denna totalmatris har samma rang som det givna ekvationssystemets totalmatris $[A \,|\, b]$, och koefficientmatrisen T i trappsystemet har samma rang som koefficientmatrisen A.

Observera vidare att transformationen mellan högerledet b i det ursprungliga systemet och högerledet b' i trappsystemet är en bijektiv transformation, dvs. varje högerled b' i trappsystemet svarar mot ett unikt högerled b i det ursprungliga systemet. Detta följer av att vi kan utföra de elementära radoperationerna som leder från det givna systemet $[A \,|\, b]$ till trappsystemet $[T \,|\, b']$ i omvänd ordning.

Det räcker därför att visa påståendena (a) – (d) för trappsystem. Vi kan med andra ord anta att det ursprungliga systemet är ett trappsystem. Låt oss därvid använda beteckningarna i ekvation (1) i avsnitt 1.3. Då är

$$\operatorname{rang} A = r$$

$$\operatorname{rang}[A \,|\, b] = \begin{cases} r & \text{om } r = m \text{ eller } b_{r+1} = 0 \\ r+1 & \text{om } r < m \text{ och } b_{r+1} \neq 0. \end{cases}$$

Enligt sats 1.3.3 är trappsystemet lösbart för ett givet högerled b om och endast om $r = m$ eller $b_{r+1} = 0$, dvs. om och endast om $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A \,|\, b]$, och entydigt lösbart om och endast om det dessutom inte finns några fria variabler, dvs. $r = n$. Detta visar (a) och (b).

Om $r < m$ är trappsystemet inte lösbart för t. ex. $b_{r+1} = 1$. Nödvändigt och tillräckligt för att systemet skall vara lösbart för alla högerled är därför att $r = m$, och för entydighet är det förstås igen nödvändigt och tillräckligt att det dessutom inte finns några fria variabler. Därmed är också (c) och (d) visade. $\square$

Sats 1.6.1 är naturligtvis ett specialfall av (b) i sats 1.6.2.

För kvadratiska ekvationssystem, dvs. system med lika många variabler som ekvationer, får vi följande följdsats till satsen ovan.

Sats 1.6.3 *Följande fyra påståenden är ekvivalenta.*

(α) *Det kvadratiska systemet*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

är lösbart för varje högerled $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

(β) *Systemet har en unik lösning för varje högerled* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

(γ) *Motsvarande homogena ekvationssystem*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

har unik lösning.

(δ) *Koefficientmatrisens rang är lika med* n.

Bevis. Ekvivalensen (α) $\Leftrightarrow$ (δ) är ett specialfall av påstående (c) i sats 1.6.2, ekvivalensen (β) $\Leftrightarrow$ (δ) följer av påståendena (c) och (d), och ekvivalensen (γ) $\Leftrightarrow$ (δ) är en konsekvens av påstående (b) i samma sats. $\square$

Övningar

1.12 Betrakta ett linjärt ekvationssystem $[A \mid b]$ med m ekvationer och antag att det är lösbart för vart och ett av de m stycken olika högerled som fås genom att för $k = 1, 2, \ldots, m$ sätta $b_k = 1$ och $b_i = 0$ för $i \neq k$. Visa att systemet då är lösbart för varje högerled b.

1.7 Några numeriska aspekter på Gausselimination

Det fordras inga större kunskaper i programmering för att inse att det i princip är enkelt att programmera Gausseliminationsmetoden, och att man med datorhjälp bör kunna lösa linjära system med hundratals, ja tusentals ekvationer och obekanta. Nu finns det ingen anledning att utföra detta programmeringsarbete själv, ty det finns naturligtvis färdig programvara för att lösa linjära ekvationssystem. Dessutom är uppgiften, som vi strax skall se, inte helt så trivial som den kan verka vid första anblicken, beroende på att man måste ta hänsyn till effekten av avrundningsfel. Ett detaljerat studium av sådana frågeställningar hör hemma i en kurs i numerisk analys och faller utanför ramen för den här boken, men vi skall beröra dem något för att åtminstone göra läsaren medveten om dem.

Pivotering

Den första fråga som bör ställas om en numerisk metod är hur noggrann den är. För Gausselimination verkar svaret enkelt − algoritmen slutar efter ändligt många steg med den exakta lösningen (i motsats till exempelvis Newton–Raphsons metod för bestämning av nollställen till funktioner). Riktigt så enkelt är det emellertid inte, ty svaret förutsätter att alla aritmetiska räkningar utförs exakt, men så är i allmänhet inte fallet vid datorräkning.

I datorer representeras som bekant reella tal som flyttal, dvs. i princip på formen $\pm 0.d_1 d_2 \dots d_n \cdot 10^m$, där n är ett givet heltal (som beror på vilken precision som används) och heltalet m är begränsat till ett givet intervall[2]. Man säger att ett reellt tal är givet med n *signifikanta siffror* om det har ovanstående form. Om vi exempelvis räknar med tre signifikanta siffror måste vi avrunda 5073 till 5070 ($= 0.507 \cdot 10^4$), 0.02387 till 0.0239 ($= 0.239 \cdot 10^{-1}$), osv.

När man räknar exakt är det för Gaussalgoritmen likgiltigt vilken nollskild koefficient som väljs som pivotelement i en iteration. Detta gäller emellertid inte längre vid flyttalsräkning av det slag som datorer måste använda. Vi illustrerar med ett enkelt exempel.

Exempel 1.7.1 Lös systemet

$$\begin{cases} 0.001x + y = 2 \\ x - y = -0.999, \end{cases}$$

[2]Vi bortser från att datorer använder basen 2 och inte basen 10, eftersom detta saknar betydelse för vårt resonemang.

då alla räkningar utförs med tre signifikanta siffror.

Lösning: Den exakta lösningen är som man omedelbart ser $x = 1$, $y = 1.999$, vilket med tre signifikanta siffror avrundas till $x = 1.00$, $y = 2.00$. Låt oss se vad Gausselimination ger. När alla koefficienter ges med tre signifikanta siffror får vi följande totalmatris att utgå ifrån

$$\left[\begin{array}{ll|r} 0.00100 & 1.00 & 2.00 \\ 1.00 & -1.00 & -0.999 \end{array}\right].$$

Vi multiplicerar först rad 1 med 1000

$$\left[\begin{array}{ll|r} 1.00 & 1000 & 2000 \\ 1.00 & -1.00 & -0.999 \end{array}\right]$$

och subtraherar sedan rad 1 från rad 2 varvid -1001.00 måste avrundas till -1000 och -2000.999 till -2000. Vi får därför

$$\left[\begin{array}{lr|r} 1.00 & 1000 & 2000 \\ 0.00 & -1000 & -2000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ll|r} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right],$$

med lösningen $x = 0.00$, $y = 2.00$, som är helt fel vad x beträffar.

Låt oss nu göra om lösningen men då först permutera ekvationerna, dvs. vi utgår istället från totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{lr|r} 1.00 & -1.00 & -0.999 \\ 0.00100 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right].$$

Då $0.001 \times$ rad 1 subtraheras från rad 2 erhålles − fortfarande med tre signifikanta siffror −

$$\left[\begin{array}{lr|r} 1.00 & -1.00 & -0.999 \\ 0.00 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lr|r} 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right],$$

dvs. $x = 1.00$ och $y = 2.00$, vilket är korrekt med tre signifikanta siffror.

Vi skulle få samma goda resultat om vi istället permuterade variablerna i det ursprungliga systemet innan vi startade eliminationsprocessen, dvs. om vi skrev systemet på formen

$$\begin{cases} y + 0.001x = 2.00 \\ -y + x = -0.999. \end{cases}$$

Att resultatet blev helt fel i det första fallet beror på det olyckliga valet av 0.001 som pivotelement − division med 0.001 leder till i sammanhanget stora tal och förlust av precision. □

I allmänhet erhåller man det bästa numeriska resultatet genom att välja så stort pivotelement som möjligt, och för att åstadkomma detta är det nödvändigt att permutera rader och/eller kolonner, vilket kallas *pivotering*. En god implementering av Gausseliminationsalgoritmen måste ta hänsyn till detta.

Illa konditionerade problem

I exempel 1.7.1 berodde resultatet på lösningsmetoden och genom lämplig pivotering var det möjligt att erhålla lösningen med god noggrannhet. I andra fall hjälper inte detta beroende på att systemet har en inneboende numerisk instabilitet, som gör lösningen mycket känslig för små störningar i koefficienterna. Man säger att problemet är *illa konditionerat*. Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 1.7.2 Betrakta de båda ekvationssystemen

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x + y = a \\ x + 0.999y = 1. \end{cases}$$

Det första systemet har lösningen $x = (a+1)/2$, $y = (a-1)/2$, och det andra systemet har lösningen $x = 1000 - 999a$, $y = 1000(a-1)$. För $a = 1$ har således båda systemen samma lösning, nämligen $(x, y) = (1, 0)$. Om vi ändrar a obetydligt till $a = 1.1$, så ändras det första systemets lösning obetydligt till $(x, y) = (1.05, 0.05)$, medan det andra systemets lösning ändras våldsamt till $(x, y) = (-98.9, 100)$. Det första systemet är därför väl konditionerat, dvs. okänsligt för små störningar, medan den andra systemet är illa konditionerat. □

Huruvida ett ekvationssystem är väl eller illa konditionerat beror av koefficientmatrisen på ett sätt som vi inte kan utreda närmare här. För systemen i exemplet ovan går det emellertid lätt att förklara skillnaden geometriskt. I båda fallen svarar systemen mot två räta linjer, och då a ändras parallellförskjuts den ena linjen. I det första fallet är de båda linjerna vinkelräta, och i det andra fallet är de nästan parallella. Det är uppenbart att en obetydlig parallellförskjutning av den ena av två vinkelräta linjer flyttar skärningspunkten obetydligt. Om däremot den ena av två nästan parallella linjer parallellförflyttas obetydligt, så ändras skärningspunktens läge mycket.

Komplexitet

Ett mått på en algoritms *komplexitet* är antalet räkneoperationer som behöver utföras, och vi skall nu studera Gausselimination ur den aspekten. Additioner och subtraktioner tar väsentligt kortare tid att utföra än multiplikationer, vilka i sin tur är ungefär lika tidskrävande som divisioner, så därför skall vi jämställa multiplikationer och divisioner med varandra samt nöja oss med att räkna antalet sådana.

Betrakta ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem med n obekanta, och låt $M(n)$ vara antalet multiplikationer/divisioner som erfordras för att lösa systemet med Gausselimination. Vi skall bestämma $M(n)$ samt studera hur $M(n)$ växer med n.

Vår utgångspunkt är med andra ord en totalmatris av typen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times \\ \times & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & \times \end{array}\right] \tag{1}$$

med n rader och $n+1$ kolonner. Här och i fortsättningen är alla koefficienter, vars exakta värden är oväsentliga för resonemanget, markerade med $\times$. För att transformera matrisen (1) till

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times & \times \end{array}\right], \tag{2}$$

behövs först n divisioner för att erhålla den första raden och sedan lika många multiplikationer (och subtraktioner) för att erhålla var och en av de övriga $n-1$ raderna. Totalt fordrar steget (1) $\to$ (2) alltså n^2 multiplikationer/divisioner.

För att sedan överföra (2) till matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \times \end{array}\right], \tag{3}$$

skall vi lösa ett kvadratiskt delsystem med $n-1$ obekanta, och då åtgår det $M(n-1)$ multiplikationer/divisioner. Slutligen skall matrisen (3) reduceras till

$$
(4) \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \times \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \times \end{array}\right],
$$

och då behövs det en multiplikation (och en subtraktion) för var och en av kolonnerna nr 2 till nr n, dvs. totalt $(n-1)$ multiplikationer.

Genom att summera antalet multiplikationer/divisioner i de olika stegen erhåller vi rekursionsformeln

$$M(n) = n^2 + (n-1) + M(n-1),$$

som gäller även för $n = 1$ om vi sätter $M(0) = 0$. Det följer att

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \big(M(k) - M(k-1)\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(k^2 + (k-1)\big) = \frac{n^3 + 3n^2 - n}{3}.$$

Den dominerande termen i $M(n)$ är $n^3/3$, dvs.

$$\frac{M(n)}{n^3/3} \to 1$$

då $n \to \infty$. Man uttrycker detta genom att säga att $M(n)$ *asymptotiskt* är lika med $n^3/3$. Vi sammanfattar:

Sats 1.7.1 *Vid Gausselimination är antalet multiplikationer/divisioner för ett allmänt kvadratiskt ekvationssystem med n obekanta asymptotiskt lika med $n^3/3$.*

Övningar

1.13 Bestäm antalet additioner/subtraktioner för att lösa ett kvadratiskt system med n obekanta med Gausselimination, och visa att antalet asymptotiskt är $n^3/3$.

Kapitel 2

Matriskalkyl

Matriser är till för att handskas med många tal samtidigt; i det förra kapitlet använde vi oss av dem för att hålla reda på koefficienterna i linjära ekvationssystem. I det här kapitlet skall vi studera matrisbegreppet i detalj. Vi skall införa olika räkneoperationer för matriser och gå igenom de räkneregler som gäller.

2.1 Grundläggande definitioner och räkneregler

Som service till läsaren upprepar vi en del definitioner från kapitel 1.

Definition 2.1.1 En *matris* av *typ* $m \times n$ är en uppsättning av mn stycken *element* arrangerade i m stycken *rader* och n stycken *kolonner*. Matriselementet i rad nr i och kolonn nr j säges befinna sig på *plats* (i, j). I det här kapitlet betecknas elementet på plats (i, j) i en matris A genomgående A_{ij} så att

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mängden av alla $m \times n$-matriser med element i en kropp $\mathbf{K}$ (som i våra exempel nästan alltid är $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$) betecknas $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ eller, om $\mathbf{K}$ framgår av sammanhanget, $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Två matriser A och B är *lika*, vilket skrives $A = B$, om de är av samma typ och $A_{ij} = B_{ij}$ för alla index i, j.

En matris med enbart en rad kallas en *radmatris*, och en matris med enbart en kolonn kallas en *kolonnmatris*.

De m raderna i en $m \times n$-matris A betecknas i tur och ordning A_{1*}, A_{2*}, $\ldots$, A_{m*}, och de n kolonnerna betecknas A_{*1}, A_{*2}, $\ldots$, A_{*n}. Detta innebär att

$$A_{i*} = [A_{i1} \;\; A_{i2} \;\; \ldots \;\; A_{in}] \qquad \text{och} \qquad A_{*j} = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{bmatrix}.$$

Med hjälp av dessa rad- och kolonnmatriser kan vi uttrycka hela matrisen A på följande sätt:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad A = [A_{*1} \;\; A_{*2} \;\; \ldots \;\; A_{*n}]\,.$$

En matris med lika många rader som kolonner kallas *kvadratisk*, och antalet rader i en kvadratisk matris kallas matrisens *ordning*.

Platserna $(1,1)$, $(2,2)$, $\ldots$, (n,n) i en kvadratisk matris A av ordning n kallas för matrisens *diagonal*. Om alla element utanför diagonalen är lika med noll, dvs. om $A_{ij} = 0$ för alla $i \neq j$, kallas matrisen en *diagonalmatris*.

Vi använder beteckningen $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ för att beteckna diagonalmatrisen med diagonalelementen $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

EXEMPEL 2.1.1 I matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

är $A_{1*} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{2*} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och $A_{3*} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. □

Definition 2.1.2 Till varje matris A av typ $m \times n$ tillordnar vi en matris A^t av typ $n \times m$ genom att sätta

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

för alla index i och j. Detta innebär att den j:te raden i A utgör den j:te kolonnen i A^t. Operationen kallas *transponering*, och matrisen A^t kallas den till A *transponerade* matrisen eller kortare A-*transponat*.

Uppenbarligen upphäver två transponeringar varandra, dvs. $(A^t)^t = A$.

EXEMPEL 2.1.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

Definition 2.1.3 En matris A kallas *symmetrisk* om $A = A^t$.

En symmetrisk matris måste naturligtvis vara kvadratisk.

EXEMPEL 2.1.3 Den kvadratiska matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 2 & y \\ 4 & x & 3 \end{bmatrix}$$

är symmetrisk om och endast om $x = y$. □

Definition 2.1.4 Låt A och B vara två matriser i $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$, och låt λ vara ett element i $\mathbf{K}$. *Summan* $A+B$ definieras som den $m\times n$-matris vars element på plats (i, j) är summan av elementen på plats (i, j) i matriserna A och B, och *produkten* λA definieras som den matris av typ $m \times n$ som fås genom att multiplicera samtliga element i A med λ, dvs.

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

Vi sätter vidare $-A = (-1)A$ och $B - A = B + (-A)$. Matrisen $-A$ fås alltså ur A genom att byta tecken på alla element, och i *differensen* $B - A$ är elementet på plats (i, j) differensen av elementen på samma plats i matriserna B och A.

EXEMPEL 2.1.4

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Definition 2.1.5 *Nollmatrisen* 0 (av typ $m \times n$) är den $m \times n$-matris vars samtliga element är 0. (Det finns förstås en nollmatris av varje typ.)

För de hittills införda matrisoperationerna gäller ett antal grundläggande räkneregler, som vi samlar ihop i följande sats.

Sats 2.1.6 *Antag att* A*,* B*,* C *och* 0 *är matriser av samma typ och att* α*,* $\beta \in \mathbf{K}$*. Då gäller*

$$\begin{aligned} A+B &= B+A \\ (A+B)+C &= A+(B+C) \\ A+0 &= A \\ A+(-A) &= 0 \\ 1\cdot A &= A \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A \\ (\alpha+\beta)A &= \alpha A+\beta A \\ \alpha(A+B) &= \alpha A+\alpha B. \end{aligned}$$

Vidare är

$$\begin{aligned} (A+B)^t &= A^t+B^t \\ (\alpha A)^t &= \alpha A^t \end{aligned}$$

Bevis. Man bevisar var och en av räknereglerna genom att verifiera att elementen på en godtycklig plats (i,j) är lika för båda leden. Vi gör detta för den näst sista räkneregeln och överlåter åt läsaren att utföra resterande verifikationer.

$$(A+B)^t_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji}+B_{ji} = A^t_{ij}+B^t_{ij} = (A^t+B^t)_{ij}.$$

□

Exempel 2.1.5 Av ovanstående räkneregler följer att man för att lösa en linjär matrisekvation av typen $2X+A=B$ kan räkna precis som om X, A och B vore reella tal. Vi får förstås $X = \frac{1}{2}(B-A) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. □

Övningar

2.1 Beräkna matriserna $3A$, $A-2B$, A^t och $A+A^t$ om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Motivera i detalj de steg som behövs för att erhålla lösningen till exempel 2.1.5.

2.3 Lös matrisekvationen $2X+4A=6B$, då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.4 A är en kvadratisk matris. Visa att matrisen $A+A^t$ är symmetrisk.

2.5 En kvadratisk matris Q kallas *antisymmetrisk* om $Q^t = -Q$.

a) Visa att om A är kvadratisk så är matrisen $A - A^t$ antisymmetrisk.

b) Visa att varje kvadratisk matris A har en entydig uppdelning som $A = P+Q$, där matrisen P är symmetrisk och matrisen Q är antisymmetrisk.

2.2 Matrismultiplikation

Vi skall definiera produkten AB av två matriser. Produkten kommer bara att vara definierad då matrisen A har lika många kolonner som matrisen B har rader. Definitionen kan vid första anblicken förefalla onaturlig och krånglig, så därför skall vi närma oss den via två specialfall. Samtidigt skall vi försöka motivera definitionen med att den ger oss ett enkelt och kompakt sätt att skriva linjära ekvationssystem. Den fulla nyttan av matrismultiplikation kommer att framgå först längre fram i samband med att vi betraktar linjära avbildningar.

Definition 2.2.1 För matriser $a \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbf{K})$ och $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{K})$ definierar vi *matrisprodukten ab* genom sambandet

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Produkten av sådana matriser är alltså en skalär eller − vilket är samma sak − en 1×1-matris.

Exempel 2.2.1 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 2 - 12 + 15 = 5.$ □

Exempel 2.2.2 Med hjälp av radmatrisen $a = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$ och kolonnmatrisen

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

kan vi nu kort och koncist uttrycka den linjära ekvationen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

som

$$ax = b.$$

□

Definition 2.2.2 Låt A vara en $m \times n$-matris och låt b vara en $n \times 1$-matris, dvs. A har lika många kolonner som kolonnmatrisen b har element. Enligt definitionen ovan är produkterna $A_{1*}b$, $A_{2*}b$, $\ldots$, $A_{m*}b$ mellan raderna i A och kolonnmatrisen b väldefinierade. *Produkten* Ab kan därför definieras av sambandet

$$Ab = \begin{bmatrix} A_{1*}b \\ A_{2*}b \\ \vdots \\ A_{m*}b \end{bmatrix}.$$

Matrisen i högerledet är en kolonnmatris med m element. Produkten av en $m \times n$-matris med en $n \times 1$-matris är alltså en $m \times 1$-matris.

Exempel 2.2.3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

□

Exempel 2.2.4 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan på matrisform skrivas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

eller mer kompakt

$$Ax = b,$$

där A är systemets koefficientmatris, b är högerledsmatrisen och x är kolonnmatrisen av de obekanta. □

Definition 2.2.3 Låt A vara av typ $m \times n$ och B av typ $n \times p$. Eftersom B:s kolonner B_{*1}, B_{*2}, ..., B_{*p} är kolonnmatriser med n element, är produkterna AB_{*1}, AB_{*2}, ..., AB_{*p} definierade enligt definitionen ovan. *Produkten* AB kan därför definieras av sambandet

$$AB = [AB_{*1} \quad AB_{*2} \quad \dots \quad AB_{*p}]\,.$$

Produkten blir en matris av typ $m \times p$.

Om vi nystar upp definitionen, ser vi att elementet på plats (i, j) i matrisen AB ges av formeln

$$(AB)_{ij} = (AB_{*j})_i = A_{i*}B_{*j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Exempel 2.2.5 Produkten

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

är en matris av typ 2×4. Kolonnerna i produkten består i tur och ordning av matriserna

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 36 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 31 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Följaktligen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 16 & 18 & 12 \\ 36 & 18 & 31 & 26 \end{bmatrix}.$$

□

Definition 2.2.4 *Enhetsmatrisen* E av ordning n definieras av att $E_{ii} = 1$ för alla i och $E_{ij} = 0$ för alla $i \neq j$.

Det finns förstås en enhetsmatris av varje ordning, men eftersom enhetsmatrisens ordning nästan alltid framgår av sammanhanget, kan vi utan risk använda samma beteckning E för alla enhetsmatriser.

I följande sats ges de grundläggande räknereglerna för matrismultiplikation.

Sats 2.2.5 *Förutsatt att de inblandade matrisernas typer är sådana att produkterna är väldefinierade gäller följande räkneregler:*

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) \\
A(B+C) &= AB + AC \\
(A+B)C &= AC + BC \\
EA &= A \\
AE &= A \\
(\lambda A)B &= \lambda(AB) = A(\lambda B) \\
(AB)^t &= B^t A^t
\end{aligned}
$$

Observera att vid transponering kastas faktorernas ordning om.

Bevis. Vi visar den associativa lagen för matrismultiplikation samt regeln för transponering av produkter och lämnar bevisen av övriga regler som enkla övningar åt läsaren.

$$
\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_k \left(\sum_l A_{il} B_{lk} \right) C_{kj} = \sum_k \sum_l A_{il} B_{lk} C_{kj} \\
&= \sum_l \sum_k A_{il} B_{lk} C_{kj} = \sum_l A_{il} \left(\sum_k B_{lk} C_{kj} \right) = \sum_l A_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}.
\end{aligned}
$$

$$
(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k B^t_{ik} A^t_{kj} = (B^t A^t)_{ij}. \qquad \square
$$

Det är viktigt att observera att matrismultiplikationen inte är kommutativ, dvs. att AB och BA i allmänhet är olika.

För det första behöver inte BA vara definierad för att AB är det; om A är av typ $m \times n$ och B är av typ $n \times p$ så att produkten AB är definierad, så måste ju p vara lika med m för att även produkten BA skall vara definierad.

För det andra kan AB och BA vara av olika typ, ty om A är av typ $m \times n$ och B är av typ $n \times m$ så att båda produkterna är definierade, så är AB av typ $m \times m$ och BA av typ $n \times n$, dvs. de är av olika typ såvida inte $m = n$. Nödvändigt och tillräckligt för att båda produkterna skall vara definierade och av samma typ är således att matriserna A och B är kvadratiska av samma ordning.

För det tredje så är AB och BA i allmänhet olika även om A och B har samma ordning.

Exempel 2.2.6 För

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

är

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{medan} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

I exempel 2.2.6 har vi $AB = 0$ trots att både $A \neq 0$ och $B \neq 0$. Det följer att annuleringslagen inte gäller för matriser, dvs. det räcker inte med $B \neq 0$ för att vi ur $AB = CB$ skall kunna dra slutsatsen att $A = C$.

Definition 2.2.6 Vi definierar *potenserna* A^0, A^1, A^2,... till en kvadratisk matris A på det naturliga sättet genom att sätta $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, osv. Den formella definitionen är förstås rekursiv och lyder

$$A^n = \begin{cases} E, & \text{om } n = 0; \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{om } n \text{ är ett positivt heltal.} \end{cases}$$

Naturligtvis gäller de vanliga potenslagarna

$$\begin{aligned} A^{m+n} &= A^m A^n \qquad \text{och} \\ (A^m)^n &= A^{mn} \end{aligned}$$

för icke-negativa heltalsexponenter m och n.

Multiplikation av partitionerade matriser

Matriser A och B av samma typ, som partitionerats i delmatriser A_{ij} och B_{ij} på samma sätt, kan uppenbarligen adderas enligt regeln $[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]$. Av större intresse är emellertid att partitionerade matriser kan multipliceras precis som om delmatriserna vore vanliga matriselement. Låt nämligen A och B vara matriser för vilka produkten AB är definierad, och antag att A är partitionerad i $p \cdot q$ delmatriser A_{ij} och B är partitionerad i $q \cdot r$ delmatriser B_{jk} på ett sådant sätt att samtliga produkter $A_{ij}B_{jk}$ är definierade; då är

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \dots & B_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pr} \end{bmatrix},$$

där delmatriserna C_{ik} beräknas enligt

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}.$$

Exempelvis är

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Exempel 2.2.7

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [4] \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + [1][4] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 23 \end{bmatrix}.$$

□

Matrisekvationen AX = B

Låt A vara en given $m \times n$-matris, X en obekant $n \times p$-matris och B en given $m \times p$-matris. Matrisekvationen $AX = B$ är enligt definition 2.2.3 ekvivalent med ett system av p stycken matrisekvationer

$$\begin{cases} AX_{*1} = B_{*1} \\ AX_{*2} = B_{*2} \\ \quad\vdots \\ AX_{*p} = B_{*p}, \end{cases}$$

dvs. ett system bestående av p stycken linjära ekvationssystem, som samtliga har samma koefficientmatris A. Vi kan därför lösa matrisekvationen genom att simultant lösa dessa linjära ekvationssystem med Gausselimination.

Exempel 2.2.8 Matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

är ekvivalent med de tre ekvationssystemen

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12} + 2x_{22} = 5 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{13} + 2x_{23} = 2 \\ 3x_{13} + 4x_{23} = 6, \end{cases}$$

som vi löser simultant genom att utföra elementära radoperationer i matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Vi erhåller därvid följande matriser

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right],$$

och av den sista följer att

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Metoden i exempel 2.2.8 fungerar naturligtvis generellt, dvs. för att lösa matrisekvationen

$$AX = B$$

använder vi Gausselimination på matrisschemat

$$\left[A \mid B\right].$$

Naturligtvis kan matrisekvationen vara olösbar – detta är fallet om man under eliminationsprocessen erhåller en rad av typen $[0 \mid b]$ med $b \neq 0$. Den kan också ha oändligt många lösningar. Matrisekvationen är entydigt lösbar om och endast om eliminationerna, sedan eventuella nollrader strukits, leder fram till en matris av typen

$$\left[E \mid C\right],$$

i vilket fall lösningen är $X = C$.

Övningar

2.6 Beräkna produkterna AB och BA i de fall då de existerar för

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}$

2.7 Beräkna matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} [b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_n] \,.$$

2.8 Låt $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Beräkna matrisprodukterna

a) xAy^t b) xAx^t.

Bestäm vidare en symmetrisk matris B så att

c) $2x_1^2 + 3x_2^2 = xBx^t$ d) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 = xBx^t$.

2.9 Beräkna matrisprodukten

$$[x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

2.10 Beräkna D^n då $D = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$.

2.11 Beräkna A^2, A^3 och A^4 då $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.12 Visa att $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$.

2.13 A och B är kvadratiska matriser av samma ordning. Förenkla uttrycken

a) $(A + B)^2$ b) $(A + B)(A - B)$.

2.14 Antag att matriserna A och B kommuterar, dvs. att $AB = BA$. Utveckla produkterna

a) $(A + B)^2$ b) $(A + B)(A - B)$ c) $(A + B)^n$

2.15 I allmänhet gäller förstås att $(AB)^n \neq A^nB^n$. Ge ett tillräckligt villkor för att likhet skall gälla.

2.16 Matrisprodukten ABC förutsätts definierad. Skriv $(ABC)^t$ i termer av A^t, B^t och C^t.

2.17 Antag att de symmetriska matriserna A och B kommuterar. Visa att matrisen AB är symmetrisk.

2.18 A är en godtycklig matris. Visa att matrisen AA^t är symmetrisk.

2.19 Lös matrisekvationen $AX = B$ då

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

2.20 Lös matrisekvationen $XA = B$ då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

[Ledning: Ekvationen är ekvivalent med $A^tX^t = B^t$.]

2.21 Lös för $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ekvationerna

a) $AX = E$ b) $XA = E$.

2.22 Beräkna matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

med koefficienter i kroppen $\mathbf{Z}_2$.

2.3 Matrisinvers

Kvadratiska matriser av ordning n fungerar i många avseenden som heltal; de kan adderas, subtraheras och multipliceras, det finns ett nollelement och ett enhetselement. En viktig skillnad är förstås att den kommutativa lagen och annuleringslagen inte gäller för matrismultiplikation.

I det här avsnittet skall vi undersöka vilka matriser som är inverterbara samt visa hur man beräknar matrisinverser. Eftersom annuleringslagen inte gäller, kan inte alla nollskilda matriser vara inverterbara. Exempelvis kan inte matrisen B i exempel 2.2.6 ha någon invers B^{-1}, ty i så fall skulle vi ur $AB = 0$ få att $A = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = 0B^{-1} = 0$, vilket strider mot att $A \neq 0$ i nämnda exempel.

Först bör vi emellertid definiera vad som menas med inversen till en matris. Eftersom inversen a^{-1} till ett nollskilt reellt tal a är lösningen till ekvationen $ax = 1$, verkar det naturligt att definiera inversen till en kvadratisk matris A som lösningen − om den existerar − till matrisekvationen

$$AX = E. \tag{1}$$

För att definitionen skall vara meningsfull måste lösningen vara unik. En extra svårighet, som inte existerar för reella tal, är att matrismultiplikationen inte är kommutativ. Det är därför inte självklart att en lösning till (1) också satisfierar matrisekvationen

$$XA = E. \tag{2}$$

Vi skall emellertid visa att så är fallet. Som ett första steg på vägen börjar vi med följande sats.

Sats 2.3.1 *Antag att A, X och Y är kvadratiska matriser av samma ordning och att*

$$AX = YA = E.$$

Då är $X = Y$.

Bevis. Med utnyttjande av den associativa lagen för multiplikation får vi

$$Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X.$$ □

Sats 2.3.1 medför att det för varje matris A finns högst en matris X som uppfyller $AX = XA = E$. Vi kan därför tillåta oss att göra följande definition.

Definition 2.3.2 Matrisen A kallas *inverterbar* om det finns en matris X så att $AX = XA = E$, och den i så fall unika matrisen X kallas *inversen* till A och betecknas A^{-1}.

Per definition är alltså

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

för alla inverterbara matriser. En inverterbar matris kallas även *icke-singulär*, och en icke-inverterbar matris kallas *singulär*.

Av definitionen följer omedelbart att om A är inverterbar så är också A^{-1} inverterbar med

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Sambandet mellan invertering och multiplikation samt invertering och transponering ges av följande satser.

Sats 2.3.3 *Antag att A och B är inverterbara matriser av samma ordning. Då är produkten AB inverterbar och*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Observera att faktorernas ordning kastas om vid invertering.

Bevis. Enligt definitionen räcker det att verifiera att matrisen $X = B^{-1}A^{-1}$ satisfierar matrisekvationen $ABX = XAB = E$. Insättning ger

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AE)A^{-1}\\ &= AA^{-1} = E,\end{aligned}$$

och analogt fås $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$. □

Sats 2.3.4 *Om matrisen A är inverterbar, så är också transponatet A^t inverterbart och*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Transponering kommuterar alltså med invertering.

Bevis. Påståendet följer av att $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E$ och att $(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = E^t = E$. □

Matrisekvationen $AX = E$ kan tolkas som ett antal linjära ekvationssystem med A som koefficientmatris och E:s kolonner som högerled. Sats 1.6.3 ger därför ett samband mellan matrisekvationen och $\operatorname{rang} A$, och genom att utnyttja detta samband får vi följande kriterium för inverterbarhet.

Sats 2.3.5 *Följande fyra villkor är ekvivalenta för en kvadratisk matris A av ordning n.*

(α) *A är inverterbar.*

(β) *Matrisekvationen $AX = E$ har en lösning.*

(γ) *Matrisekvationen $XA = E$ har en lösning.*

(δ) $\operatorname{rang} A = n$.

Anmärkning. Av ekvivalensen $(\beta) \Leftrightarrow (\gamma)$ och sats 2.3.1 följer att om ekvationen $AX = E$ är lösbar, så är lösningen nödvändigtvis unik och lika med inversen A^{-1}. En analog utsaga gäller förstås för den andra ekvationen $XA = E$. För att bestämma inversen räcker det med andra ord att utnyttja ”halva” villkoret i inversens definitionen, dvs. att lösa den ena av ekvationerna (1) och (2).

Bevis. Vi skall visa att villkoren är ekvivalenta genom att visa implikationerna $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$, $(\delta) \Rightarrow (\beta)$, $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ och $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$.

$(\gamma) \Rightarrow (\delta)$: Antag att matrisen X uppfyller $XA = E$. Vi skall visa att det homogena ekvationssystemet $Ax = 0$ endast har den triviala lösningen $x = 0$, ty detta medför enligt sats 1.6.3 att $\operatorname{rang} A = n$. Multiplicera därför ekvationen $Ax = 0$ från vänster med matrisen X; detta ger $XAx = X0$, dvs. $Ex = 0$, dvs. $x = 0$.

$(\delta) \Rightarrow (\beta)$: Enligt sats 1.6.3 följer av (δ) att ekvationssystemet $Ax = b$ är lösbart för varje högerled b. Låt $X^{(j)}$ (skriven som kolonnvektor) beteckna lösningen till systemet $Ax = E_{*j}$ och sätt $X = \left[\, X^{(1)}\ X^{(2)}\ \ldots\ X^{(n)} \,\right]$, där talet n är lika med A:s ordning. För matrisen X gäller då

$$AX = \left[\, AX^{(1)}\ AX^{(2)}\ \ldots\ AX^{(n)} \,\right] = \left[\, E_{*1}\ E_{*2}\ \ldots\ E_{*n} \,\right] = E.$$

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$: Antag att $AX = E$. Den redan visade implikationen $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$, med ombytta roller för A och X, ger att $\operatorname{rang} X = n$. Av den likaså bevisade implikationen $(\delta) \Rightarrow (\beta)$ följer därför att det finns en matris Y med egenskapen att $XY = E$. Vi har med andra ord $AX = XY = E$. Sats 2.3.1 ger nu att $A = Y$, dvs. det gäller att $AX = XA = E$.

$(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$: Trivialt. □

Om matrisen A är inverterbar, så får man den formella lösningen till matrisekvationen

$$AX = B$$

genom att multiplicera ekvationen från vänster med A^{-1}, vilket ger

$$X = A^{-1}B.$$

Speciellt har alltså det kvadratiska linjära ekvationssystemet

$$Ax = b$$

lösningen $x = A^{-1}b$.

Beräkning av matrisinversen.

Enligt anmärkningen efter sats 2.3.5 får vi inversen till en inverterbar matris A genom att lösa matrisekvationen

$$AX = E,$$

och som vi redan tidigare påpekat kan en dylik matrisekvation uppfattas som ett antal linjära ekvationssystem, alla med samma koefficientmatris A. För att lösa matrisekvationen utför vi Gausselimination på matrisen

$$[A \mid E]$$

till dess att vi erhåller matrisen

$$[E \mid X],$$

i vilken delmatrisen X är den sökta inversen A^{-1}.

Om den ursprungliga matrisen A ej skulle vara inverterbar, så visar sig detta under räkningarnas gång; i så fall erhålls nämligen en nollrad i den vänstra delmatrisen.

Exempel 2.3.1 För att beräkna inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

utför vi radoperationer på matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

och erhåller då successivt

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 2 & 0 & -7 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Det följer att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

Antalet aritmetiska operationer som behövs för att invertera en matris kan beräknas på samma sätt som vi i avsnitt 1.7 beräknade antalet operationer för att lösa ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem. Det visar sig att det behövs n^3 multiplikationer/divisioner (och $n(n-1)^2$ additioner/subtraktioner) för att invertera en $n \times n$-matris medelst Gausselimination. Det är med andra ord ca tre gånger så arbetsamt att invertera en matris A som att lösa systemet $Ax = b$ med elimination.

Övningar

2.23 Undersök om följande matriser är inverterbara och bestäm i förekommande fall inversen.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

2.24 För vilka värden på den reella parametern s är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ s & -2 & 1 \\ 1 & s & s+1 \end{bmatrix}$$

inverterbar?

2.25 Bestäm inversen till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ s & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uppfattad som matris med koefficienter i kroppen av rationella funktioner.

2.26 Matriserna A, B och C är inverterbara och av samma ordning. Beräkna inversen $(ABC)^{-1}$ uttryckt i A^{-1}, B^{-1} och C^{-1}.

2.27 Ange C^n på så enkel form som möjligt då $C = A^{-1}BA$.

2.28 För inverterbara matriser A och negativa heltal n definierar vi potensen A^n genom att sätta $A^n = (A^{-1})^{-n}$. Visa att potenslagarna

$$A^{m+n} = A^m A^n \qquad \text{och} \qquad (A^m)^n = A^{mn}$$

gäller för godtyckliga heltalsexponenter m och n.

2.29 En kvadratisk matris N kallas *nilpotent* om det finns ett positivt heltal m så att $N^m = 0$. Visa att om N är nilpotent så är matrisen $E+N$ inverterbar och

$$(E+N)^{-1} = E - N + N^2 - \cdots + (-1)^{m-1}N^{m-1}.$$

2.30 Visa att matrisen

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{bmatrix}$$

är nilpotent och beräkna sedan med hjälp av föregående övning inversen till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}.$$

2.31 Beräkna inversen till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

med koefficienter i kroppen $\mathbf{Z}_2$.

2.32 Visa att det räcker med n^3 multiplikationer/divisioner för att invertera en $n \times n$-matris.

2.33 Betrakta en partitionerad matris

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

där uppdelningen är sådan att matriserna A_{11} och A_{22} är kvadratiska. Visa att matrisen A är inverterbar om och endast om matriserna A_{11} och A_{22} är inverterbara, och att i så fall

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

2.34 Använd resultatet i föregående övning för att invertera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Elementära matriser

Definition 2.4.1 En kvadratisk matris A kallas *övertriangulär* om alla element under diagonalen är 0, dvs. om $A_{ij} = 0$ för alla $i > j$.

Om istället alla element ovanför diagonalen är 0 kallas matrisen *undertriangulär*. Uppenbarligen är A undertriangulär om och endast om A^t är övertriangulär.

En matris kallas *triangulär* om den är antingen undertriangulär eller övertriangulär. Om dessutom alla diagonalelement är 1, kallar vi den triangulära matrisen *normerad*.

Produkten av två undertriangulära matriser är undertriangulär, och om båda faktorerna dessutom är normerade så är produkten också normerad.

Av sats 2.3.5 följer lätt att en triangulär matris är inverterbar om och endast om samtliga diagonalelement är nollskilda. Det är vidare lätt att inse att inversen också är triangulär. Speciellt är varje normerad undertriangulär matris inverterbar, och inversen är också normerad och undertriangulär.

Naturligtvis är varje kvadratisk trappmatris övertriangulär, men omvändningen gäller ej.

Definition 2.4.2 De matriser som fås genom att permutera raderna i en enhetsmatris kallas *permutationsmatriser*.

Exempel 2.4.1 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är en permutationsmatris av ordning 4. □

Om en matris A multipliceras från vänster med en permutationsmatris permuteras raderna i A. Härav följer speciellt att produkten $P_1 P_2$ av två permutationsmatriser är en permutationsmatris.

Om P är en permutationsmatris så är också transponatet P^t en permutationsmatris, och det är lätt att verifiera att $P^tP = E$. Varje permutationsmatris P är således inverterbar, och inversen $P^{-1} = P^t$ är också en permutationsmatris.

I avsnitt 1.4 definierade vi de elementära radoperationerna. Varje sådan operation svarar på ett naturligt sätt mot en matris.

Definition 2.4.3 Med en *elementär matris* av ordning m menas en matris som fås genom att tillämpa en elementär radoperation på raderna i enhetsmatrisen av ordning m.

Genom att multiplicera den i:te raden i enhetsmatrisen med den nollskilda skalären c får vi en *elementär diagonalmatris*, som i resten av det här kapitlet kommer att betecknas $D(i;c)$. (Diagonalmatrisens ordning framgår inte av beteckningen utan antas vara underförstådd.) $D(i;c)$ är med andra ord en diagonalmatris vars element på plats (i,i) är c och vars alla andra diagonalelement är 1.

Naturligtvis är $D(i;c)^{-1} = D(i;c^{-1})$, så inversen till en elementär diagonalmatris är också elementär.

Då en matris A multipliceras från vänster med $D(i;c)$ multipliceras den i:te raden i A med c, medan övriga rader i A lämnas oförändrade.

Då två rader i en enhetsmatris byter plats med varandra erhålles en *elementär permutationsmatris*. Vi använder beteckningen $P(i,j)$ för den permutationsmatris som erhålles då den i:te och den j:te raden byter plats. (Vi tillåter att $i = j$ i vilket fall förstås $P(i,i)$ är enhetsmatrisen.)

Varje elementär permutationsmatris är symmetrisk och sin egen invers, dvs.

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j) = P(i,j)^t = P(j,i).$$

Då en matris A vänstermultipliceras med $P(i,j)$ byter rad i och rad j i A plats med varandra, medan övriga rader i A förblir oförändrade. Vänstermultiplikation med elementära permutationsmatriser svarar med andra ord mot den andra typen av elementära radoperationer.

Produkten av elementära permutationsmatriser är förstås en permutationsmatris. Omvänt är varje permutationsmatris en produkt av elementära permutationsmatriser – detta följer av att varje permutation kan erhållas som en sammansättning av permutationer som bara permuterar två element i taget (se Appendix).

De *elementära triangulära matriserna* är förstås direkt relaterade till den tredje typen av elementära radoperationer och fås genom att i enhetsmatrisen addera en multipel av en rad till någon annan rad. Vi använder beteckningen $R(i,j;c)$ för den matris som fås då den j:te raden multiplicerad med c adderas till den i:te raden. (Här är $i \neq j$.)

I matrisen $R(i, j; c)$ är alla diagonalelement lika med 1 och alla andra element är lika med 0, förutom elementet på plats (i, j) som är c. (Konstanten c får naturligtvis också vara 0, och som vanligt framgår inte matrisens ordning av beteckningen.) Matrisen är förstås en normerad triangulär matris, och man verifierar enkelt att $R(i, j; c)^{-1} = R(i, j; -c)$. Vidare kommuterar två matriser $R(i_1, j; c_1)$ och $R(i_2, j; c_2)$ med samma andra index j med varandra.

Om en matris A vänstermultipliceras med $R(i, j; c)$, ersätts den i:te raden i A med $A_{i*} + cA_{j*}$ medan övriga rader lämnas oförändrade.

Exempel 2.4.2 Då ordningen är 3 är

$$R(1, 3; 6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6\cdot 3 & 3+6\cdot 2 & 4+6\cdot 1 & 5+6\cdot 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

Om $i > j$ så är matrisen $R(i, j; c)$ undertriangulär. För den speciella produkten

$$\prod_{i=j+1}^{m} R(i, j; c_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{j+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_m & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

inför vi beteckningen $R(j; c_{j+1}, \dots, c_m)$. Eftersom matriserna i produkten kommuterar med varandra följer det ur formeln för $R(i, j; c)^{-1}$ att

$$R(j; c_{j+1}, \dots, c_m)^{-1} = R(j; -c_{j+1}, \dots, -c_m).$$

Varje normerad undertriangulär matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

kan skrivas som en produkt av elementära matriser, nämligen

$$A = R(1; A_{21}, \ldots, A_{m1})\, R(2; A_{32}, \ldots, A_{m2}) \,\cdots\, R(m-1; A_{m\,m-1}).$$

Genom att invertera produkten får vi följande formel för inversen till A

$$A^{-1} = R(m-1; -A_{m\,m-1}) \,\cdots\, R(2; -A_{32}, \ldots, -A_{m2})\, R(1; -A_{21}, \ldots, -A_{m1}).$$

Vi har därigenom ett nytt bevis, som inte bygger på sats 2.3.5, för att varje normerad undertriangulär matris är inverterbar.

Radekvivalens

Mot varje elementär radoperation på en matris A svarar en elementär matris, och den elementära radoperationen kan realiseras genom att matrisen A multipliceras från vänster med motsvarande elementära matris. Eftersom två matriser per definition är radekvivalenta om det finns en följd av elementära radoperationer som överför den ena matrisen i den andra, har vi nu följande karakterisering av radekvivalens.

Sats 2.4.4 *Två matriser A och B av samma typ är radekvivalenta om och endast om det finns elementära matriser $R_1, R_2, \ldots, R_p$ så att*

$$R_p \cdots R_2 R_1 A = B.$$

Övningar

2.35 Skriv matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som en produkt av elementära permutationsmatriser.

2.36 Invertera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

genom att först skriva den som en produkt av elementära matriser.

2.37 Visa att för varje permutationsmatris P är $PP^t = E$.

2.5 Faktorisering

Enligt sats 1.4.4 är varje matris radekvivalent med en trappmatris. Sats 2.4.4 innebär därför att varje matris A har en faktorisering

$$A = R_p \cdots R_1 T,$$

där matriserna R_i är elementära och T är en trappmatris. Genom att omordna och multiplicera ihop de elementära matriserna på lämpligt sätt erhåller vi följande faktoriseringsresultat.

Sats 2.5.1 *Varje matris A kan faktoriseras*

$$A = PLT,$$

där P är en permutationsmatris, L är en normerad undertriangulär matris och T är en trappmatris.

Anmärkning. Faktoriseringen $A = PLT$ är inte entydig, bl. a. beroende på att man i allmänhet kan variera permutationsmatrisen P. Däremot är trappmatrisen T entydigt bestämd av A och P, och om rang $A \geq m - 1$, där m är antalet rader i A, är även den normerade undertriangulära matrisen L unik. (Se övning 2.43.)

Bevis. Satsen följer av ett omsorgsfullt studium av valet av radoperationer vid Gausselimination. Vi bevisar den medelst induktion i antalet rader m hos A.

Fallet $m = 1$ är förstås trivialt ($P = L = [1]$ och $T = A$). Så antag att påståendet är sant för alla matriser med $m - 1$ rader, och låt A vara en matris med m rader. Om A är nollmatrisen, så tar vi förstås $P = L = E$ och $T = 0$, så antag därför att $A \neq 0$. Låt k vara index för den första nollskilda kolonnen i A, och låt i vara ett radindex som uppfyller $A_{ik} \neq 0$. Genom att multiplicera matrisen A med den elementära permutationsmatrisen $P_1 = P(1, i)$ permuterar vi raderna 1 och i i A. I matrisen

$$A' = P_1 A$$

är därför elementet $A'_{1k} \neq 0$ medan de $k - 1$ första kolonnerna fortfarande är noll. Sätt nu $c_j = -A'_{jk}/A'_{1k}$, $\;c = \begin{bmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_m \end{bmatrix}^t$ och

$$R_1 = R(1; c_2, c_3, \dots, c_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & E_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Genom att vänstermultiplicera A' med R_1 får vi en matris, där samtliga element i den k:te kolonnen utom det översta är 0, och de $k - 1$ första kolonnerna är förstås fortfarande 0. Vi kan därför partitionera produkten R_1P_1A på följande sätt

$$R_1P_1A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & A'' \end{bmatrix},$$

där $a = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ är en radmatris med k element och $\alpha = A'_{1k} \neq 0$.

Enligt induktionsantagandet har A'' en faktorisering

$$A'' = P''L''T''$$

där P'' är en permutationsmatris, L'' är en normerad undertriangulär matris och T'' är en trappmatris. Sätt

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'' \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'' \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & T'' \end{bmatrix}.$$

Då är P_2 en permutationsmatris, L_2 en normerad undertriangulär matris och T en trappmatris, och

$$P_2L_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & T'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & P''L''T'' \end{bmatrix} = R_1P_1A,$$

dvs.

$$A = P_1^{-1}R_1^{-1}P_2L_2T.$$

Nu är

$$\begin{aligned} R_1^{-1}P_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & E_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & P'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(P'')^{-1}c & E_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= P_2L_3, \end{aligned}$$

där

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(P'')^{-1}c & E_{m-1} \end{bmatrix}$$

är normerad och undertriangulär. Det följer att

$$A = P_1^{-1}P_2L_3L_2T,$$

och eftersom $P = P_1^{-1}P_2 = P_1P_2$ är en permutationsmatris och $L = L_3L_2$ är en normerad undertriangulär matris, är faktoriseringen av A genomförd. Därmed är induktionssteget klart, och satsen är bevisad. □

För kvadratiska matriser får vi följande korollarium.

Korollarium 2.5.2 *Varje kvadratisk matris A kan faktoriseras*

$$A = PLU,$$

där P är en permutationsmatris, L är en normerad undertriangulär matris och U är en övertriangulär matris.

Beteckningarna L och U kommer från de engelska orden ”lower triangular” resp. ”upper triangular”.

Som framgår av beviset är faktoriseringen $A = PLT$ en biprodukt av Gausseliminationsalgoritmen. Det finns en faktorisering med $P = E$ om det är möjligt att överföra A till en radekvivalent trappmatris utan att använda radbyten. Antag att så är fallet, dvs. att $A = LT$. Genom att operera på schemat $[A \,|\, E]$ med den typ av elementära radoperationer som innebär att en multipel av en rad adderas till en annan rad kan vi erhålla trappmatrisen T i vänsterdelen av schemat. Eftersom $T = L^{-1}A$ innebär detta att hela schemat måste ha multiplicerats från vänster med matrisen L^{-1}. Slutschemat är därför $[T \,|\, L^{-1}]$, dvs. högerdelen innehåller inversen till matrisen L.

Exempel 2.5.1 För att LU-faktorisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

använder vi Gausselimination på matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

och erhåller då

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Härav fås

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

och

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Man kan utnyttja faktoriseringen $A = LU$ för att lösa det linjära ekvationssystemet

$$Ax = b.$$

Substitutionen $y = Ux$ ger nämligen $Ax = LUx = Ly = b$, varför systemet är ekvivalent med

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases}$$

Detta system består av två triangulära system, och man kan därför lätt bestämma först y och sedan x med återsubstitution.

Exempel 2.5.2 Använd LU-faktoriseringen i exempel 2.5.1 för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Lösning: För koefficientmatrisen A gäller

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet är därför ekvivalent med följande två system

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_1 + y_2 = 9 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_2 - x_3 = y_2 \\ -2x_3 = y_3. \end{cases}$$

Det första systemet ger $y_1 = 6$, $y_2 = 3$ och $y_3 = -2$. Därefter löser vi det andra systemet och får i tur och ordning $x_3 = 1$, $x_2 = 2$ och $x_1 = -1$. $\square$

Övningar

2.38 a) LU-faktorisera matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Utnyttja denna faktorisering för att lösa ekvationssystemt

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 11. \end{cases}$$

2.39 Visa att matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ inte kan skrivas på formen LU.

2.40 a) Antag att 3×3-matrisen A kan LU-faktoriseras. Skriv ut de nio ekvationer som fås för matriselementen av matrisidentiteten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

och visa att man ur dessa lätt kan beräkna elementen i L och U.

b) Utnyttja resultatet i a) för att LU-faktorisera matrisen i övning 2.38.

2.41 Visa att om matrisen A är inverterbar och har en faktorisering $A = LU$, så är faktoriseringen entydig.
[Ledning: $L_1U_1 = L_2U_2$ medför att $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.]

2.42 Med de *ledande delmatriserna* till en kvadratisk matris A av ordning n menas matriserna

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

där $m = 1, 2, \dots, n$. Visa att om alla ledande delmatriser är inverterbara, så har A en (unik) LU-faktorisering.

2.43 Om matrisen A kan faktoriseras $A = LT$, så är trappmatrisen T entydigt bestämd, medan den normerade undertriangulära matrisen L är entydigt bestämd om $\operatorname{rang} A \geq m - 1$, där m är antalet rader i A.

Bevisa detta genom att först visa följande hjälpresultat:

Om $LT_1 = T_2$ och $\operatorname{rang} T_1 = p$, så är $T_1 = T_2$ och

$$L = \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & L' \end{bmatrix},$$

där L' är en godtycklig normerad undertriangulär matris av ordning $m - p$. Speciellt är alltså $L = E$ om $\operatorname{rang} T_1 \geq m - 1$.
[Ledning: Använd induktion i antalet rader m hos T_1.]

Kapitel 3

Vektorrum

I elementär geometri och fysik är en vektor en storhet som har såväl storlek som riktning. Välbekanta exempel på sådana riktade storheter är parallellförflyttningar, krafter och elektromagnetiska fält. Man brukar åskådliggöra vektorer med pilar eller riktade sträckor, och geometriskt kan man också definiera en vektor som en ekvivalensklass av riktade sträckor. Vi går inte närmare in på själva definitionen här − huvudsaken är att man kan räkna med vektorer, och att dessa räkningar följer vissa enkla räknelagar. I det här kapitlet skall vi nämligen ta fasta på dessa räknelagar och bortse från specifika tolkningar av vektorbegreppet. Vi kommer således att generalisera vektorbegreppet på så sätt att vi med ett vektorrum kommer att mena en godtycklig mängd av objekt som kan adderas och multipliceras med skalärer enligt bestämda räkneregler, vilka naturligtvis kommer att preciseras.

Det finns två goda skäl att studera allmänna vektorrum − det finns många viktiga konkreta exempel och de har många intressanta egenskaper.

3.1 Vektorrum

Definitioner och grundläggande egenskaper

Definition 3.1.1 Ett *vektorrum* V över en kropp $\mathbf{K}$ är en icke-tom mängd, vars element kan adderas och multipliceras med skalärer, dvs. med element i kroppen $\mathbf{K}$, på ett sådant sätt att

(α) *summan* $u + v$ av två element i V är ett element i V;

(β) *produkten* αv av en skalär α i $\mathbf{K}$ och ett element v i V är ett element i V;

(γ) V innehåller ett speciellt element $\mathbf{0}$, kallat *nollelementet* eller *nollvektorn*;

(δ) till varje element v i V hör ett element $-v$ i V;

(ϵ) följande räkneregler är uppfyllda för alla u, v, $w \in V$ och alla α, $\beta \in \mathbf{K}$:

(i) $$u + v = v + u$$

(ii) $$u + (v + w) = (u + v) + w$$

(iii) $$v + \mathbf{0} = v$$

(iv) $$v + (-v) = \mathbf{0}$$

(v) $$1v = v$$

(vi) $$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$$

(vii) $$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

(viii) $$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Elementen i ett vektorrum kallas *vektorer*. I stället för vektorrum säger man också *linjärt rum*.

Om $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ kallas vektorrummet *reellt*, och om $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ kallas det *komplext*. Vi kommer huvudsakligen att betrakta reella och komplexa vektorrum, men allt i det här kapitlet fungerar för vektorrum över godtyckliga kroppar utan att för den skull bevisen blir mer komplicerade.

Det är endast i det här avsnittet som vi skriver nollvektorn med fet stil för att undvika sammanblandning mellan nollvektorn och skalären noll. I kommande avsnitt kommer vi att beteckna nollvektorn med 0 eftersom det alltid kommer att framgå av sammanhanget om det är vektorn eller skalären som avses.

Man skriver $u - v$ istället för $u + (-v)$ och kallar $u - v$ för *differensen* av vektorerna u och v.

Vi skall strax ge ett antal konkreta exempel på vektorrum, men först redovisar vi några konsekvenser av räknereglerna ovan.

Påstående 3.1.2 *Låt V vara ett vektorrum. För alla $v \in V$ och alla skalärer α är*

(a) $$0\,v = \mathbf{0}$$

(b) $$\alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Bevis. (a) Genom att i tur och ordning utnyttja räknereglerna (iii), (iv), (ii), (v), (vii), (v) och (iv) får vi

$$\begin{aligned} 0\,v &= 0\,v + \mathbf{0} = 0\,v + (v - v) = (0\,v + v) - v = (0\,v + 1v) - v \\ &= (0 + 1)v - v = 1\,v - v = v - v = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(b) På grund av (a) är $0\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Med hjälp av (vi) får vi därför

$$\alpha\,\mathbf{0} = \alpha(0\,\mathbf{0}) = (\alpha 0)\mathbf{0} = 0\,\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$ □

Observera att av (a) i satsen följer att nollvektorn är unik i den meningen att om $\mathbf{0}'$ är en annan vektor som uppfyller villkoren (iii) och (iv), så är $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

Påstående 3.1.3 *För varje vektor v i ett vektorrum V är $-v = (-1)v$. Speciellt följer det alltså att vektorn $-v$ är entydigt bestämd av v.*

Bevis. Genom att i tur och ordning utnyttja (iii), (iv), (ii), (v), (vii), 3.1.2 (a), 3.1.2 (a), (v), (vii) och (v) får vi

$$\begin{aligned}(-1)v &= (-1)v + \mathbf{0} = (-1)v + (v - v) = ((-1)v + v) - v \\ &= ((-1)v + 1v) - v = (-1+1)v - v = 0\,v - v \\ &= \mathbf{0} - v = 0(-v) + 1(-v) = (0+1)(-v) = 1(-v) = -v.\end{aligned}$$ □

Anmärkning. Vi kunde ha förenklat beviset något genom att också använda kommutativiteten (i). Slutklämmen hade då blivit $\mathbf{0} - v = -v + \mathbf{0} = -v$. Det finns dock en liten poäng med att visa påståendena 3.1.2 och 3.1.3 utan att utnytta kommutativitet. Med hjälp av dessa kan man nämligen bevisa att den kommutativalagen (i) följer ur de övriga lagarna (ii)–(viii) (se övning 3.4).

Påstående 3.1.4 *Ekvationen $x + u = v$, där u och v är vektorer i vektorrummet V, har unik lösning $x = v - u$.*

Bevis. Addera $-u$ till båda sidor och utnyttja räknereglerna (ii), (iii) och (iv); detta ger $x = v - u$. Omvänt följer genom insättning att

$$(v - u) + u = v + (-u + u) = v + (u - u) = v + \mathbf{0} = v.$$ □

I själva begreppet vektorrum finns inbyggt att vi kan addera två vektorer. Summan $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ av n stycken vektorer definieras för $n \geq 3$ rekursivt på följande sätt:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + v_n.$$

Den associativa lagen (ii) garanterar att vi för att beräkna en sådan summa kan flytta parenteserna som vi vill; exempelvis är

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4,\end{aligned}$$

etc. På grund av den kommutativa lagen kan vi vidare kasta om ordningen mellan termerna, dvs. $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v_1 + v_4 + v_3 + v_2$, osv.

Givet n stycken vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ och n skalärer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är därför vektorn

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

väldefinierad; den kallas en *linjärkombination* av vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exempel

Vi ger nu ett antal exempel på vektorrum. I samtliga fall är det lätt att verifiera att villkoren (α) – (ϵ) i vektorrumsdefinitionen är uppfyllda, och verifikationerna överlämnas åt läsaren.

Exempel 3.1.1 De ”vanliga” vektorerna, som man studerar i tredimensionell analytisk geometri, bildar ett reellt vektorrum som vi kommer att kalla det *tredimensionella geometriska vektorrummet*. Varje vektor karakteriseras av en längd och en riktning (med undantag för nollvektorn, vars längd är noll och vars riktning är godtycklig) och kan representeras av en riktad sträcka. Addition av vektorer definieras på vanligt sätt av parallellogramregeln. Multiplikation med ett reellt tal α definieras också på vanligt sätt, dvs. längden av vektorn multipliceras med $|\alpha|$, och riktningen förblir oförändrad för $\alpha > 0$ och kastas om för $\alpha < 0$. □

I fortsättningen kommer vi att införa ett stort antal vektorrumsbegrepp. Dessa har vanligtvis en mycket naturlig tolkning för det tredimensionella geometriska vektorrummet, och terminologin har oftast en geometrisk bakgrund. Läsaren bör därför göra det till en vana att tolka alla nya vektorrumsbegrepp och alla påståenden om sådana geometriskt.

Exempel 3.1.2 $\mathbf{K}^n$ betecknar mängden av alla n-tipler $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, där varje x_i ligger i $\mathbf{K}$. Med följande naturliga definition av addition och skalär multiplikation blir $\mathbf{K}^n$ ett vektorrum:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\ \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Nollvektor är förstås n-tipeln $(0, 0, \ldots, 0)$.

De speciella vektorerna $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$ kallas *enhetsvektorerna* i $\mathbf{K}^n$ och kommer att betecknas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, respektive. Med hjälp av enhetsvektorerna kan vi på ett entydigt sätt skriva varje vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som en linjärkombination på följande vis:

$$x = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Vi kommer oftast inte att göra någon åtskillnad mellan n-tipler och kolonnmatriser med n element. Eftersom addition och multiplikation med skalärer fungerar på samma sätt för kolonnmatriser som för n-tipler, är ju skillnaden enbart typografisk. I alla sammanhang av typen Ax, där A är en matris och x är ett element i $\mathbf{K}^n$, skall naturligtvis kolonnmatristolkningen användas. □

Exempel 3.1.3 I exempel 3.1.2 har vi definierat $\mathbf{K}^n$ för alla positiva naturliga tal n. Speciellt kan vi naturligtvis ta $n = 1$ och får då $\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}$. Varje kropp är med andra ord ett vektorrum över sig själv. För $n = 0$ sätter vi $\mathbf{K}^0 = \{0\}$. $\mathbf{K}^0$ består således enbart av nollan i kroppen. Eftersom villkoren (α) – (ϵ) är trivialt uppfyllda, är $\mathbf{K}^0$ ett vektorrum. □

Exempel 3.1.4 Mängden $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ av alla $m \times n$-matriser med element i $\mathbf{K}$ är ett vektorrum under matrisaddition och multiplikation med skalär (jfr sats 2.1.6).

Som vektorrum betraktat fungerar $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ precis som $\mathbf{K}^{mn}$; enda skillnaden mellan en $m \times n$-matris och en mn-tipel, så länge som man enbart betraktar operationerna addition och multiplikation med skalär, är ju sättet att arrangera de mn elementen. I nästa avsnitt kommer vi att precisera närmare vad som menas med att två vektorrum är ”lika” eller ”fungerar på samma sätt”. □

Exempel 3.1.5 Låt $\mathbf{K}^\infty$ beteckna alla följder $(x_n)_1^\infty$ av element i $\mathbf{K}$. Med följande definition av addition och multiplikation är $\mathbf{K}^\infty$ ett vektorrum:

$$(x_n)_1^\infty + (y_n)_1^\infty = (x_n + y_n)_1^\infty$$
$$\alpha(x_n)_1^\infty = (\alpha x_n)_1^\infty.$$

Följden bestående av idel nollor är nollvektor i $\mathbf{K}^\infty$. □

Exempel 3.1.6 En n-tipel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{K}^n$ kan om vi så vill också uppfattas som en funktion x från indexmängden $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ till $\mathbf{K}$, nämligen som den funktion som definieras av att $x(i) = x_i$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. Den Cartesianska produkten $\mathbf{K}^n$ av alla n-tipler av element i $\mathbf{K}$ kan därför identifieras med mängden av alla funktioner $x\colon I_n \to \mathbf{K}$.

Analogt kan mängden $\mathbf{K}^\infty$ i exempel 3.1.5 identifieras med mängden av alla funktioner från $\mathbf{Z}_+$ (mängden av alla positiva heltal) till $\mathbf{K}$.

Låt nu I vara en godtycklig (index-)mängd. Ovanstående utläggning gör det naturligt att införa $\mathbf{K}^I$ som beteckning för mängden av alla funktioner x från I till $\mathbf{K}$, samt att också kalla $\mathbf{K}^I$ för en Cartesiansk produkt av I identiska kopior $\mathbf{K}$. Med följande definition av addition $x + y$ och multiplikation med skalär αx blir $\mathbf{K}^I$ ett vektorrum över kroppen $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} (x+y)(i) &= x(i)+y(i) \quad \text{för alla } i \in I, \\ (\alpha x)(i) &= \alpha x(i) \quad \text{för alla } i \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

Det är trivialt att verifiera att vektorrumsaxiomen är uppfyllda. □

Exempel 3.1.7 Låt I vara en godtycklig indexmängd. Mängden

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K} = \{x \in \mathbf{K}^I \mid x(i) = 0 \text{ för alla utom ändligt många } i \in I\}$$

kallas för den *direkta summan* av I kopior av $\mathbf{K}$.

Vi kan definiera addition och multiplikation med skalär för element i $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$ med hjälp av formlerna (1). Om x och y är två funktioner i $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$ så är $x(i)$ och $y(i)$ lika med 0 för alla utom ändligt många i, så därför är också $x(i) + y(i) = 0$ för alla utom ändligt många i. Det följer därför att summan $x+y$ ligger i $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$, och motsvarande gäller förstås för produkten αx mellan en skalär α och x. Det är slutligen enkelt att verifiera att alla vektorrumsreglerna är uppfyllda. Den direkta summan $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$ är därför ett vektorrum.

Om indexmängden I är de naturliga talen $\mathbf{N}$ skriver vi $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}$ istället för $\bigoplus_{i\in \mathbf{N}} \mathbf{K}$. Uppenbarligen kan $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}$ identifieras med rummet av alla följder $(x_n)_0^\infty$ med egenskapen att $x_n \neq 0$ för bara ändligt många index n.

Om n är ett ändligt tal, så är förstås den direkta summan $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{K}$ lika med $\mathbf{K}^n$.

Låt nu I vara en godtycklig indexmängd. Precis som i $\mathbf{K}^n$ kan vi uttrycka varje vektor i $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$ som en linjärkombination av en familj av ”enhetsvektorer”. Sätt för $i \in I$

$$\mathbf{e}_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{om } j = i \\ 0 & \text{om } j \neq i. \end{cases}$$

Funktionerna $\mathbf{e}_i$ ligger förstås i $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$. Om $x \in \bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$, så är $x(i) = 0$ för alla utom ändligt många index $i \in I$, och därför är summan

$$y = \sum_{i\in I} x(i)\mathbf{e}_i$$

väldefinierad (vi tar bara med de ändligt många termer för vilka $x(i) \neq 0$). Vidare är uppenbarligen $y(j) = x(j)$ för alla $j \in I$, varför $y = x$. Om vi kortare skriver $x_i = x(i)$, så är alltså

$$x = \sum_{i\in I} x_i\mathbf{e}_i,$$

dvs. varje element i $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{K}$ är en linjärkombination av elementen $\mathbf{e}_i$, $i \in I$. Funktionerna $\mathbf{e}_i$ motsvarar således enhetsvektorerna i $\mathbf{K}^n$, och vi kallar dem därför för *enhetsvektorerna* i $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{K}$. □

EXEMPEL 3.1.8 Konstruktionen i föregående exempel kan lätt generaliseras. Låt I vara en godtycklig indexmängd, och antag att vi för varje $i \in I$ har ett vektorrum V_i. Med den *direkta summan*

$$\bigoplus_{i\in I} V_i$$

av vektorrummen V_i menas vektorrummet av alla funktioner

$$f\colon I \to \bigcup_{i\in I} V_i$$

som uppfyller villkoren

(i) $f(i) \in V_i$ för alla index $i \in I$, och
(ii) $f(i) = 0$ för alla utom ändligt många index i.

Addition av element i $\bigoplus_{i\in I} V_i$ och multiplikation med skalär definieras av att $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$ och $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$ för alla index $i \in I$. □

EXEMPEL 3.1.9 De komplexa talen $\mathbf{C}$ bildar enligt exempel 3.1.3 ett komplext vektorrum. Vi kan emellertid också uppfatta $\mathbf{C}$ som ett vektorrum över $\mathbf{R}$. Additionen är förstås den vanliga additionen av komplexa tal, medan multiplikationen αz är den vanliga multiplikationen mellan *reella* tal α och *komplexa* tal z.

Analogt kan vi uppfatta $\mathbf{C}^n$ både som ett komplext vektorrum och som ett reellt vektorrum. Vi väljer den första tolkningen om vi inte explicit säger motsatsen. □

EXEMPEL 3.1.10 De reella talen $\mathbf{R}$ bildar ett vektorrum över $\mathbf{Q}$ om vi definierar addition $x + y$ av reella tal och multiplikation αx mellan *rationella tal* α och reella tal x på vanligt sätt. □

EXEMPEL 3.1.11 Låt $\mathcal{P}$ beteckna mängden av alla polynom

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

med koefficienter i $\mathbf{K}$ och av godtycklig grad. Under vanlig addition av polynom och multiplikation av polynom med skalärer är $\mathcal{P}$ ett vektorrum över $\mathbf{K}$. Som nollvektor fungerar nollpolynomet. (Av beteckningen $\mathcal{P}$ framgår inte vilken kropp som avses, utan det får framgå av sammanhanget.) □

EXEMPEL 3.1.12 Mängden $\mathcal{P}_d$ av alla polynom $a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$, vars grad är *högst* lika med d, är också ett vektorrum, ty summan av två polynom av grad högst d är ett polynom av grad högst d, och detsamma gäller för produkten av ett sådant polynom med en skalär. $\square$

I analysen förekommer många viktiga och intressanta vektorrum. Här följer två exempel.

Exempel 3.1.13 Låt I vara ett delintervall till $\mathbf{R}$, och låt $\mathcal{C}(I)$ beteckna mängden av alla kontinuerliga reellvärda funktioner på I. Summan av två kontinuerliga funktioner är som bekant kontinuerlig liksom produkten av ett reellt tal och en kontinuerlig funktion. Det följer att $\mathcal{C}(I)$ är ett reellt vektorrum. $\square$

Exempel 3.1.14 Mängden av alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet I brukar betecknas $\mathcal{C}^n(I)$, medan mängden av alla funktioner på I som kan deriveras hur många gånger som helst betecknas $\mathcal{C}^\infty(I)$. Med den vanliga definitionen av addition av funktioner och multiplikation med tal blir $\mathcal{C}^n(I)$ och $\mathcal{C}^\infty(I)$ vektorrum. $\square$

Övningar

3.1 Visa med induktion att $nv = v + v + \cdots + v$, där högerledet innehåller n termer.

3.2 Visa att nollvektorn är entydigt bestämd genom att utnyttja räknereglerna (i) och (iii).

3.3 Visa att $\mathbf{0} + v = v$ och att $-v + v = \mathbf{0}$ utan att använda den kommutativa lagen (i).

3.4 Visa att den kommutativa lagen (i) följer ur de övriga reglerna (ii)–(viii). [Ledning: Utgå från $u + v + u + v = 2(u + v) = 2u + 2v = u + u + v + v$.]

3.2 Linjära avbildningar

En funktion $T\colon V \to W$, som är definierad på ett vektorrum V och antar sina värden i ett vektorrum W, brukar kallas för en *avbildning*. Funktionsvärdet $T(v)$, som också kallas *bilden* av vektorn v under avbildningen T, kommer vi att beteckna Tv utan parenteser, så snart inte dessa behövs för att undvika missförstånd. Avbildningar kallas också ofta *operatorer*, speciellt då $W = V$. Speciellt viktiga, och de enda avbildningar som vi skall studera här, är de som *respekterar* den linjära strukturen hos vektorrummen. Sådana avbildningar kallas *linjära*.

Definition 3.2.1 Låt V och W vara två vektorrum över samma kropp $\mathbf{K}$. En avbildning $T\colon V \to W$ kallas *linjär* om följande två villkor är uppfyllda för alla u, $v \in V$ och alla $\alpha \in \mathbf{K}$:

(i) $T(u+v) = Tu + Tv$

(ii) $T(\alpha v) = \alpha Tv$.

Av (ii) får vi speciellt genom att välja $\alpha = 0$ att $T0 = 0$. En linjär avbildning avbildar således alltid nollvektorn (i V) på nollvektorn (i W). Vidare ger (i) och (ii) tillsammans att

(iii) $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$.

Omvänt följer både (i) och (ii) ur (iii), så för att visa att en avbildning T är linjär räcker det att verifiera att (iii) gäller. Med induktion kan man lätt utsträcka (iii) till godtyckliga linjärkombinationer.

Påstående 3.2.2 *Om $T\colon V \to W$ är en linjär avbildning och $v_j \in V$ för $j = 1, 2, \ldots, n$, så är*

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T v_j.$$

Bevis. Induktionssteget består av konstaterandet att

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = T\Big(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j + \alpha_n v_n\Big) = T\Big(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j v_j\Big) + \alpha_n T v_n.$$

□

Exempel 3.2.1 Låt D beteckna derivering, dvs. $(Df)(t) = f'(t)$. De välbekanta deriveringsreglerna för summor av funktioner och produkter av tal och funktioner innebär att avbildningen $D\colon \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I)$ är linjär. □

Exempel 3.2.2 Om vi deriverar ett polynom, blir derivatan också ett polynom. Deriveringsoperatorn D kan således också uppfattas som en avbildning $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, och som sådan är den förstås linjär. Skillnaden mellan detta och föregående exempel är att vi betraktar olika definitionsrum (och målrum) för deriveringsoperatorn. □

Exempel 3.2.3 Definiera $T\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^3$ genom att sätta

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2).$$

Det är trivialt att verifiera att avbildningen T är linjär. □

Exempel 3.2.4 Låt V vara ett godtyckligt vektorrum. Den *identiska avbildningen* I på V, som definieras av att $I(v) = v$ för alla $v \in V$, är förstås linjär. $\square$

Exempel 3.2.5 I det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet definieras tre viktiga klasser av avbildningar, nämligen translationer, rotationer (kring en axel genom origo) och speglingar (i plan genom origo). Rotationer och speglingar är linjära avbildningar. Däremot är förstås inte translationer linjära avbildningar (med undantag för den triviala identiska translationen), ty translationer avbildar inte nollvektorn på sig själv. $\square$

Låt V vara ett vektorrum över $\mathbf{K}$. Eftersom $\mathbf{K}$ är ett vektorrum över sig självt, kan vi speciellt betrakta linjära avbildningar från V till $\mathbf{K}$; sådana linjära avbildningar kallas *linjära former* eller *linjära funktionaler* på V.

Exempel 3.2.6 Låt $\pi_i \colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ vara avbildningen

$$\pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i.$$

Uppenbarligen är π_i linjär, så π_i är en linjär form på $\mathbf{K}^n$. Av naturliga skäl kallar vi π_i för *projektionen* av $\mathbf{K}^n$ på den i:te faktorn. $\square$

Exempel 3.2.7 Definitionen av projektion i föregående exempel har följande naturliga generalisering. Låt $\bigoplus_{i\in I} V_i$ vara en direkt summa av vektorrum. Med projektionen π_i på den i:te faktorn V_i menas den avbildning som fås genom att för $f \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ sätta $\pi_i(f) = f(i)$.

Man verifierar omedelbart att π_i är en surjektiv linjär avbildning. $\square$

Exempel 3.2.8 Låt $S \colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathbf{R}$ vara avbildningen

$$Sf = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Av reglerna för räkning med integraler följer att S är en linjär funktional. $\square$

Exempel 3.2.9 *Diracmåttet* δ_a i punkten $a \in [0,1]$ är en annan linjär funktional på $\mathcal{C}[0,1]$, som definieras av att $\delta_a(f) = f(a)$ för alla kontinuerliga funktioner f. $\square$

Vektorrummet av linjära avbildningar

Påstående 3.2.3 *Mängden $\mathcal{L}(V, W)$ av alla linjära avbildningar från V till W är ett vektorrum.*

Bevis. Mängden $\mathcal{L}(V, W)$ är en delmängd till rummet W^V av *alla* funktioner från V till vektorrummet W, så summan $S+T$ av två avbildningar S och T i $\mathcal{L}(V, W)$ är väldefinierad liksom produkten λT av en skalär λ och en linjär avbildning T. Det är vidare trivialt att verifiera att avbildningarna $S+T$ och λT är linjära; exempelvis gäller

$$\begin{aligned}(S+T)(\alpha u+\beta v) &= S(\alpha u+\beta v)+T(\alpha u+\beta v)\\ &= \alpha\, Su+\beta\, Sv+\alpha\, Tu+\beta\, Tv\\ &= \alpha(Su+Tu)+\beta(Sv+Tv)\\ &= \alpha(S+T)u+\beta(S+T)v.\end{aligned}$$

Mängden $\mathcal{L}(V, W)$ är således sluten under addition och multiplikation med skalärer. Vidare innehåller $\mathcal{L}(V, W)$ *nollavbildningen* $0\colon V \to W$, definierad av att $0(v)=0$ för alla $v \in V$. Att vektorrumsreglerna gäller för $\mathcal{L}(V, W)$ är nu uppenbart, ty de gäller ju i det större rummet W^V. □

Om $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ är två godtyckliga avbildningar så är sammansättningen $T \circ S\colon U \to W$ väldefinierad. Vi kommer i fortsättningen att beteckna denna sammansättning TS. Definitionsmässigt är alltså

$$(TS)v = T(Sv).$$

Avbildningar $T\colon V \to V$ med samma definitions- och målrum kan itereras. Vi skriver T^2 istället för TT, T^3 istället för TTT, osv. Slutligen sätter vi $T^0 = I$ (den identiska avbildningen). Med en induktiv definition har vi med andra ord

$$T^n = \begin{cases} I & \text{för } n=0\\ TT^{n-1} & \text{för } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots . \end{cases}$$

För sammansättningen av linjära avbildningar gäller följande resultat.

Påstående 3.2.4 *Antag att $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ är linjära avbildningar. Då är sammansättningen TS också linjär.*

Bevis.

$$\begin{aligned}(TS)(\alpha u+\beta v) &= T(S(\alpha u+\beta v)) = T(\alpha\, Su+\beta\, Sv) = \alpha\, T(Su)+\beta\, T(Sv)\\ &= \alpha(TS)u+\beta(TS)v.\end{aligned}$$

□

Exempel 3.2.10 Låt $D\colon \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ vara derivering. För kontinuerliga funktioner f är enligt integralkalkylens fundamentalsats

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(s)\,ds = f(t).$$

Vi får därför en linjär avbildning $S\colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}^1[0,1]$ genom att definiera

$$Sf(t) = \int_0^t f(s)\,ds,$$

och $DSf = f$ för alla funktioner $f \in \mathcal{C}[0,1]$, vilket innebär att DS är den identiska avbildningen på $\mathcal{C}[0,1]$. Däremot är

$$SDf(t) = \int_0^t f'(s)\,ds = f(t) - f(0),$$

så SD är inte den identiska avbildningen på $\mathcal{C}^1[0,1]$. □

Om $T\colon V \to W$ är en bijektiv avbildning, kan vi bilda den inversa avbildningen $T^{-1}\colon W \to V$. För inversen till en linjär avbildning gäller:

Påstående 3.2.5 *Om $T\colon V \to W$ är linjär och bijektiv, så är inversen T^{-1} linjär.*

Bevis. Sätt $v_i = T^{-1}w_i$; då är $Tv_i = w_i$, varför

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2,$$

och detta innebär att

$$T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 T^{-1} w_1 + \alpha_2 T^{-1} w_2.$$ □

Isomorfi

Definition 3.2.6 En bijektiv linjär avbildning kallas en *isomorfi*. Två vektorrum V och W kallas *isomorfa* om det finns en isomorfi $T\colon V \to W$ mellan rummen.

Påstående 3.2.7 *Isomorfi är en ekvivalensrelation, dvs.*

(i) *varje vektorrum V är isomorft med sig självt;*

(ii) *om vektorrummet V är isomorft med vektorrummet W, så är W isomorft med V;*

(iii) *om vektorrummet U är isomorft med V som i sin tur är isomorft med W, så är också U isomorft med W.*

Bevis. Påstående (i) följer av att identitetsavbildningen är en isomorfi. Påstående (ii) följer av påstående 3.2.5, som innebär att inversen till en isomorfi är en isomorfi, och (iii) är en konsekvens av påstående 3.2.4, som medför att sammansättningen av två isomorfier är en isomorfi. □

Exempel 3.2.11 Vektorrummen $\mathcal{P}_d$ och $\mathbf{K}^{d+1}$ är isomorfa, ty avbildningen $T\colon \mathbf{K}^{d+1} \to \mathcal{P}_d$, som definieras av att $T(a_0, a_1, \ldots, a_d) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$, är en isomorfi. □

Exempel 3.2.12 Ett trivialt exempel på isomorfa vektorrum är $\mathbf{K}^n$ och rummet $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{K})$ av alla kolonnmatriser med n element. Isomorfin ges av avbildningen

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]^t.$$

Det är denna isomorfi vi utnyttjar när vi inte skiljer på rummen $\mathbf{K}^n$ och $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{K})$. □

Exempel 3.2.13 Vektorrummet $\mathcal{P}$ av alla polynom med koefficienter i $\mathbf{K}$ är isomorft med vektorrummet $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}$ via avbildningen

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

□

Att två vektorrum är isomorfa innebär att man ”räknar på samma sätt” i de båda rummen när det gäller addition och multiplikation med skalär. Isomorfin fungerar som ett lexikon som ger en en-entydig översättning mellan de båda rummens element. Med hjälp av den kan vi beräkna linjärkombinationer i det ena rummet förutsatt att vi vet hur man gör i det andra. Naturligtvis kan de båda rummen ha andra ”icke-linjära” egenskaper som gör att de skiljer sig åt. Exempelvis behöver möjligheten att multiplicera två polynom med varandra inte ha någon naturlig motsvarighet i ett med $\mathcal{P}$ isomorft vektorrum.

Karakterisering av linjära avbildningar

För allmänna vektorrum V och W är klassen $\mathcal{L}(V, W)$ av *alla* linjära avbildningar $V \to W$ alltför stor för att vara hanterbar och användbar. I allmänhet betraktar man därför endast lämpliga delklasser, som fås genom att lägga på mer struktur på vektorrummen och kräva att att de linjära avbildningarna skall vara kontinuerliga i någon mening. Sådana mer restriktiva linjära avbildningar (begränsade operatorer, slutna operatorer, mått, distributioner, etc.) studeras inom den gren av matematiken som kallas funktionalanalys.

Då V är lika med $\mathbf{K}^n$ kan man emellertid erhålla en enkel och fullständig beskrivning av alla linjära avbildningar från V till W.

Sats 3.2.8 *Låt $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vara n vektorer i vektorrummet W, och låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara enhetsvektorerna i $\mathbf{K}^n$. Då finns det en unik linjär avbild-*

ning $T\colon \mathbf{K}^n \to W$ *med egenskapen* $T\mathbf{e}_j = w_j$ *för alla* j*, nämligen avbildningen*

$$(1) \qquad Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j.$$

Bevis. Definiera avbildningen $T : \mathbf{K}^n \to W$ genom formeln (1); då blir uppenbarligen T linjär och $T\mathbf{e}_j = w_j$ för alla j.

Omvänt, om T är linjär och $T\mathbf{e}_j = w_j$, så följer det på grund av att varje $x \in \mathbf{K}^n$ har framställningen $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$ att

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j T\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j,$$

dvs. avbildningen är entydigt bestämd av T:s effekt på vektorerna $\mathbf{e}_j$. □

Exempel 3.2.14 Finns det någon linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathcal{P}$ sådan att $T(1,1) = t^2 + t$ och $T(2,-1) = 2t^2 - t + 3$?

Lösning: En sådan avbildning måste ha formen

$$T(x_1, x_2) = x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t),$$

där p_1 och p_2 är lämpliga polynom. Av de givna villkoren får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} T(1,1) = p_1(t) + p_2(t) = t^2 + t \\ T(2,-1) = 2p_1(t) - p_2(t) = 2t^2 - t + 3 \end{cases}$$

som har lösningen $p_1(t) = t^2 + 1$, $p_2(t) = t - 1$. Det finns därför en unik linjär avbildning som uppfyller de givna villkoren, nämligen

$$T(x_1, x_2) = x_1(t^2 + 1) + x_2(t - 1) = x_1 t^2 + x_2 t + (x_1 - x_2).$$ □

Korollarium 3.2.9 *Varje linjär form* T *på* $\mathbf{K}^n$*, dvs. linjär avbildning från* $\mathbf{K}^n$ *till* $\mathbf{K}$*, har formen* $Tx = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$*, där* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *är skalärer. Omvänt är detta en linjär form för varje uppsättning av skalärer.*

Bevis. Sätt $T\mathbf{e}_i = a_i$ och tillämpa föregående sats. □

Sats 3.2.8 är ett specialfall av följande sats.

Sats 3.2.10 *Låt* I *vara en godtycklig indexmängd, och låt* w_i*,* $i \in I$*, vara en familj av vektorer i vektorrummet* W*. Om* $\mathbf{e}_i$ *betecknar enhetsvektorerna i vektorrummet* $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$*, så finns det en unik linjär avbildning*

$$T\colon \bigoplus_{i\in I} \mathbf{K} \to W$$

med egenskapen att $T\mathbf{e}_i = w_i$ *för alla* $i \in I$*.*

Bevis. Varje $x \in \bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$ har formen $x = \sum_{i\in I} x_i \mathbf{e}_i$, där endast ändligt många termer i summan är skilda från 0. Vi får därför en väldefinierad linjär avbildning T, som uppfyller villkoren i satsen, genom att sätta

$$Tx = \sum_{i\in I} x_i w_i.$$

Uppenbarligen är den linjära avbildningen T entydigt bestämd av villkoret $T\mathbf{e}_i = w_i$ för alla $i \in I$. $\square$

I avsnitt 3.7 kommer vi att visa att varje vektorrum V är isomorft med ett rum av typen $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$. Detta innebär att sats 3.2.10 ger en beskrivning av hur en godtycklig linjär avbildning ser ut. Tyvärr är resultatet inte så användbart som man skulle kunna tro, ty det är i allmänhet inte möjligt att ge någon explicit beskrivning av isomorfin mellan V och $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$, och därför kan inte satsen användas för konkreta beräkningar annat än i det ändligdimensionella fallet, som svarar mot sats 3.2.8.

Övningar

3.5 Vilka av följande avbildningar $T\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ är linjära?

a) $Tp(t) = tp(t)$ b) $Tp(t) = p(2t+3)$ c) $Tp(t) = p(t^2)$

d) $Tp(t) = p(t) - 1$ e) $Tp(t) = p(t) - p(0)$ f) $Tp(t) = \dfrac{p(t) - p(0)}{t}$

3.6 Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara avbildningen $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Visa att T är linjär.

b) Visa att T är inverterbar och beräkna inversen.

c) Beräkna T^2 och T^3.

3.7 Visa att varje linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har formen

$$T(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2),$$

där a_{11}, a_{12}, a_{21} och a_{22} är reella tal.

3.8 Vilka av de linjära avbildningarna i övning 3.5 är inverterbara? Bestäm i förekommande fall inversen.

3.9 Finns det någon linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathcal{C}(R)$ som avbildar $(1,1,1)$ på funktionen $\mathrm{e}^t + t + 1$, $(1,0,-1)$ på $\mathrm{e}^{2t} + 2$ och $(1,2,3)$ på $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} + 2t$?

3.10 Visa att det finns en unik linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathcal{P}$ som avbildar $(1,-1,0)$ på $t-1$, $(0,1,1)$ på $t^2 - 2$ samt $(1,0,2)$ på $t^2 + 4t - 6$. Är avbildningen injektiv?

3.11 Är avbildningarna S och D i exempel 3.2.10 injektiva, surjektiva, bijektiva?

3.12 Låt A och B vara $n \times n$-matriser och definiera avbildningarna

$$S, T\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$$

genom att sätta $SX = AX$ och $TX = XB$.

a) Visa att S och T är linjära.

b) Under vilka villkor på matrisen A är S inverterbar och vad är i så fall inversen?

c) Bestäm ST.

3.13 Låt avbildningarna $S_1, S_2\colon U \to V$ och $T_1, T_2\colon V \to W$ vara linjära. Visa att

a) $(T_1 + T_2)S_1 = T_1S_1 + T_2S_1$ b) $T_1(S_1 + S_2) = T_1S_1 + T_1S_2$

3.14 Låt D vara deriveringsoperatorn på rummet $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Visa att

$$D^2 + D - 6I = (D + 3I)(D - 2I).$$

3.3 Delrum

Definition 3.3.1 En icke-tom delmängd U av ett vektorrum V kallas ett *(linjärt) delrum* eller *underrum* om följande två villkor är uppfyllda:

(i) $u, v \in U \implies u + v \in U$

(ii) $v \in U,\ \alpha \in \mathbf{K} \implies \alpha v \in U$.

Vi uttrycker (i) och (ii) i ord genom att säga att ett delrum är *slutet* under addition och multiplikation med skalärer.

Av (i) och (ii) följer förstås villkoret

(iii) $u, v \in U,\ \alpha, \beta \in \mathbf{K} \implies \alpha u + \beta v \in U$.

Omvänt medför (iii) att (i) och (ii) gäller (välj $\alpha = \beta = 1$ resp. $\beta = 0$ i (iii)).

Påstående 3.3.2 *Varje delrum av ett vektorrum är självt ett vektorrum.*

Bevis. Ett delrum U måste innehålla nollvektorn 0, ty eftersom $U \neq \emptyset$, finns det minst ett element v_0 i U, och av (ii) följer då att $0 \in U$ eftersom $0 = 0v_0$. För varje $v \in U$ gäller vidare att inversen $-v$ tillhör U, eftersom $-v = (-1)v$. Det följer därför att varje delrum U av ett vektorrum V uppfyller samtliga villkor (α) – (ϵ) i vektorrumsdefinitionen ((α) och (β) på grund av (i) och (ii), (γ) och (δ) enligt vad vi just visat ovan, och villkoren i (ϵ) är självklara eftersom de gäller i hela V). □

Exempel 3.3.1 Varje vektorrum V har två triviala delrum, nämligen rummet V självt och delrummet $\{0\}$, som bara består av nollvektorn. □

Exempel 3.3.2 I det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet bildar mängden av alla vektorer som är parallella med ett givet plan ett linjärt delrum. □

Exempel 3.3.3 Mängden $\mathcal{P}_d$ av alla polynom vars grad är *högst* lika med d, är ett delrum av vektorrummet $\mathcal{P}$ av alla polynom, ty summan av två polynom av grad högst d är ett polynom av grad högst d, och detsamma gäller för produkten av ett sådant polynom med en skalär. □

Exempel 3.3.4 $\mathcal{C}(I)$, rummet av alla kontinuerliga reellvärda funktioner på intervallet I, är ett delrum till $\mathbf{R}^I$, rummet av alla reellvärda funktioner definierade på I. □

Exempel 3.3.5 $\mathcal{C}^n(I)$ och $\mathcal{C}^\infty(I)$, rummen av alla n gånger resp. oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på I, är delrum till $\mathcal{C}(I)$. □

Exempel 3.3.6 $U = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ är ett delrum av $\mathbf{R}^3$. Det är trivialt att verifiera att villkoren (i) och (ii) är uppfyllda. Om vi med hjälp av ett koordinatsystem identifierar vårt vanliga tredimensionella geometriska rum med $\mathbf{R}^3$, så svarar U mot ett plan genom origo. Omvänt svarar varje plan genom origo mot ett delrum av $\mathbf{R}^3$. □

Exempel 3.3.7 Mängden $H = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$ är ej ett delrum till $\mathbf{R}^3$, ty villkoret (ii) är inte uppfyllt. Exempelvis gäller $(1,1,1) \in H$ medan $-(1,1,1) \notin H$. □

Exempel 3.3.8 Mängden $M = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\}$ är ej ett delrum, ty villkoret (i) är inte uppfyllt. Exempelvis gäller att $(1,1,0)$ och$(0,0,1)$ tillhör M, men summan $(1,1,1)$ tillhör inte M. □

Nollrum och bildrum till en linjär avbildning

Varje linjär avbildning ger på ett naturligt sätt upphov till två linjära delrum.

Definition 3.3.3 Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning och sätt

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V \mid Tv = 0\} \quad \text{och} \quad \mathcal{V}(T) = \{Tv \mid v \in V\}.$$

$\mathcal{N}(T)$ kallas avbildningens *nollrum* eller *kärna*, och $\mathcal{V}(T)$ kallas dess *bildrum* eller *värderum*.

Per definition är nollrummet en delmängd av V och bildrummet en delmängd av W, men de är inte bara delmängder utan också delrum:

Påstående 3.3.4 *Nollrummet $\mathcal{N}(T)$ till en linjär avbildning $T\colon V \to W$ är ett delrum till V, och bildrummet $\mathcal{V}(T)$ är ett delrum till W.*

Bevis. Nollrummet $\mathcal{N}(T)$ innehåller nollvektorn så det är inte tomt. Vidare är det slutet under addition och multiplikation med skalärer, ty

$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in \mathcal{N}(T) &\implies T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0 \\ &\implies \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathcal{N}(T). \end{aligned}$$

Nollrummet är med andra ord ett linjärt delrum.

Bildrummet är naturligtvis inte heller tomt. För att visa att det är slutet under addition och skalär multiplikation antar vi att w_1, $w_2 \in \mathcal{V}(T)$; då finns det vektorer v_1, v_2 i V så att $Tv_j = w_j$, och det följer att $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, dvs. $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in \mathcal{V}(T)$. Även $\mathcal{V}(T)$ är således ett delrum. □

Exempel 3.3.9 Nollrummet till deriveringsoperatorn $D\colon \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I)$ består av alla konstanta funktioner, och bildrummet sammanfaller med $\mathcal{C}(I)$, ty om g är en godtycklig kontinuerlig funktion på I och om $a \in I$, så definieras genom

$$f(t) = \int_a^t g(u)\,du$$

en kontinuerligt deriverbar funktion f med egenskapen $Df = g$. □

Exempel 3.3.10 Låt U vara mängden av alla två gånger kontinuerligt deriverbara lösningar till den homogena linjära differentialekvationen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

där p och q är två givna kontinuerliga funktioner, definierade på den reella axeln. Det är klart att om y_1 och y_2 är två sådana lösningar, så är också $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ en lösning för alla reella tal α_1 och α_2. Lösningsrummet U är med andra ord ett linjärt delrum av $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$. Om vi definierar en linjär avbildning $T\colon \mathcal{C}^2(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ genom att sätta $Tf = D^2 f + pDf + qf$, så blir U lika med nollrummet till T. □

Exempel 3.3.11 Exempel 3.3.6 kan generaliseras − mängden

$$U = \{x \in \mathbf{K}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

är ett delrum av $\mathbf{K}^n$ för varje val av skalärer a_1, a_2, …, $a_n \in \mathbf{K}$. Detta kan vi naturligtvis enkelt verifiera direkt. Alternativt kan vi konstatera att U är lika med nollrummet till den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$, som definieras av att $Tx = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. $\square$

För linjära avbildningar kan surjektivitet och injektivitet uttryckas med hjälp av bild- och nollrummen. Per definition är avbildningen $T\colon V \to W$ *surjektiv* om $\mathcal{V}(T) = W$. Beträffande injektivitet har vi följande resultat.

Sats 3.3.5 *En linjär avbildning $T\colon V \to W$ är injektiv om och endast om $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.*

Bevis. Avbildningen är injektiv om $Tv_1 = Tv_2$ medför att $v_1 = v_2$. Eftersom

$$Tv_1 = Tv_2 \iff T(v_1 - v_2) = 0 \iff v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(T),$$

kan injektivitetsvillkoret ekvivalent uttryckas

$$v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(T) \implies v_1 - v_2 = 0,$$

och detta är uppenbarligen uppfyllt om och endast om $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. $\square$

Snitt av delrum

Ett sätt att bilda nya delrum av givna delrum är att bilda snittmängder. Vi har nämligen följande resultat.

Påstående 3.3.6 *Låt U_i, $i \in I$, vara en familj av delrum till V. Då är snittet $\bigcap_{i\in I} U_i$ ett delrum.*

Bevis. Låt u och v vara två vektorer i $\bigcap_{i\in I} U_i$, och låt α och β vara godtyckliga skalärer. För varje $i \in I$ gäller då att $u, v \in U_i$ (på grund av definitionen av snitt), och eftersom U_i är ett delrum följer det att $\alpha u + \beta v \in U_i$. Men då gäller också $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{i\in I} U_i$. Detta visar att $\bigcap_{i\in I} U_i$ är slutet under addition och multiplikation med skalärer. $\square$

Exempel 3.3.12 Varje plan genom origo i vårt tredimensionella geometriska vektorrum svarar mot ett linjärt delrum av $\mathbf{R}^3$. Snittet av två ickeparallella plan är en linje, och omvänt kan varje linje framställas som ett snitt av två plan. Det följer att varje linje genom origo svarar mot ett linjärt delrum, något som naturligtvis också lätt kan visas direkt. $\square$

Exempel 3.3.13 Lösningsmängden U till ett homogent linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

är ett linjärt delrum, ty om vi sätter

$$U_i = \{x \in \mathbf{K}^n \mid a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0\},$$

så är $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$, och varje U_i är enligt exempel 3.3.11 ett delrum. U är med andra ord ett snitt av delrum och därmed självt ett delrum. $\square$

Spann

Definition 3.3.7 Låt A vara en godtycklig icke-tom delmängd av ett vektorrum V, och betrakta mängden U av alla linjärkombinationer av typen

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

där n är ett godtyckligt naturligt tal, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är godtyckliga vektorer i A, och koefficienterna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är godtyckliga skalärer. Det är klart att summan av två sådana linjärkombinationer samt att produkten av en sådan linjärkombination med en godtycklig skalär är nya linjärkombinationer av samma typ. Mängden U är med andra ord ett linjärt delrum av V; den kallas för *spannet* (eller *linjära höljet*) av A och betecknas $\operatorname{spn} A$.

Om $A = \emptyset$ så blir förstås mängden av linjärkombinationer av element från A tom. Det visar sig emellertid ändamålsenligt att *definiera* spannet av den tomma mängden som det triviala nollrummet, dvs. $\operatorname{spn} \emptyset = \{0\}$.

Sats 3.3.8 *Låt A vara en delmängd av vektorrummet V. Då är $\operatorname{spn} A$ det minsta linjära delrummet som innehåller A.*

Bevis. Varje $a \in A$ tillhör $\operatorname{spn} A$, ty $a = 1a$ är en linjärkombination av a. Alltså gäller $A \subseteq \operatorname{spn} A$. Låt nu W vara ett godtyckligt delrum som innehåller A; eftersom W är sluten under addition och multiplikation med skalärer, måste W innehålla varje linjärkombination av element ur A, dvs. $\operatorname{spn} A \subseteq W$. Av alla delrum som innehåller A är således $\operatorname{spn} A$ det minsta. $\square$

Då man beräknar spannet av ett antal vektorer har man nytta av följande observation.

Påstående 3.3.9 *Låt A vara en mängd av vektorer i ett vektorrum. Spannet av A ändras inte om vi byter ut en vektor $v \in A$ mot*

- *vektorn cv förutsatt att skalären c är skild från noll;*
- *vektorn $v + cw$, där $w \in A$, $w \neq v$ och c är en godtycklig skalär.*

Bevis. Att den första operationen lämnar spannet invariant är uppenbart, och att den andra också gör det följer av att

$$\alpha v + \beta w = \alpha(v + cw) + (\beta - c\alpha)w. \qquad \square$$

Definition 3.3.10 Om $\operatorname{spn} A = V$ säger man att mängden A *spänner upp* eller *genererar* vektorrummet V, och elementen i A kallas *generatorer* för vektorrummet. Vektorrummet kallas *ändligt genererat* om det finns en ändlig mängd som spänner upp rummet.

EXEMPEL 3.3.14 I $\mathbf{K}^n$ gäller $\operatorname{spn}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} = \mathbf{K}^n$, där vektorerna $\mathbf{e}_i$ är enhetsvektorerna i $\mathbf{K}^n$. Vektorrummet $\mathbf{K}^n$ är med andra ord ändligt genererat. □

EXEMPEL 3.3.15 Det tredimensionella geometriska vektorrummet spänns upp av tre vektorer vilka som helst, bara de inte är parallella med ett plan. □

EXEMPEL 3.3.16 Betrakta delmängderna

$$A = \{1, t, t^2, t^3\} \text{ och } B = \{1, t, t^2, t^3, \dots\}$$

av vektorrummet $\mathcal{P}$. Uppenbarligen är $\operatorname{spn} A = \mathcal{P}_3$ och $\operatorname{spn} B = \mathcal{P}$. Vektorrummet $\mathcal{P}_3$ är således ändligt genererat. Däremot finns det ingen ändlig mängd som genererar $\mathcal{P}$, ty i varje ändlig mängd C av polynom finns det ett (eller flera) polynom som har störst gradtal, d säg. Inget polynom i $\operatorname{spn} C$ kan då ha ett gradtal som överstiger d, så det följer att $\operatorname{spn} C \subseteq \mathcal{P}_d \neq \mathcal{P}$. Vektorrummet $\mathcal{P}$ är med andra ord inte ändligt genererat. □

EXEMPEL 3.3.17 Den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

är $y = e^{2t}(A \cos t + B \sin t)$. Vi kan uttrycka detta genom att säga att differentialekvationens lösningsrum är lika med $\operatorname{spn}\{e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t\}$. □

EXEMPEL 3.3.18 Ett plan genom origo kan dels beskrivas med en homogen linjär ekvation (planets normalform), dels uttryckas som ett spann av vektorer (planets ekvation på parameterform). På motsvarande sätt kan lösningsmängden till varje homogent linjärt ekvationssystem uttryckas som ett spann. Vi illustrerar med exemplet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Efter elimination fås

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Den allmänna lösningen är

$$x = (-2t + 2u, -3t + 3u, t, u) = t(-2, -3, 1, 0) + u(2, 3, 0, 1),$$

där t och u är godtyckliga reella tal. Systemets lösningsmängd genereras således av de två vektorerna $(-2, -3, 1, 0)$ och $(2, 3, 0, 1)$. □

Nollrum, kolonnrum och radrum till en matris

Definition 3.3.11 Till en $m \times n$-matris A associerar vi följande delrum.

- *Nollrummet* $\mathcal{N}(A)$ består av alla lösningar till det homogena linjära ekvationssystemet $Ax = 0$ med koefficientmatris A.
- *Kolonnrumet* $\mathcal{K}(A)$ är det delrum av $\mathbf{K}^m$ som genereras av matrisens kolonner, dvs. $\mathcal{K}(A) = \text{spn}\{A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}\}$.
- *Radrummet* $\mathcal{R}(A)$ spänns på motsvarande sätt upp av matrisens rader, uppfattade som vektorer i $\mathbf{K}^n$, och är ett delrum av $\mathbf{K}^n$.

Nollrummet $\mathcal{N}(A)$ till en $m \times n$-matris A är ett linjärt delrum till $\mathbf{K}^n$. (Jmf med exempel 3.3.13.)

Eftersom $\sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j} = Ax$, består kolonnrummet $\mathcal{K}(A)$ av alla vektorer b i $\mathbf{K}^m$ som kan skrivas $b = Ax$ för något x, dvs. av alla högerled b som gör ekvationssystemet $Ax = b$ lösbart.

Radrummet $\mathcal{R}(A)$ till matrisen A är uppenbarligen lika med kolonnrummet $\mathcal{K}(A^t)$ till den transponerade matrisen.

För kvadratiska system ($m = n$) har vi visat i kapitel 1 (sats 1.6.3) att systemet $Ax = b$ är lösbart för varje högerled om och endast om det homogena systemet $Ax = 0$ inte har några andra lösningar än $x = 0$. Detta resultat kan nu uttryckas på följande koncisa sätt:

$$\mathcal{K}(A) = \mathbf{K}^m \iff \mathcal{N}(A) = \{0\}.$$

Längre fram skall vi generalisera detta så att vi för godtyckliga matriser kan relatera ”storleken” hos deras noll- och kolonnrum (se sats 3.8.6).

Radekvivalenta matriser har samma nollrum (sats 1.4.3), och påstående 3.3.9 innebär att en matris radrum inte ändras av elementära radoperationer. Det följer alltså att radekvivalenta matriser har samma radrum. Däremot är förstås kolonnrummen i allmänhet olika.

När man löser ett homogent linjärt ekvationssystem explicit, uttrycker man de fria variablerna som linjärkombinationer av basvariablerna. Detta innebär att man uttrycker lösningsmängden som ett spann.

Exempel 3.3.19 Karakterisera nollrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

som ett spann.

Lösning: Nollrummet består av alla lösningar till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Gausselimination ger $x_1 = -x_3$, $x_2 = -x_3$, vilket innebär att systemets lösningar har formen $x = t(1, 1, -1)$ och att $\mathcal{N}(A) = \operatorname{spn}\{(1, 1, -1)\}$. □

Omvänt kan man uttrycka ett spann av vektorer i $\mathbf{K}^m$ som lösningsmängden till ett homogent linjärt ekvationssystem, dvs. som ett nollrum.

Exempel 3.3.20 Betrakta delmängden

$$A = \{(1, 1, 2, -1), (2, -1, 3, 2), (-1, 5, 0, -7)\}$$

av $\mathbf{R}^4$. Karakterisera $\operatorname{spn} A$ som ett nollrum.

Lösning: Det sökta spannet överensstämmer med kolonnrummet till den matris som har vektorerna i A som sina kolonner, och det består därför av alla $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = y_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad = y_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = y_4 \end{cases}$$

är lösbart. Systemet är radekvivalent med följande system

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 2y_1 - y_3 \\ \qquad\qquad 0 = 5y_1 + y_2 - 3y_3 \\ \qquad\qquad 0 = -7y_1 + 4y_3 + y_4. \end{cases}$$

Det följer att $\operatorname{spn} A$ är lika med lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 - 3y_3 \qquad = 0 \\ -7y_1 \qquad + 4y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

□

Summor av delrum

Unionen av en familj av delrum till ett vektorrum är i allmänhet inte ett delrum. Däremot spänner unionen förstås upp ett delrum.

Definition 3.3.12 Låt U_i, $i \in I$, vara en familj av linjära delrum till ett vektorrum V. Med *summan* $\sum_{i\in I} U_i$ av delrummen menas spannet $\operatorname{spn}\bigl(\bigcup_{i\in I} U_i\bigr)$ av deras union.

För en summa av ändligt många delrum $U_1, U_2, \dots, U_m$ använder vi också beteckningen $U_1 + U_2 + \cdots + U_m$.

Namnet summa kommer sig av att varje vektor v i summan $\sum_{i\in I} U_i$ kan skrivas som en summa

$$v = \sum_{i\in I} v_i \tag{1}$$

med $v_i \in U_i$ för varje i, och där endast ändligt många v_i är skilda från nollvektorn. Att så är fallet är en omedelbar konsekvens av definitionen av ett spann.

Framställningen (1) av en vektor $v \in \sum_{i\in I} U_i$ som en summa av vektorer i delrummen U_i är i allmänhet inte entydig. Nödvändigt och tillräckligt för entydighet visar sig vara att nollvektorn har en entydig sådan framställning. Vi gör därför följande definition.

Definition 3.3.13 En familj U_i, $i \in I$, av delrum kallas *linjärt oberoende* om nollvektorn på endast ett sätt kan skrivas som en summa av vektorer i delrummen, dvs. om

$$\sum_{i\in I} v_i = 0,$$

där $v_i \in U_i$ för varje i och $v_i = 0$ för alla utom ändligt många i, medför att $v_i = 0$ för alla $i \in I$.

Definition 3.3.14 En summa av delrum kallas en *direkt summa* om de ingående delrummen är linjärt oberoende. Den direkta summan av en familj U_i $(i \in I)$ av delrum betecknas $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

För direkta summor av ändligt många delrum $U_1, U_2, \dots, U_m$ använder vi också beteckningen $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Påstående 3.3.15 *Låt $U = \bigoplus_{i\in I} U_i$ vara en direkt summa av delrum. Då kan varje vektor v i U på ett entydigt sätt skrivas som $v = \sum_{i\in I} v_i$, där varje v_i tillhör U_i och endast ändligt många av dem är skilda från nollvektorn.*

Bevis. Per definition av summa finns det minst en sådan framställning av vektorn v som en ändlig summa av vektorer i delrummen. Antag att vi har två sådana framställningar

$$v = \sum_{i\in I} v_i = \sum_{i\in I} w_i$$

med v_i, $w_i \in U_i$. Subtraktion ger då

$$0 = \sum_{i\in I} (v_i - w_i)$$

där varje differens $v_i - w_i$ tillhör U_i och endast ändligt många av dem kan vara skilda från nollvektorn. Men då är $v_i - w_i = 0$ för alla i, eftersom delrummen är linjärt oberoende. Detta visar att framställningen är entydig. □

Anmärkning. Vi har nu två definitioner av begreppet direkt summa, dels den i exempel 3.1.8, där den direkta summan definieras för en godtycklig familj av vektorrum, dels definition 3.3.14 ovan, som definierar begreppet direkt summa för en familj av linjära delrum. Vi måste övertyga oss om att de två definitionerna inte står i konflikt med varandra.

Antag därför att U_i, $i \in I$, är en familj av linjärt oberoende delrum till något vektorrum V, och låt W beteckna den direkta summan av dessa enligt definitionen i exempel 3.1.8, medan $\bigoplus_{i\in I} U_i$ är den direkta summan enligt definitionen ovan.

Ett element f i vektorrumet W är då per definition en funktion f som är definierad på I och har egenskapen att $f(i) \in U_i$ för alla $i \in I$ och att $f(i) = 0$ för alla utom ändligt många $i \in I$. Följaktligen är summan $\sum_{i\in I} f(i)$ ett väldefinierat element i $\bigoplus_{i\in I} U_i$ för varje $f \in W$, och vi kan således definiera en avbildning $T\colon V \to \bigoplus_{i\in I} U_i$ genom att sätta $Tf = \sum_{i\in I} f(i)$. Man verifierar omedelbart att avbildningen T är linjär och surjektiv, och att den också är injektiv följer direkt av påstående 3.3.15. Avbildningen T är med andra ord en isomorfi, och detta gör att vi kan identifiera W med $\bigoplus_{i\in I} U_i$.

Exempel 3.3.21 Låt $\mathcal{C}_J(\mathbf{R})$ resp. $\mathcal{C}_U(\mathbf{R})$ beteckna vektorrummen av alla jämna resp. alla udda kontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}$. Detta är två linjärt oberoende delrum av $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, ty om $g + h = 0$, där funktionen g är jämn och funktionen h är udda, så är $g = -h$ både jämn och udda, men den enda funktion som är både jämn och udda är nollfunktionen, så slutsatsen är att $g = h = 0$. Summan av de båda delrummen är således direkt.

Varje kontinuerlig funktion f kan skrivas som summan av en jämn kontinuerlig funktion f_J och en udda kontinuerlig funktion f_U. Om vi sätter $f_J(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$ och $f_U(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$, är nämligen den första funktionen jämn och den andra udda, och $f_J + f_U = f$. Detta visar att $\mathcal{C}_J(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{C}_U(\mathbf{R}) = \mathcal{C}(\mathbf{R})$ □

Projektioner

Definition 3.3.16 Antag att vektorrummet V är en direkt summa av två delrum U_1 och U_2, dvs. att

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Detta innebär att varje vektor $v \in V$ har en unik uppdelning $v = v_1 + v_2$ med $v_i \in U_i$, och genom att sätta

$$Pv = v_1$$

får vi en linjär operator P på V med följande egenskaper:

$$P^2 = P, \quad \mathcal{V}(P) = U_1 \quad \text{och} \quad \mathcal{N}(P) = U_2. \tag{2}$$

Operatorn P kallas en *projektion* av V på U_1.

Egenskaperna (2) karakteriserar projektioner, ty vi har följande resultat.

Påstående 3.3.17 *Låt P vara en linjär operator på ett vektorrum V och antag att $P^2 = P$. Då är*

$$V = \mathcal{V}(P) \oplus \mathcal{N}(P),$$

och P är projektionen av V på värderummet $\mathcal{V}(P)$.

Bevis. V är lika med summan av de båda delrummen $\mathcal{V}(P)$ och $\mathcal{N}(P)$, ty varje vektor $v \in V$ kan skrivas

$$v = Pv + (v - Pv),$$

där vektorn $(v - Pv)$ ligger i $\mathcal{N}(P)$ beroende på att $P(v - Pv) = Pv - P^2v = Pv - Pv = 0$.

Uppdelningen är vidare unik, ty om $v = v_1 + v_2$ är en godtycklig uppdelning med $v_1 \in \mathcal{V}(P)$ och $v_2 \in \mathcal{N}(P)$, så är $v_1 = Pw$ för någon vektor $w \in V$, och det följer att $Pv = Pv_1 + Pv_2 = P^2w + 0 = Pw = v_1$ och $v - Pv = v - v_1 = v_2$.

Summan av $\mathcal{V}(P)$ och $\mathcal{N}(P)$ är således direkt, och därmed är påståendet bevisat. $\square$

Övningar

3.15 Vilka av följande mängder är delrum?

a) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ b) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(0) + 2f(1) = 1\}$

c) $\{f \in \mathcal{C}^1[0,1] \mid 2f(0) + 3f'(1) = 0\}$ d) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid \int_0^1 tf(t)\,dt = 0\}$

e) $\{f \in \mathcal{C}[0,\infty[\mid \lim_{t\to\infty} f(t)$ existerar$\}$

f) $\{f \in \mathcal{C}[0,\infty[\mid \lim_{t\to\infty} f(t) = 0\}$

g) $\{X \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid AX = XA\}$, där A är en given 2×2-matris.

3.16 Det linjära rummet $\mathbf{R}^\infty$ av *alla* reella följder $x = (x_n)_1^\infty$ är alltför stort för att vara riktigt intressant. I analysen betraktar man därför ett antal lämpliga delmängder, varav några viktiga listats nedan. Vilka av dessa är linjära delrum av $\mathbf{R}^\infty$?

a) $M = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existerar}\}$

b) $c_0 = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$

c) $\ell^\infty = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid \sup |x_n| < \infty\}$

d) $\ell^1 = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$

e) $c_K = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid x_n = 0 \text{ för alla utom ändligt många index } n\}$

3.17 Bestäm nollrum och bildrum till följande linjära avbildningar $T\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.

a) $Tp(t) = tp(t)$ b) $Tp(t) = p(t) - p(0)$ c) $Tp(t) = \dfrac{p(t) - p(0)}{t}$.

3.18 Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning.

a) Visa att $\{0\} = \mathcal{N}(T^0) \subseteq \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^2) \subseteq \mathcal{N}(T^3) \subseteq \dots$
b) Visa att $T^{-1}(\mathcal{N}(T^k)) = \mathcal{N}(T^{k+1})$. (Med $T^{-1}(M)$ menas inversa bilden till mängden M under T, dvs. $T^{-1}(M) = \{v \in V \mid Tv \in M\}$.)
c) Antag att $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^{k+1})$. Visa att i så fall är också $\mathcal{N}(T^{k+1}) = \mathcal{N}(T^{k+2})$ och följaktligen (genom induktion) $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^n)$ för alla heltal $n \geq k$.
d) Visa att $V = \mathcal{V}(T^0) \supseteq \mathcal{V}(T) \supseteq \mathcal{V}(T^2) \supseteq \mathcal{V}(T^3) \supseteq \dots$
e) Visa att $T(\mathcal{V}(T^k)) = \mathcal{V}(T^{k+1})$.
f) Antag att $\mathcal{V}(T^k) = \mathcal{V}(T^{k+1})$. Visa att i så fall är också $\mathcal{V}(T^{k+1}) = \mathcal{V}(T^{k+2})$ och följaktligen $\mathcal{V}(T^k) = \mathcal{V}(T^n)$ för alla heltal $n \geq k$.

Anmärkning. Med en operator T:s *ascent* $\alpha(T)$ menas det minsta talet k med egenskapen att $\mathcal{N}(T^{k+1}) = \mathcal{N}(T^k)$, om det finns något sådant tal. Om det inte finns något sådant tal definierar man $\alpha(T) = \infty$. Med operatorns *descent* $\delta(T)$ menas det minsta talet k med egenskapen att $\mathcal{V}(T^{k+1}) = \mathcal{V}(T^k)$, om det finns något sådant tal. Om det inte finns något sådant tal sätter man $\delta(T) = \infty$. Resultaten i b) och d) innebär att $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{\alpha(T)})$ för alla $n \geq \alpha(T)$ och $\mathcal{V}(T^n) = \mathcal{V}(T^{\delta(T)})$ för alla $n \geq \delta(T)$.

3.19 Ge exempel på två delrum U_1 och U_2 vars union $U_1 \cup U_2$ inte är ett delrum.

3.20 I $\mathbf{R}^4$ betraktar vi delrummet $U = \operatorname{spn}\{(1, -2, 3, 1), (2, 4, 1, 2), (3, 1, 1, 3)\}$. Undersök om $v \in U$ ifall

a) $v = (9, -5, 8, -3)$ b) $v = (1, -1, 1, 1)$

3.21 För vilka reella tal a gäller

a) $1 + t + at^2 \in \operatorname{spn}\{1 + 2t - t^2,\ 3 + t + 2t^2\}$

b) $1 + at + t^2 \in \operatorname{spn}\{1 + t + t^2,\ 2 - t + 2t^2\}$?

3.22 *Summan* $A + B$ av två godtyckliga delmängder A och B av ett vektorrum kan definieras som mängden av alla vektorer $u + v$, där $u \in A$ och $v \in B$. Visa att $\operatorname{spn} A + \operatorname{spn} B = \operatorname{spn}(A \cup B)$.

3.23 Låt U vara lösningsrummet till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Visa att U är isomorft med $\mathbf{R}^2$.

3.24 Bestäm en ändlig mängd av generatorer för lösningsrummet till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+5x_3} + 2x_4 \phantom{{}+6x_5} = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

3.25 Bestäm nollrum och kolonnrum till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.26 Bestäm ett linjärt ekvationssystem vars lösningsrum är lika med

$$\operatorname{spn}\{(1,2,1,3,2),(2,1,3,2,2),(1,3,4,2,1),(0,7,1,7,3)\}.$$

3.27 Visa att två delrum U_1 och U_2 är linjärt oberoende om och endast om

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

3.28 Låt T och S vara två linjära operatorer på V och antag att $T^2 = T$ och $TS = 0$. Visa att $\mathcal{V}(T) \cap \mathcal{V}(S) = \{0\}$.

3.4 Linjära avbildningar från $\mathbf{K^n}$ till $\mathbf{K^m}$

En linjär avbildning $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ är enligt sats 3.2.8 entydigt bestämd av avbildningens effekt på enhetsvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ i $\mathbf{K}^n$. Detta gör det möjligt att till avbildningen associera en $m \times n$-matris som fullständigt karakteriserar avbildningen. Räkning med linjära avbildningar blir på så sätt matriskalkyl.

Vi har tidigare sagt att vi inte skiljer på vektorer i $\mathbf{K}^n$ och kolonnmatriser med n element. För att göra saken tydligare skall vi dock i det här avsnittet använda beteckningen $\widetilde{x}$ för den kolonnmatris som svarar mot n-tipeln x, dvs.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\widetilde{\ } = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]^t.$$

Definition 3.4.1 Låt $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ vara en linjär avbildning och sätt

$$T\mathbf{e}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}).$$

Koefficienterna a_{ij} definierar en $m \times n$-matris

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

som kallas *matrisen* till avbildningen T.

Observera att den j:te kolonnen $\widetilde{T}_{*j}$ är vektorn $T\mathbf{e}_j$ i $\mathbf{K}^m$ skriven som kolonnmatris, dvs. $\widetilde{T}_{*j} = (T\mathbf{e}_j)\widetilde{\ }$.

Med hjälp av avbildningens matris kan vi beräkna bilden av en vektor som en matrismultiplikation.

Påstående 3.4.2 *Låt $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ vara en linjär avbildning med matris $\widetilde{T}$. För alla $x \in \mathbf{K}^n$ är*

$$(Tx)\widetilde{\ } = \widetilde{T}\widetilde{x}.$$

Bevis. $(Tx)\widetilde{\ } = (\sum_{j=1}^n x_j T\mathbf{e}_j)\widetilde{\ } = \sum_{j=1}^n x_j (T\mathbf{e}_j)\widetilde{\ } = \sum_{j=1}^n x_j \widetilde{T}_{*j} = \widetilde{T}\widetilde{x}$. □

Sats 3.4.3 *Matristilldelningen*

$$\mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}, \quad T \mapsto \widetilde{T}$$

är en isomorfi.

Bevis. Olika linjära avbildningar ger förstås upphov till olika matriser, och varje matris definierar en motsvarande linjär avbildning, så matristilldelning är en bijektiv avbildning mellan de båda rummen.

Om avbildningarna S och T har matriserna $\widetilde{S}$ och $\widetilde{T}$, så är

$$\begin{aligned}\big((\alpha\, S+\beta\, T)x\big)^{\widetilde{}} &= (\alpha\, Sx+\beta\, Tx)^{\widetilde{}} = \alpha\,(Sx)^{\widetilde{}}+\beta\,(Tx)^{\widetilde{}} = \alpha\,\widetilde{S}\widetilde{x}+\beta\,\widetilde{T}\widetilde{x}\\ &= (\alpha\,\widetilde{S}+\beta\,\widetilde{T})\widetilde{x},\end{aligned}$$

vilket innebär att $(\alpha\, S+\beta\, T)^{\widetilde{}} = \alpha\,\widetilde{S}+\beta\,\widetilde{T}$. Matristilldelningen är med andra ord en linjär bijektiv operation, dvs. en isomorfi. □

Exempel 3.4.1 Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, som avbildar $(1,0,0)$ på $(2,3)$, $(0,1,0)$ på $(1,2)$ och $(0,0,1)$ på $(3,5)$, har matrisen

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}.$$

Eftersom

$$\widetilde{T}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1+\ \ x_2+3x_3\\ 3x_1+2x_2+5x_3\end{bmatrix},$$

är $Tx = (2x_1+x_2+3x_3, 3x_1+2x_2+5x_3)$. □

Antag nu att vi har ett antal vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_p$ i $\mathbf{K}^n$ och lika många vektorer $w_1, w_2, \ldots, w_p$ i $\mathbf{K}^m$, och att vi önskar konstruera en linjär avbildning $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ med egenskapen att $Tv_i = w_i$ för $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, p$. Om vi låter X vara den sökta avbildningen matris, så skall vi alltså bestämma X så att

$$X\widetilde{v}_i = \widetilde{w}_i \qquad \text{för } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, p.$$

Bilda matriserna $A = [\widetilde{v}_1\ \ \widetilde{v}_2\ \ \ldots\ \ \widetilde{v}_p]$ och $B = [\widetilde{w}_1\ \ \widetilde{w}_2\ \ \ldots\ \ \widetilde{w}_p]$. Då blir de p stycken ekvationerna ovan ekvivalenta med matrisekvationen

$$XA = B.$$

Om matrisen A är kvadratisk, dvs. om antalet vektorer p är lika med n, så har denna ekvation en entydig lösning X för varje B om och endast om matrisen A är inverterbar, i vilket fall $X = BA^{-1}$. För att lösa ekvationen $XA = B$ praktiskt, vare sig matrisen A är kvadratisk eller ej, transponerar vi först ekvationen till $A^tX^t = B^t$, varefter vi utför elementära radoperationer på matrisen

$$\big[A^t \mid B^t\big]$$

till dess att den eventuella lösningen X^t kan avläsas. Matrisen X fås förstås genom att transponera X^t.

Exempel 3.4.2 Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ som avbildar $(1,2,1)$ på $(2,7,3,0)$, $(1,1,1)$ på $(1,6,2,1)$ och $(-1,2,1)$ på $(0,1,5,2)$.
Lösning: Radoperationer på matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

leder till matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Den högra delmatrisen är matrisen $\widetilde{T}^{\,t}$. Det finns med andra ord en unik avbildning T med de angivna egenskaperna, och avbildningens matris är

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Exempel 3.4.3 Bestäm alla linjära avbildningar $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som avbildar $(1,2,1)$ på $(1,1,1)$ och $(2,4,3)$ på $(1,7,8)$.
Losning: Vi utför radoperationer på matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

och får då matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right].$$

Matrisekvationen har i detta fall inte någon entydig lösning beroende på att vi kan avbilda vektorn $(0,1,0)$ på en godtycklig vektor (a,b,c) i $\mathbf{R}^3$. Om vi tar hänsyn till detta erhåller vi

$$\widetilde{T}^{\,t} = \begin{bmatrix} 2-2a & -4-2b & -5-2c \\ a & b & c \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Det finns således oändligt många linjära avbildningar som uppfyller de givna villkoren. □

Den vid första anblicken egendomliga definitionen av matrismultiplikation får nu i efterhand sin motivering av följande resultat om matrisen för en sammansatt linjär avbildning.

Sats 3.4.4 *Låt* $S\colon \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ *och* $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ *vara linjära avbildningar. Då har den sammansatta avbildningen* TS *matrisen* $\widetilde{T}\widetilde{S}$, *dvs.* $(TS)\tilde{\ } = \widetilde{T}\widetilde{S}$.

Bevis. $\big((TS)x\big)\tilde{\ } = \big(T(Sx)\big)\tilde{\ } = \widetilde{T}(Sx)\tilde{\ } = \widetilde{T}(\widetilde{S}\,\widetilde{x}) = (\widetilde{T}\widetilde{S})\,\widetilde{x}$. □

Nästa resultat om matrisen till en invers linjär avbildningen borde nu inte komma som någon överraskning.

Sats 3.4.5 *En linjär avbildning* $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ *är bijektiv om och endast om* $m = n$ *och matrisen* $\widetilde{T}$ *är inverterbar. Den inversa avbildningens matris är i så fall* $\widetilde{T}^{-1}$, *dvs.* $(T^{-1})\tilde{\ } = \widetilde{T}^{-1}$.

Bevis. Avbildningen T är bijektiv om och endast om ekvationen $Tx = y$ är entydigt lösbar för alla $y \in \mathbf{K}^m$, vilket är ekvivalent med att matrisekvationen $\widetilde{T}\,\widetilde{x} = \widetilde{y}$ är entydigt lösbar för varje högerled y. Enligt t. ex. satserna 1.6.2 och 2.3.5 så gäller detta om och endast om $m = n$ och matrisen $\widetilde{T}$ är inverterbar, i vilket fall vi har $\widetilde{x} = \widetilde{T}^{-1}\,\widetilde{y}$. Det sista sambandet uttrycker också att $\widetilde{T}^{-1}$ är den inversa avbildningens matris. □

Sats 3.4.3 innebär att vi kan uppfatta en matris som en linjär avbildning och omvänt. Vi har definierat begreppet *nollrum* för både matriser och linjära avbildningar, och vi bör nu förstås kontrollera att de båda definitionerna inte står i konflikt mot varandra.

Nollrummet $\mathcal{N}(T)$ till en linjär avbildning $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ består av alla $x \in \mathbf{K}^n$ för vilka $Tx = 0$. Denna ekvation är ekvivalent med matrisekvationen $\widetilde{T}\,\widetilde{x} = 0$, och lösningarna x till denna (uppfattade som element i $\mathbf{K}^n$ utgör per definition nollrummet $\mathcal{N}(\widetilde{T})$ till avbildningens matris $\widetilde{T}$. Detta innebär att de båda nollrummen sammanfaller, dvs.

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(\widetilde{T}).$$

Bildrummet $\mathcal{V}(T)$ spänns upp av vektorerna $T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \dots, T\mathbf{e}_n$. Motsvarande kolonner i matrisen $\widetilde{T}$ spänner upp matrisens kolonnrum $\mathcal{K}(\widetilde{T})$. Om vi som tidigare identifierar kolonnmatriser med vektorer i motsvarande $\mathbf{K}^m$, så är alltså avbildningens bildrum lika med avbildningsmatrisens kolonnrum, eller i symboler

$$\mathcal{V}(T) = \mathcal{K}(\widetilde{T}).$$

Som konsekvens av att vi identifierat avbildningens nollrum med lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem får vi nu omedelbart följande resultat.

Påstående 3.4.6 *Om den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ är injektiv, så är $m \geq n$.*

Bevis. Injektiviteten medför på grund av sats 3.3.5 att nollrummet till matrisen $\widetilde{T}$ endast innehåller nollvektorn, dvs. att systemet $\widetilde{T}\,\widetilde{x} = 0$ har unik lösning. Detta ekvationssystem har m ekvationer och n obekanta. Ett nödvändigt villkor för att ekvationssystemet inte skall ha någon annan lösning än den triviala är enligt sats 1.6.1 att $m \geq n$. □

Övningar

3.29 Definiera avbildningarna $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ och $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ genom att sätta

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3) \quad \text{och} \\ S(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2, 4x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Bestäm matrisen till avbildningarna ST och TS. Är någon av dessa avbildningar bijektiv?

3.30 Bestäm om möjligt en linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ som avbildar vektorerna $(1, -2, 3)$, $(2, -3, 1)$ och $(1, -1, -2)$ i tur och ordning på

a) $(2, 1, 3, 1)$, $(1, -2, 2, 4)$ och $(-1, 3, 1, 4)$;

b) $(2, 1, -1, 1)$, $(8, 2, 1, -2)$ och $(6, 1, 2, -3)$.

3.31 En linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ uppfyller $T(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 2) = (0, 1, 2)$ och $T(1, -2, -1) = (0, 0, 0)$. Bestäm avbildningens matris samt visa att $T^2 = T$.

3.32 Bestäm nollrummet till den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5 Linjärt beroende och oberoende

Om A och B är två godtyckliga delmängder av ett vektorrum, så gäller uppenbarligen implikationen

$$B \subseteq A \implies \operatorname{spn} B \subseteq \operatorname{spn} A.$$

Det är vidare klart att vi kan ha $\operatorname{spn} B = \operatorname{spn} A$ trots att $B \neq A$. Exempelvis är $\operatorname{spn} B = \operatorname{spn}(B \cup \{0\})$. En mängds spann ändras med andra ord inte om vi tillfogar nollvektorn till mängden. Hur spannet påverkas om vi lägger till ett godtyckligt element framgår av följande utsaga.

Påstående 3.5.1 *Låt A vara en godtycklig mängd och v en godtycklig vektor i ett vektorrum. Då gäller att*

$$v \in \operatorname{spn} A \iff \operatorname{spn}(A \cup \{v\}) = \operatorname{spn} A.$$

Bevis. Trivialt gäller att $v \in \operatorname{spn}(A \cup \{v\})$, så därför är de båda spannen olika om $v \notin \operatorname{spn} A$.

Antag att $v \in \operatorname{spn} A$. För att visa att de båda spannen då är lika, räcker det förstås att visa att $\operatorname{spn}(A \cup \{v\}) \subseteq \operatorname{spn} A$, ty den omvända inklusionen är trivial. Men varje vektor $u \in \operatorname{spn}(A \cup \{v\})$ är en linjärkombination av v och av vektorer i A, och eftersom v själv är en linjärkombination av vektorer i A, är det klart att u kan skrivas som en linjärkombination av enbart vektorer i A, dvs. $u \in \operatorname{spn} A$. □

En mängds spann ändras med andra ord inte om vi stryker en vektor i mängden som är en linjärkombination av övriga vektorer i mängden.

Exempel 3.5.1 $\operatorname{spn}\{v_1, v_2, 3v_1 - 2v_2\} = \operatorname{spn}\{v_1, v_2\}$. □

Definition 3.5.2 En vektor säges vara *linjärt beroende av en mängd A* om den tillhör $\operatorname{spn} A$. En vektor kallas *linjärt oberoende av en mängd* om den inte är linjärt beroende av mängden.

Exempel 3.5.2 Vektorn $3v_1 - 2v_2$ är linjärt beroende av mängden $\{v_1, v_2\}$. □

Exempel 3.5.3 Vektorn $(1, 1, 1)$ i $\mathbf{R}^3$ är linjärt oberoende av mängden som består av de två vektorerna $(1, 0, 0)$ och $(1, 1, 0)$. □

Med hjälp av begreppet linjärt beroende kan vi nu formulera om påstående 3.5.1 på följande vis:

Påstående 3.5.1′ *A och $A \cup \{v\}$ spänner upp samma delrum om och endast om vektorn v är linjärt beroende av A.*

När är varje vektor v i en mängd A väsentlig för $\operatorname{spn} A$? På grund av påstående 3.5.1 gäller att $\operatorname{spn}(A \setminus \{v\}) \neq \operatorname{spn} A$ om och endast om vektorn v är linjärt oberoende av $A \setminus \{v\}$. Varje vektor i A bidrar således till storleken av $\operatorname{spn} A$ om och endast om ingen vektor i A är beroende av mängdens övriga vektorer. Detta konstaterande föranleder nästa definition.

Definition 3.5.3 En mängd A kallas *linjärt beroende* om minst en av dess vektorer v är linjärt beroende av de övriga vektorerna i mängden, dvs. av $A \setminus \{v\}$.

Mängden A kallas *linjärt oberoende* om den inte är linjärt beroende, dvs. om ingen av dess vektorer är linjärt beroende av mängdens övriga vektorer, dvs. om varje vektor v i mängden är linjärt oberoende av $A \setminus \{v\}$.

Av definitionen följer trivialt att den tomma mängden $\emptyset$ är linjärt oberoende, ty för den är det definierande villkoret trivialt uppfyllt.

Påstående 3.5.4 (a) *Varje delmängd av en linjärt oberoende mängd är linjärt oberoende.*

(b) *En oändlig mängd är linjärt oberoende om och endast om varje ändlig delmängd av den är linjärt oberoende.*

Bevis. (a) är en omedelbar konsekvens av definitionen, och för att visa (b) noterar vi först att en linjärkombination per definition är en *ändlig* summa av vektorer. Om mängden A är linjärt beroende, så är någon vektor v i A linjärt beroende av mängden $A \setminus \{v\}$, och följaktligen är v beroende av någon ändlig delmängd B av $A \setminus \{v\}$. Detta innebär att den ändliga delmängden $B \cup \{v\}$ är linjärt beroende. Om varje ändlig delmängd av A är linjärt oberoende, så måste alltså A vara linjärt oberoende. □

På grund av påstående 3.5.4 är det fullt tillräckligt att kunna karakterisera *ändliga* linjärt oberoende mängder. Genom att nysta upp definitionen av linjärt beroende och oberoende i termer av det grundläggande begreppet linjärkombination, får vi följande karakterisering.

Påstående 3.5.5 (a) *Mängden $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är linjärt beroende om och endast om det finns skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, som inte alla är 0, så att*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

(b) *Mängden $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är linjärt oberoende om och endast om*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Bevis. (a) Om mängden är linjärt beroende, så kan en av vektorerna i mängden, v_1 säg, skrivas som en linjärkombination av de övriga vektorerna, dvs.

$$1v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n = 0$$

för lämpliga skalärer λ_i. Ekvationen i (a) är således uppfylld med en nollskild koefficient för v_1.

Antag omvänt att ekvationen i (a) är uppfylld med någon nollskild koefficient, som vi utan inskränkning kan anta är λ_1. Efter multiplikation med $1/\lambda_1$ kan vi vidare anta att relationen gäller med $\lambda_1 = 1$. Detta innebär att v_1 är en linjärkombination av de övriga vektorerna v_2, …, v_n, och mängden $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ är därför linjärt beroende.

Påstående (b) är enbart en logisk omformulering av påstående (a). $\square$

Exempel 3.5.4 Mängden $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ är en linjärt oberoende delmängd av $\mathbf{R}^3$, ty vektorekvationen

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0)$$

är ekvivalent med det linjära homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} = 0 \\ \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2+\lambda_3} = 0, \end{cases}$$

som bara har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. $\square$

Exempel 3.5.5 Mängden $\{1+t, 1-t+t^2, 2+t^2\}$ i $\mathcal{P}_2$ är linjärt beroende, ty ekvationen

$$\lambda_1(1+t) + \lambda_2(1-t+t^2) + \lambda_3(2+t^2) = 0$$

har bl. a. den icke-triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. $\square$

Nästa sats ger oss en metod att skapa linjärt oberoende mängder.

Sats 3.5.6 *Om mängden A är linjärt oberoende och om vektorn v är linjärt oberoende av A, så är också mängden $A \cup \{v\}$ linjärt oberoende.*

Bevis. Vi måste visa att varje vektor w i $A \cup \{v\}$ är linjärt oberoende av de övriga vektorerna i mängden. Detta gäller enligt förutsättningarna för $w = v$. Låt därför w vara en godtycklig vektor i A och antag att w är linjärt beroende av v och de övriga vektorerna i A, dvs. att

$$w = \lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_m v_m$$

för lämpliga vektorer v_1, …, v_m i $A \setminus \{w\}$ och lämpliga skalärer. Vi skall visa att detta leder till en motsägelse. Om $\lambda = 0$, så är w en linjärkombination av vektorer i $A \setminus \{w\}$, vilket strider mot förutsättningen att A är linjärt oberoende. Om $\lambda \neq 0$, så är

$$v = \frac{1}{\lambda} w - \frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda} v_m,$$

vilket strider mot att v är linjärt oberoende av A. $\square$

Exempel 3.5.6 Genom att starta från den tomma mängden samt notera att polynomet t^n inte är en linjärkombination av polynomen 1, t, t^2, ..., t^{n-1} erhåller vi successivt med hjälp av sats 3.5.6 att mängderna $\{1\}$, $\{1, t\}$, $\{1, t, t^2\}$, ..., $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ är linjärt oberoende delmängder av vektorrummet $\mathcal{P}$. Det följer att varje ändlig delmängd av den oändliga mängden $\{1, t, t^2, \dots, \}$ är linjärt oberoende, så den sistnämnda mängden är också linjärt oberoende. $\square$

Övningar

3.33 För vilka värden på a är vektorerna $(1, 1, 0)$, $(1, a, 2)$, $(1, 0, 1)$ i $\mathbf{R}^3$ linjärt beroende?

3.34 Visa att funktionerna t, e^{2t} och te^{2t} är linjärt oberoende i rummet av alla kontinuerliga funktioner.

3.35 Låt A och B vara två 2×2-matriser. Visa att matriserna A, A^t, B, B^t är linjärt beroende.

3.6 Baser

Definition 3.6.1 Med en *bas* för ett vektorrum menas en linjärt oberoende mängd som spänner upp vektorrummet.

Exempel 3.6.1 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ är en bas för $\mathbf{K}^n$, $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$ är en bas för $\mathcal{P}_d$, och den oändliga mängden $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ är en bas för $\mathcal{P}$. Vi kallar dessa baser för *standardbaserna* för respektive rum. $\square$

Isomorfier bevarar baser:

Påstående 3.6.2 *Om $T\colon V \to W$ är en isomorfi och B är en bas i rummet V, så är bilden $T(B)$ en bas i W.*

Bevis. Det enkla beviset för detta påstående lämnas som övning. $\square$

Vi skall nu karakterisera baser som minimala genererande mängder och maximala linjärt oberoende mängder.

Definition 3.6.3 En mängd A som genererar ett vektorrum V kallas *minimal* om ingen äkta delmängd av A genererar V, dvs. om $\operatorname{spn} B \neq V$ för varje äkta delmängd B. En linjärt oberoende mängd A kallas *maximal* om ingen mängd som innehåller A som äkta delmängd är linjärt oberoende, dvs. om $A \subset B$, $B \neq A$ medför att B är linjärt beroende.

Sats 3.6.4 *Låt A vara en delmängd av ett vektorrum V. Följande tre villkor är då ekvivalenta:*

(α) *A är en maximal linjärt oberoende mängd.*
(β) *A är en minimal genererande mängd.*
(γ) *A är en bas för V.*

Bevis. (α) $\Rightarrow$ (γ): Antag att A är en maximal linjärt oberoende mängd. Om $\operatorname{spn} A \neq V$, så finns det en vektor v utanför $\operatorname{spn} A$. Men då är också mängden $A \cup \{v\}$ linjärt oberoende enligt sats 3.5.6. Detta strider mot att A är maximal. Följaktligen är $\operatorname{spn} A = V$, dvs. mängden A är en bas.

(γ) $\Rightarrow$ (α): Antag att A är en bas. Per definition är mängden A linjärt oberoende; vi skall visa att den också är maximal. Låt därför B vara en mängd som innehåller A som äkta delmängd. Varje vektor i V tillhör $\operatorname{spn} A$ och är därför linjärt beroende av A, och speciellt gäller detta för varje vektor $v \in B \setminus A$. Mängden B är således linjärt beroende. Detta visar att A är maximal.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Antag att A är en minimal genererande mängd. A är linjärt oberoende om det för varje vektor $v \in A$ gäller att $v \notin \operatorname{spn}(A \setminus \{v\})$. Men detta följer av påstående 3.5.1, ty på grund av minimaliteten hos A är $\operatorname{spn}(A \setminus \{v\}) \neq \operatorname{spn} A$.

(γ) $\Rightarrow$ (β): Låt A vara en bas, och antag att A inte är en minimal genererande mängd. Då finns det en äkta delmängd B som genererar V. Speciellt är då varje $v \in A \setminus B$ en linjärkombination av vektorer i B, och mängden A är därför linjärt beroende, vilket är en motsägelse. Det följer att A är minimal. $\square$

Vi kan nu visa att varje vektorrum har en bas. Följande sats är huvudresultatet.

Sats 3.6.5 *Låt $A \subseteq B$ vara två delmängder av vektorrummet V. Antag att A är linjärt oberoende och att B spänner upp V. Då har V en bas C som uppfyller $A \subseteq C \subseteq B$.*

Bevis. Låt C vara en linjärt oberoende mängd som uppfyller $A \subseteq C \subseteq B$ och är maximal med avseende på denna egenskap, dvs. om D är en annan linjärt oberoende mängd och $C \subseteq D \subseteq B$, så är $D = C$. (För att generellt bevisa existensen av en sådan maximal mängd C måste man utnyttja det s. k. urvalsaxiomet, något som faller utanför ramen för den här framställningen. Ifall mängden B är ändlig, vilket innebär att vektorrummet V är ändligt genererat, är emellertid existensen av C trivial, ty då finns det förstås bara ändligt många delmängder C' med egenskapen $A \subseteq C' \subseteq B$, och speciellt finns det bara ändligt många linjärt oberoende sådana mängder, och någon av dessa ändligt många mängder måste vara maximal.)

Det finns nu två möjligheter: Antingen gäller det att $B \subseteq \operatorname{spn} C$ eller också finns det en vektor $v \in B$ som inte tillhör $\operatorname{spn} C$.

I det förstnämnda fallet följer det av sats 3.3.8 att $V = \operatorname{spn} B \subseteq \operatorname{spn} C$, dvs. $\operatorname{spn} C = V$. Den linjärt oberoende mängden C spänner således upp V och är därför en bas.

I det andra fallet är vektorn v linjärt oberoende av C, så det följer av sats 3.5.6 att mängden $C \cup \{v\}$ är en linjärt oberoende delmängd av B. Detta strider emellertid mot att mängden C är maximal. Det andra alternativet är således uteslutet. $\square$

Sats 3.6.5 har följande korollarium.

Sats 3.6.6 *Låt V vara ett vektorrum. Då gäller:*

(a) *V har en bas.*

(b) *Varje linjärt oberoende mängd A i V ingår som delmängd av någon bas för vektorrummet V.*

(c) *Om U är ett linjärt delrum av V och A är en bas för U, så finns det en bas B för V med egenskapen att $A \subseteq B$.* (Vi säger att basen B är en utvidgning av basen A.)

(d) *Varje genererande mängd B i ett vektorrum innehåller en bas för rummet. Speciellt har alltså varje ändligt genererat vektorrum en ändlig bas.*

Bevis. (b) Tillämpa sats 3.6.5 på A och en godtycklig mängd B av generatorer som innehåller A, t. ex. V. (Om V är ändligt genererat av mängden D kan vi välja $B = A \cup D$.)

(c) följer direkt av (b), eftersom en U:s bas A speciellt måste vara linjärt oberoende.

(d) Tillämpa sats 3.6.5 på B och $A = \emptyset$. Om B är ändlig blir förstås basen ändlig.

(a) Eftersom den tomma mängden är linjärt oberoende, så följer (a) ur (b). (Naturligtvis följer (a) också ur (d).) $\square$

Anmärkning. Det triviala vektorrummet $\{0\}$, som bara består av nollvektorn, har den tomma mängden $\emptyset$ som bas, ty den tomma mängden är linjärt oberoende och $\operatorname{spn} \emptyset = \{0\}$.

Sats 3.6.6 ger oss två alternativ att konstruera baser för ett ändligt genererat vektorrum V – vi kan antingen bygga upp basen ”underifrån” med utgångspunkt från en given linjärt oberoende mängd eller konstruera den ”uppifrån” genom att successivt reducera en given mängd av generatorer.

Antag att A är en linjärt oberoende mängd (t. ex. $A = \emptyset$), och att B är en ändlig mängd av generatorer för vektorrummet V. Sätt $A_0 = A$. Om $\operatorname{spn} A_0 = V$ avbryter vi processen, annars väljer vi en vektor v_1 i $B \setminus \operatorname{spn} A_0$ och sätter $A_1 = A_0 \cup \{v_1\}$. Då är A_1 linjärt oberoende. Vi kan därför upprepa processen med A_1 istället för A_0, dvs. om $\operatorname{spn} A_1 \neq V$ kan vi välja en vektor v_2 i $B \setminus \operatorname{spn} A_1$ och sätta $A_2 = A_1 \cup \{v_2\}$, osv. På så sätt erhåller vi induktivt en följd A_0, A_1, …, A_n av linjärt oberoende mängder. Processen slutar efter ändligt många steg med att $\operatorname{spn} A_n = V$ för något n – om inte förr så när alla generatorerna tagit slut – och A_n är en bas för rummet.

Alternativt kan vi starta med en mängd B, som spänner upp rummet. Om B också är linjärt oberoende, så är B en bas. I motsatt fall finns det en vektor v i B som är linjärt beroende av de övriga vektorerna, och genom att stryka denna vektor får vi en ny delmängd $B' = B \setminus \{v\}$ som fortfarande spänner upp vektorrummet V. Upprepa nu proceduren med B' istället för B. Efter ändligt många steg erhåller vi en minimal genererande mängd, dvs. en bas.

Kolonnrummet till en matris genereras per definition av matrisens kolonner. I detta fall är Gausselimination en effektiv metod för att eliminera linjärt beroende kolonner ur spannet. Vi har nämligen följande resultat.

Sats 3.6.7 *Låt A vara en $m \times n$-matris och låt T vara en med A radekvivalent trappmatris. Antag att trappmatrisens ledande element finns i kolonnerna nummer $k_1, k_2, \dots, k_r$. Då är motsvarande kolonner A_{*k_1}, A_{*k_2}, …, A_{*k_r} i matrisen A en bas för kolonnrummet $\mathcal{K}(A)$.*

Bevis. Sätt $B = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ och $F = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$. Vi påminner om att man löser ekvationssystemet $Ax = b$ genom att transformera det till ett ekvivalent trappsystem $Tx = b'$, där variablerna x_i för $i \in B$ är de s. k. basvariablerna och för $i \in F$ är de fria variablerna. Systemet $Ax = b$ kan också skrivas $\sum_{i=1}^{n} x_i A_{*i} = b$ eller, om vi separerar basvariabler och fria variabler,

$$\sum_{i \in B} x_i A_{*i} = b - \sum_{i \in F} x_i A_{*i}.$$

Om systemet är lösbart kan vi tilldela de fria variablerna godtyckliga värden, och varje sådan tilldelning bestämmer entydigt basvariablernas värden. Speciellt finns det en unik lösning i vilken samtliga fria variabler är lika med noll.

Mängden av högerled b för vilka systemet är lösbart är lika med kolonnrummet för matrisen A. Detta innebär att det för varje b i kolonnrummet

$\mathcal{K}(A)$ finns en unik lösning till ekvationen

$$\sum_{i\in B} x_i A_{*i} = b.$$

Den linjära avbildningen

$$S\colon \mathbf{K}^r \to \mathcal{K}(A), \qquad S(x_{k_1},\dots,x_{k_r}) = \sum_{i\in B} x_i A_{*i}$$

är därför bijektiv, dvs. en isomorfi. Eftersom S avbildar standardbasen i $\mathbf{K}^r$ på kolonnerna A_{*k_1}, A_{*k_2}, …, A_{*k_r}, bildar dessa en bas för kolonnrummet. □

Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är vektorer i $\mathbf{K}^m$, så kan vi identifiera deras spann med kolonnrummet för den $m \times n$-matris A, som har vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_n$ som sina kolonner, och utnyttja föregående sats för att bestämma en bas för spannet. Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 3.6.2 Bestäm en bas för delrummet $U = \operatorname{spn}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ av $\mathbf{R}^4$, där $v_1 = (1,1,1,2)$, $v_2 = (2,3,1,4)$, $v_3 = (4,7,1,8)$ och $v_4 = (1,2,3,1)$, samt utvidga basen till en bas för hela $\mathbf{R}^4$.

Lösning: Om vi enbart skall bestämma en bas för U bland generatorerna, skriver vi vektorerna som kolonner i en matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementära radoperationer leder fram till följande radekvivalenta trappmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vars ledande kolonner är kolonnerna nr 1, 2 och 4. Följaktligen är motsvarande vektorer $\{v_1, v_2, v_4\}$ en bas för U.

Om vi samtidigt vill utvidga basen för U till en bas för $\mathbf{R}^4$, utgår vi från någon känd bas för $\mathbf{R}^4$, t. ex. standardbasen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$. Då är naturligtvis $\mathbf{R}^4 = \operatorname{spn}\{v_1, v_2, v_3, v_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Om vi därför skriver dessa åtta vektorer som kolonner i en matris och tillämpar sats 3.6.7, erhåller vi som resultat en bas för $\mathbf{R}^4$, där vi bland de fyra första kolonnerna kan utläsa en bas för U. Elementära radoperationer på matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger oss trappmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Som tidigare kan vi här utläsa att mängden $\{v_1, v_2, v_4\}$ är en bas för U samt att mängden $\{v_1, v_2, v_4, \mathbf{e}_1\}$ är en bas för $\mathbf{R}^4$, som utvidgar den erhållna basen för U. □

Vi har redan tidigare noterat att radekvivalenta matriser har samma radrum, och denna observation kan också utnyttjas för att bestämma baser för spann av ändligt många vektorer i $\mathbf{K}^n$. Skriv vektorerna som rader i en $m \times n$ matris A och beräkna en radekvivalent trappmatris T. Antag att denna matris har rang r, och antag för att förenkla beteckningarna att de r första kolonnerna i matrisen är de ledande kolonnerna. Radrummet spänns upp av trappmatrisens r icke-nollrader $T_{1*}, \ldots, T_{r*}$, där den i:te raden har utseendet

$$T_{i*} = \begin{bmatrix} 0 \ \ldots \ 0 \ t_{ii} \ t_{i\,i+1} \ \ldots \ t_{in} \end{bmatrix},$$

med $t_{ii} \neq 0$. Uppenbarligen är dessa rader linjärt oberoende, så de bildar en bas för radrummet till A, dvs. för det givna spannet. Den på så sätt erhållna basen är naturligtvis i allmänhet inte en delmängd av den ursprungliga mängden av generatorer.

Exempel 3.6.3 Bestäm en bas för rummet U i exemplet ovan genom att utföra radoperationer.

Lösning: Vi skriver vektorerna som rader i en matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

och utför radoperationer, vilket leder till trappmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slutsatsen är nu att $(1, 1, 1, 2)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 3, -1)$ är en bas för U. Det följer också omedelbart att denna bas kompletterad med vektorn $(0, 0, 0, 1)$ är en bas för $\mathbf{R}^4$. □

Övningar

3.36 Bestäm en bas för nollrummet och en bas för kolonnrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.37 Rummet W spänns upp av de fem vektorerna $(2, 4, 1, 3, -9)$, $(1, 2, -1, 1, -6)$, $(2, 4, -1, -1, -1)$, $(-1, -2, 1, -2, 9)$ och $(-1, -2, -2, -2, 3)$ i $\mathbf{R}^5$. Bestäm en bas för W och komplettera sedan denna bas med vektorer till en bas för $\mathbf{R}^5$.

3.38 Låt V vara nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

och W vara radrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -8 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas för delrummet $V \cap W$ av $\mathbf{R}^5$.

3.7 Dimension

Med dimensionen hos ett ändligt genererat vektorrum menas antalet vektorer i en godtycklig bas för rummet. För att denna definition skall vara meningsfull är det förstås nödvändigt att alla baser innehåller lika många vektorer. Vi skall visa detta med hjälp av följande sats.

Sats 3.7.1 *Antag att vektorrummet V spänns upp av en ändlig mängd B och att A är en linjärt oberoende delmängd av V. Då innehåller A högst lika många element som B.*

Bevis. Vi skall konstruera en speciell injektiv avbildning $j\colon A \to B$, och existensen av en sådan visar förstås att A inte innehåller fler element än B.

Avbildningen j konstrueras så att mängden $M = A \cup (B \setminus j(A))$ också spänner upp vektorrummet V. Vi kan uppfatta M som den mängd som uppstår ur B när man byter ut vektorerna i bildmängden $j(A)$ mot vektorerna i A, och vi kommer att konstruera mängden M stegvis med hjälp av induktion.

Låt därför k vara ett naturligt tal, och antag att vi redan konstruerat avbildningen j på en delmängd A_k av A innehållande k stycken element och så att

(i) funktionen $j\colon A_k \to B$ är injektiv med bildmängd $B_k = j(A_k)$,

(ii) mängden $A_k \cup (B \setminus B_k)$ spänner upp V.

Startsteget $k = 0$ är förstås trivialt; vi väljer $A_0 = B_0 = \emptyset$.

Sätt $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Om $A_k = A$ så är vi klara. Antag därför att $A_k \neq A$, och välj en vektor $a_{k+1} \in A \setminus A_k$. Eftersom mängden $A_k \cup (B \setminus B_k)$ spänner upp V, är a_{k+1} en linjärkombination av vektorer i A_k och i $B \setminus B_k$, vilket betyder att det finns vektorer $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m$ i $B \setminus B_k$ och skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ och $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_m$ så att

$$(1)\quad a_{k+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + \mu_{k+1} b_{k+1} + \mu_{k+2} b_{k+2} + \dots + \mu_m b_m.$$

Mängden $B \setminus B_k$ kan inte vara tom och ekvation (1) måste innehålla åtminstone en term $\mu_j b_j$ med nollskild μ-koefficient beroende på att mängden A är linjärt oberoende, vilket innebär att a_{k+1} inte kan vara en linjärkombination av enbart vektorerna $a_1, a_2, \dots, a_k$. Efter eventuell omnumrering kan vi anta att $\mu_{k+1} \neq 0$. Men då följer det av ekvation (1) att vektorn b_{k+1} är en linjärkombination av vektorerna $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ och $b_{k+2}, \dots, b_m$, där vektorerna $b_{k+2}, \dots, b_m$ ligger i mängden $B \setminus (B_k \cup \{b_{k+1}\})$. Det följer därför av påstående 3.5.1 att de båda mängderna $A_k \cup \{a_{k+1}\} \cup (B \setminus (B_k \cup \{b_{k+1}\}))$ och $A_k \cup \{a_{k+1}\} \cup (B \setminus B_k)$ har samma linjära hölje, och den sistnämnda mängdens linjära hölje är på grund av induktionsantagandet (ii) lika med hela V. Följaktligen är

$$\operatorname{spn}\bigl(A_k \cup \{a_{k+1}\} \cup (B \setminus (B_k \cup \{b_{k+1}\}))\bigr) = V.$$

Definiera nu $j(a_{k+1}) = b_{k+1}$; då är funktionen j definierad på mängden $A_{k+1} = A_k \cup \{a_{k+1}\}$, som innehåller $k+1$ stycken element, den är injektiv med bildmängd $B_{k+1} = B_k \cup \{b_{k+1}\}$, och mängden $A_{k+1} \cup (B \setminus B_{k+1})$ spänner upp vektorrummet V. Därmed är induktionssteget i konstruktionen klar.

Konstruktionen stoppar på grund av att $A_k = A$, om inte förr så när k är lika med antalet element i B, eftersom $B \setminus B_k$ då är den tomma mängden. □

Sats 3.7.2 *I ett ändligt genererat vektorrum V innehåller alla baser lika många element.*

Bevis. Låt B vara en ändlig bas för V; vi skall visa att varje annan bas A innehåller lika många element som B. Eftersom basen A speciellt är linjärt oberoende kan vi tillämpa sats 3.7.1 med slutsatsen att mängden A också är ändlig och att antalet element i A är mindre än eller lika med antalet element i B. Samma sats med ombytta roller för A och B ger den omvända olikheten mellan antalet element i A och B. Följaktligen innehåller A och B lika många element. □

Anmärkning. Med hjälp av kardinaltalsbegreppet kan sats 3.7.2 generaliseras på följande vis: Om A och B är två baser i ett godtyckligt vektorrum, så har A och B samma kardinaltal, dvs. det finns en bijektion mellan A och B. Se övning 3.44. För vektorrum som inte är ändligt genererade spelar emellertid basbegreppet en underordnad roll.

På grund av sats 3.7.2 är följande definition entydig.

Definition 3.7.3 Ett vektorrum V säges ha *dimension* n om det har en bas med n stycken vektorer, och vi skriver i så fall $\dim V = n$. Rummet kallas *oändligdimensionellt* om det inte har någon ändlig bas.

Anmärkning. I det oändligdimensionella fallet har alla baser samma kardinaltal, så dimensionen för ett sådant rum kan definieras som detta kardinaltal.

Det följer av sats 3.6.6 (d) att ett vektorrum är ändligdimensionellt om och endast om det är ändligt genererat.

Exempel 3.7.1 Baserna i exempel 3.6.1 visar att $\dim \mathbf{K}^n = n$ och att $\dim \mathcal{P}_d = d + 1$, samt att rummet $\mathcal{P}$ är oändligdimensionellt. □

Exempel 3.7.2 Som *komplext* vektorrum har $\mathbf{C}^n$ dimension n, men $\mathbf{C}^n$ kan också uppfattas som ett reellt vektorrum, och som sådant spänns det inte upp av vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ eftersom vi nu bara tillåter linjärkombinationer med *reella* skalärer. De $2n$ stycken vektorerna $(1, 0, \ldots, 0)$, $(\mathrm{i}, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$, $(0, 0, \ldots, \mathrm{i})$ bildar en bas för $\mathbf{C}^n$ som reellt vektorrum, så den *reella* dimensionen är $2n$. □

Exempel 3.7.3 Låt $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ beteckna mängden av alla tal av typen $a + b\sqrt{2}$, där a och b är rationella tal. Med de naturliga definitionerna av addition och skalär multiplikation blir $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ ett vektorrum över $\mathbf{Q}$. Rummet spänns upp av talen 1 och $\sqrt{2}$, som är linjärt oberoende över $\mathbf{Q}$ och således bildar en bas. Det följer att $\dim \mathbf{Q}[\sqrt{2}] = 2$. □

Sats 3.7.4 *Isomorfa vektorrum har samma dimension.*

Bevis. Om T är en isomorfi mellan vektorrummen V och W, och B är en bas i V, så är $T(B)$ en bas för W. Om B är oändlig så är förstås också $T(B)$ oändlig, och om B är ändlig så är $T(B)$ ändlig med lika många element. Två isomorfa vektorrum är således antingen båda oändligdimensionella eller också har båda samma ändliga dimension. □

I den omvända riktningen gäller:

Sats 3.7.5 *Varje n-dimensionellt vektorrum V över $\mathbf{K}$ är isomorft med $\mathbf{K}^n$.*

Bevis. Låt $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vara en bas för V och definiera $T\colon \mathbf{K}^n \to V$ genom att sätta $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$. Den linjära avbildningen T är surjektiv, eftersom en bas per definition spänner upp rummet V. Vidare innebär karakteriseringen 3.5.5 av linjärt oberoende att $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, så avbildningen T är också injektiv. Sammanfattningsvis är alltså T en isomorfi. □

Sats 3.7.5 har följande generalisering:

Sats 3.7.5′ *För varje vektorrum V finns det en mängd I så att rummet är isomorft med $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{K}$.*

Bevis. Låt $\{v_i \mid i \in I\}$ vara en bas för V, och definiera $T\colon \bigoplus_{i\in I} \mathbf{K} \to V$ genom att sätta $Tx = \sum_{i\in I} x(i)v_i$. Då är T en isomorfi. □

Sats 3.7.1 har följande omedelbara korollarium.

Sats 3.7.6 *Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum.*

(a) *Varje linjärt oberoende delmängd A av V innehåller högst n stycken vektorer.*

(b) *Varje mängd B som spänner upp vektorrummet V innehåller minst n stycken vektorer.*

Bevis. (a) Låt i sats 3.7.1 B vara en bas för V. Varje linjärt oberoende mängd A innehåller högst lika många element som B, dvs. högst n stycken.

(b) Låt i samma sats A vara en godtycklig bas för V, och det följer att ingen uppspännande mängd B kan innehålla färre än n element. □

I omvänd riktning har vi följande resultat.

Sats 3.7.7 *Låt A vara en mängd med n stycken vektorer i ett n-dimensionellt vektorrum V. Om A är linjärt oberoende eller om A spänner upp rummet, så är A en bas för V.*

Bevis. Om A är linjärt oberoende så finns det enligt sats 3.6.5 en bas C så att $A \subseteq C$, och om A spänner upp rummet så får vi istället enligt samma sats en bas C med $C \subseteq A$. Eftersom C innehåller n element, har A och C lika många element, och det följer i båda fallen att $C = A$. Mängden A är således en bas. □

Sats 3.7.8 *Antag att W är ett linjärt delrum av ett ändligdimensionellt rum V. Då är $\dim W \leq \dim V$ med likhet om och endast om $W = V$.*

Bevis. Låt A vara en bas för W. Eftersom A är en linjärt oberoende delmängd i V innehåller A högst $\dim V$ stycken element, vilket betyder att $\dim W \leq \dim V$. Likhet råder om och endast om A också är en bas för V, i vilket fall $W = V$. □

Sats 3.7.9 *Antag att V och W är två linjära delrum av något vektorrum. Då är*

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

Bevis. Låt A vara en bas för snittet $V \cap W$ och utvidga med en linjärt oberoende mängd B i $V \setminus W$ till en bas $A \cup B$ för V och med en linjärt oberoende mängd C i $W \setminus V$ till en bas $A \cup C$ för W. För att visa satsen räcker det nu att visa att $D = A \cup B \cup C$ är en bas för summan $V + W$, ty antalet element i D plus antalet element i A är lika med antalet element i $A \cup B$ plus antalet element i $A \cup C$, eftersom delmängderna A, B och C är parvis disjunkta.

Att D spänner upp summan $V + W$ är uppenbart, och för att visa att mängden är linjärt oberoende antar vi att

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i w_i = 0, \tag{1}$$

där vektorerna $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tillhör A, vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tillhör B och vektorerna $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tillhör C. Vektorn

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$$

är då en linjärkombination av basvektorer i V men också en linjärkombination av basvektorer i W, eftersom $v = -\sum_{i=1}^{n} \gamma_i w_i$. Det följer att v ligger i snittet

$V \cap W$. Vektorn v är med andra ord en linjärkombination av basvektorer i A, och eftersom vektorns koordinater i basen $A \cup B$ för V är entydigt bestämda, följer härav att $\beta_i = 0$ för alla i, och ekvation (1) reduceras därför till

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i w_i = 0.$$

Men vektorerna u_i och w_i ligger i basen för W, så följaktligen är också $\alpha_i = 0$ och $\gamma_i = 0$ för alla i. Därmed har vi visat att mängden $A \cup B \cup C$ är linjärt oberoende. □

Övningar

3.39 V är ett vektorrum av dimension 3, v är en vektor i V och $T\colon V \to V$ är en linjär avbildning som uppfyller $T^2 v \neq 0$, $T^3 v = 0$. Visa att v, Tv, $T^2 v$ är en bas för V.

3.40 Antag att U och V är två linjärt oberoende ändligdimensionella delrum av ett vektorrum. Visa att $\dim U \oplus V = \dim U + \dim V$.

3.41 Bestäm en bas och dimensionen för vektorrummet av alla symmetriska $n \times n$-matriser.

3.42 Visa att ett vektorrum är oändligdimensionellt om och endast om det för varje n innehåller ett n-dimensionellt delrum.

3.43 Betrakta i vektorrummet $\mathbf{K}^\infty$ följderna $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$, där $\lambda \in \mathbf{K}$. Visa att alla dessa följder är linjärt oberoende. En bas för $\mathbf{K}^\infty$ måste därför innehålla minst lika många element som $\mathbf{K}$, dvs. $\dim \mathbf{K}^\infty \geq \operatorname{card} \mathbf{K}$.

*3.44 Låt A och B vara två baser i ett oändligdimensionellt vektorrum V. Låt $B(v)$ beteckna den ändliga mängd av basvektorer ur B som behövs för att representera vektorn $v \in V$. Visa att varje $b \in B$ ligger i $B(a)$ för något $a \in A$, och drag därav slutsatsen att

$$B = \bigcup_{a \in A} B(a).$$

Av detta följer med hjälp av kardinaltalsaritmetik att

$$\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A \cdot \aleph_0 = \operatorname{card} A,$$

där $\aleph_0$ är kardinaltalet för mängden av naturliga tal, och av symmetriskäl gäller förstås också den omvända olikheten $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$, så därför är $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

*3.45 Låt V vara ett oändligdimensionellt vektorrum över $\mathbf{K}$. Visa att $\operatorname{card} V = \operatorname{card} \mathbf{K} \cdot \dim V$.

3.8 Rang

Dimensionerna hos en linjär avbildnings bild- och nollrum är kopplade till varandra på följande vis.

Sats 3.8.1 (Dimensionssatsen) *För varje linjär avbildning $T\colon V \to W$ är*

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{V}(T) = \dim V.$$

Bevis. Låt A vara en bas för nollrummet $\mathcal{N}(T)$, utvidga med vektorer till en bas B för hela V, och sätt $C = B \setminus A$.

Bildrummet $\mathcal{V}(T)$ spänns då upp av mängden $\{Tv \mid v \in B\}$, och eftersom $Tv = 0$ för alla $v \in A$, spänns $\mathcal{V}(T)$ också upp av mängden

$$T(C) = \{Tv \mid v \in C\}.$$

Vi skall visa att $T(C)$ är en bas för bildrummet genom att visa att mängden är linjärt oberoende, och att $T(C)$ innehåller lika många vektorer som C genom att visa att $Tv_1 \neq Tv_2$ om v_1 och v_2 är olika vektorer i C.

Antag för den skull motsatsen, dvs. att mängden $T(C)$ är linjärt beroende eller att det finns två element i C som avbildas på samma vektor av T. Då finns det skilda vektorer $v_1, v_2, \dots, v_m$ i C och skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, som inte alla är noll, så att

$$\lambda_1 Tv_1 + \lambda_2 Tv_2 + \cdots + \lambda_m Tv_m = 0.$$

Detta innebär att

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m) = 0,$$

så vektorn $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$ ligger i nollrummet $\mathcal{N}(T)$ och är därför en linjärkombination av vektorer i basen A. Detta ger en icke-trivial linjär relation mellan vektorer i A och vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_m$ i $B \setminus A$, vilket är omöjligt eftersom B är en bas. Vi har erhållit en motsägelse, och därmed har vi visat att $T(C)$ är en bas för $\mathcal{V}(T)$ och att $\operatorname{card} T(C) = \operatorname{card} C$. Det följer att

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{V}(T) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} C = \operatorname{card} B = \dim V. \qquad \square$$

Definition 3.8.2 Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Med *rangen* för T, förkortat $\operatorname{rang} T$, menas dimensionen hos värderummet $\mathcal{V}(T)$.

Vi skall strax motivera varför man kallar värderummets dimension för avbildningens rang, men först noterar vi följande korollarium till sats 3.8.1.

Korollarium 3.8.3 *En linjär avbildning $T\colon V \to W$ från ett ändligtdimensionellt vektorrum V är injektiv om och endast om* $\dim \mathcal{V}(T) = \dim V$.

För vektorrum V och W med samma ändliga dimension är därför avbildningen T injektiv om och endast om den är surjektiv.

Bevis. Avbildningen T är injektiv om och endast om $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, och enligt dimensionssatsen gäller detta om och endast om $\dim \mathcal{V}(T) = \dim V$. □

I kapitel 1 definierade vi rangen av en matris A som antalet ledande element i en med A radekvivalent trappmatris. Vi kan nu ge en alternativ karakterisering med hjälp av dimensionsbegreppet.

Sats 3.8.4 *Låt A vara en matris. Då är*

$$\operatorname{rang} A = \dim \mathcal{K}(A) = \dim \mathcal{R}(A).$$

Bevis. Sätt $r = \operatorname{rang} A$, och låt $k_1, k_2, \dots, k_r$ vara indexen för de ledande kolonnerna i en med A radekvivalent trappmatris T. Då är enligt sats 3.6.7 motsvarande kolonner i matrisen A en bas för A:s kolonnrum, så $r = \dim \mathcal{K}(A)$. Eftersom de r nollskilda raderna i T bildar en bas för A:s radrum, är rangen r också lika med dimensionen för radrummet. □

Korollarium 3.8.5 $\operatorname{rang} A^t = \operatorname{rang} A$.

Bevis. Eftersom $\mathcal{R}(A^t) = \mathcal{K}(A)$ är $\operatorname{rang} A^t = \dim \mathcal{R}(A^t) = \dim \mathcal{K}(A) = \operatorname{rang} A$. □

En matris A av typ $m \times n$ kan också uppfattas som (matrisen för) en linjär avbildning $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$, varvid avbildningens bildrum $\mathcal{V}(T)$ är lika med matrisens kolonnrum $\mathcal{K}(A)$. Det följer därför att $\dim \mathcal{V}(T) = \operatorname{rang} A$. Det är detta som motiverar definition 3.8.2.

Som tillämpning på dimensionssatsen bestämmer vi dimensionen för en matris nollrum.

Sats 3.8.6 *Låt A vara en $m \times n$-matris. Då är* $\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rang} A$.

Bevis. Matrisen A är matrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ med $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T)$, så dimensionssatsen ger

$$\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(T) = n - \operatorname{rang} T = n - \operatorname{rang} A.$$ □

En konsekvens av ovanstående sats är att dimensionen hos lösningsrummet $\mathcal{N}(A)$ till det homogena ekvationssystemet $Ax = 0$ är lika med antalet fria variabler; detta kan man naturligtvis lätt visa direkt utan att blanda in dimensionssatsen.

Övningar

3.46 Finns det någon linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ som uppfyller
a) $\mathcal{N}(T) = \operatorname{spn}\{(0,1,0)\}$ och $\mathcal{V}(T) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
b) $\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ och $\mathcal{V}(T) = \operatorname{spn}\{(0,1,0,0)\}$?
Ge exempel om det finns någon.

3.47 Bestäm dimensionen för följande matris kolonnrum, radrum och nollrum

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.48 Låt T vara en linjär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V och antag att $\mathcal{V}(T^2) = \mathcal{V}(T)$. Visa att $V = \mathcal{V}(T) \oplus \mathcal{N}(T)$.

3.9 Koordinater

Definition 3.9.1 Med en *koordinatavbildning* på ett n-dimensionellt vektorrum V menas en isomorfi $\xi\colon V \to \mathbf{K}^n$. Vi sätter $\xi_j = \pi_j\xi$, där $\pi_j\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ är projektionen på den j:te faktorn, dvs. $\pi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$. Per definition är då

$$\xi(v) = (\xi_1(v), \xi_2(v), \dots, \xi_n(v)).$$

Avbildningen $\xi_j\colon V \to \mathbf{K}$, som förstås är linjär eftersom den är sammansatt av linjära avbildningar, kallas den *j:te koordinatfunktionen*, och $\xi_j(v)$ kallas den *j:te koordinaten* för vektorn v med avseende på den givna koordinatavbildningen.

Vi kommer i fortsättningen ibland att beskriva koordinatavbildningar schematiskt med hjälp av följande diagram:

$$\begin{array}{c} V \\ \xi \big\downarrow \\ \mathbf{K}^n \end{array}$$

Exempel 3.9.1 Avbildningen $\xi\colon \mathcal{P}_d \to \mathbf{K}^{d+1}$, definierad av att

$$\xi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d) = (a_0, a_1, \dots, a_d),$$

är en koordinatavbildning på $\mathcal{P}_d$. $\square$

Exempel 3.9.2 Vi kan definiera en koordinatavbildning ξ från $\mathcal{M}_{2\times 2}$ till $\mathbf{K}^4$ genom att sätta

$$\xi \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}).$$

Det följer att $\dim \mathcal{M}_{2\times 2} = 4$, och generellt är förstås $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = m \cdot n$. $\square$

Exempel 3.9.3 Låt U vara lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Vi kan lösa systemet med avseende på variablerna x_1 och x_2 och får då lösningen

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

med x_3 och x_4 som fria variabler. Detta innebär att den linjära avbildningen

$$T\colon \mathbf{R}^2 \to U, \qquad T(x_3, x_4) = (-2x_3 + 3x_4, -3x_3 + 4x_4, x_3, x_4)$$

är bijektiv, dvs. en isomorfi. Den inversa avbildningen $\xi = T^{-1}\colon U \to \mathbf{R}^2$, definierad av att $\xi(x) = (x_3, x_4)$, är följaktligen en koordinatavbildning på U.

Om vi istället löser systemet med avseende på variablerna x_3 och x_4 får vi lösningen

$$\begin{cases} x_3 = 4x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 3x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Avbildningen

$$\xi'\colon U \to \mathbf{R}^2, \qquad \xi'(x) = (x_1, x_2)$$

är därför också en koordinatavbildning på U. $\square$

Exempel 3.9.4 En koordinatavbildning på det *reella* $2n$-dimensionella vektorrummet $\mathbf{C}^n$ definieras av avbildningen

$$\xi\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^{2n}, \quad \xi(x_1 + \mathrm{i}y_1, x_2 + \mathrm{i}y_2, \ldots, x_n + \mathrm{i}y_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n).$$

$\square$

Det kanske vanligaste sättet att konstruera en koordinatavbildning är att utgå från en bas.

Påstående 3.9.2 *Låt* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *vara en bas för vektorrummet* V*. Då finns det en unik koordinatavbildning* $\xi \colon V \to \mathbf{K}^n$ *med egenskapen att* $\xi(v_i) = \mathbf{e}_i$ *för* $i = 1, 2, \ldots, n$*, och* ξ *definieras av att*

$$\xi(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Bevis. Avbildningen ξ är invers till isomorfin $T \colon \mathbf{K}^n \to V$, som definieras av att $Tx = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i$. □

Per definition är tipeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i påstående 3.9.2 koordinaterna för vektorn $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ med avseende på koordinatavbildningen ξ; vi säger också att den är koordinaterna med avseende på *basen* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

En vektors koordinater beror naturligtvis av såväl vektorn som koordinatavbildningen. Om man byter från en koordinatavbildning till en annan, transformeras koordinaterna enligt följande sats.

Sats 3.9.3 *Om* $\xi \colon V \to \mathbf{K}^n$ *och* $\xi' \colon V \to \mathbf{K}^n$ *är två koordinatavbildningar på vektorrummet* V*, så finns det en inverterbar* $n \times n$*-matris* A *så att*

$$\xi'(v) = A\xi(v) \qquad \text{för alla vektorer } v \in V.$$

Omvänt, om ξ *är en koordinatavbildning på* V *och matrisen* A *är inverterbar, så definierar ekvationen ovan en koordinatavbildning* ξ' *på* V*.*

För att ekvationen i satsen ovan skall vara meningsfull måste vi förstås uppfatta $\xi'(v)$ och $\xi(v)$ som kolonnmatriser. Matrisen A kallas *transformationsmatrisen* vid övergång från koordinatavbildningen ξ till koordinatavbildningen ξ'.

Schematiskt illustreras sats 3.9.3 av följande diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\xi'"] & \\
\mathbf{K}^n \arrow[rr, "A"'] & & \mathbf{K}^n
\end{tikzcd}$$

Bevis. Antag att $\xi \colon V \to \mathbf{K}^n$ är en koordinatavbildning och att $\xi' \colon V \to \mathbf{K}^n$ är en godtycklig linjär avbildning, och låt A vara matrisen för den sammansatta avbildningen $T = \xi'\xi^{-1} \colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$. Sambandet mellan en linjär avbildning och dess matris ger att $\xi'(v) = T\xi(v) = A\xi(v)$. Avbildningen ξ' är en koordinatavbildning, dvs. en isomorfi, om och endast om T är en isomorfi, och enligt sats 3.4.5 gäller detta om och endast om matrisen A är inverterbar. □

Exempel 3.9.5 Mellan de båda koordinatavbildningarna ξ och ξ' i exempel 3.9.3 råder sambandet

$$\xi'(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + 3x_4 \\ -3x_3 - 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \xi(x).$$

□

Ett koordinatbytes transformationsmatris är bestämd av av sambandet mellan motsvarande baser på följande sätt.

Påstående 3.9.4 *Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ och $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ vara två baser i ett vektorrum, låt ξ och ξ' beteckna motsvarande koordinatavbildningar, och antag att*

$$v_j = a_{1j}v'_1 + a_{2j}v'_2 + \cdots + a_{nj}v'_n$$

för $1 \le j \le n$. Transformationsmatrisen vid övergång från ξ till ξ' är då lika med matrisen $A = [a_{ij}]$, vars j:te kolonn A_{*j} alltså består av basvektorn v_j:s koordinater med avseende på basen $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$.

Bevis. Påståendet följer av att $\xi'(v_j) = A_{*j} = A\mathbf{e}_j = A\xi(v_j)$ för alla basvektorer v_j. □

Exempel 3.9.6 Antag att v_1, v_2, v_3 och v'_1, v'_2, v'_3 är två baser för det tredimensionella rummet V, samt att

$$\begin{cases} v_1 = 3v'_1 - 2v'_2 + 4v'_3 \\ v_2 = 5v'_1 + 7v'_2 - 3v'_3 \\ v_3 = 6v'_1 + 4v'_2 - 5v'_3. \end{cases}$$

Transformationsmatrisen vid övergång från koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i basen v_1, v_2, v_3 till koordinaterna (x'_1, x'_2, x'_3) i basen v'_1, v'_2, v'_3 är då

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

och själva koordinatbytet ges av

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ x'_2 = -2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ x'_3 = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

□

I analytisk tredimensionell geometri svarar tvådimensionella delrum mot plan genom origo. Om vi väljer basvektorer e'_1, e'_2, e'_3 så att de två första basvektorerna ligger i planet, så får planet med avseende på motsvarande koordinater x_1', x_2', x_3' ekvationen $x_3' = 0$. Ett endimensionellt delrum är en linje genom origo, och om vi väljer ett koordinatsystem med basvektorn e_1' utefter linjen, får linjen ekvationen $x_2' = x_3' = 0$.

På motsvarande sätt kan vi nu karakterisera delrummen till ett godtyckligt ändligdimensionellt vektorrum:

Sats 3.9.5 *Om W är ett m-dimensionellt delrum av ett n-dimensionellt vektorrum V, så finns det en koordinatavbildning ξ på V så att*

$$W = \{v \in V \mid \xi_{m+1}(v) = \cdots = \xi_n(v) = 0\}.$$

Bevis. Låt $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vara en bas i W och utvidga denna bas med vektorer v_{m+1}, v_{m+2}, ..., v_n till en bas för hela V. Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara motsvarande koordinatfunktioner. Då gäller att vektorn $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ tillhör W om och endast om $\xi_k(v) = x_k = 0$ för $k = m+1$, $m+2$,..., n. □

Övningar

3.49 Definiera $\xi\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbf{R}^3$ och $\eta\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbf{R}^3$ genom att sätta

$$\xi(p) = \big(p(-1), p(0), p(1)\big) \text{ och } \eta(p) = \big(p(0), p'(0), p''(0)\big).$$

a) Visa att ξ och η är koordinatavbildningar.

b) Bestäm ξ^{-1} och η^{-1}.

c) Bestäm transformationsmatrisen A vid övergång från ξ till η, samt transformationsmatrisen B vid övergång från η till ξ.

3.50 Ange en matris vars nollrum spänns upp av vektorerna

$$(2,-3,1,1,-1),\ (1,0,-2,1,1),\ (2,-2,1,0,-1) \text{ och } (-8,3,1,1,1)$$

i $\mathbf{R}^5$.

3.10 Matrisen till en linjär avbildning

Varje linjär avbildning från $\mathbf{K}^n$ till $\mathbf{K}^m$ ges av en matris. Detta kan vi utnyttja för att med hjälp av koordinatbegreppet associera matriser till linjära avbildningar mellan godtyckliga ändligtdimensionella rum V och W.

Sätt $n = \dim V$ och $m = \dim W$, och fixera två koordinatavbildningar $\xi\colon V \to \mathbf{K}^n$ och $\eta\colon W \to \mathbf{K}^m$. Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning; då är den sammansatta avbildningen $\widehat{T} = \eta T \xi^{-1}$ en linjär avbildning från

$\mathbf{K}^n$ till $\mathbf{K}^m$, och det finns enligt påstående 3.4.2 en $m \times n$-matris $\widetilde{T}$ så att $\widehat{T}x = \widetilde{T}x$. Detta innebär att

$$\eta(Tv) = \eta T\xi^{-1}\xi(v) = \widehat{T}\xi(v) = \widetilde{T}\xi(v).$$

Schematiskt kan vi uttrycka detta med hjälp av följande diagram:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \xi\big\downarrow & & \big\downarrow\eta \\ \mathbf{K}^n & \xrightarrow[\widetilde{T}]{} & \mathbf{K}^m \end{array}$$

Definition 3.10.1 Matrisen $\widetilde{T}$ till den linjära avbildningen $\eta T\xi^{-1}$ kallas för *matrisen* till den linjära avbildningen T med avseende på koordinatavbildningarna ξ och η (eller med avseende på motsvarande baser i rummen) och betecknas $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$. Om koordinatavbildningarna framgår av sammanhanget skriver vi enbart $\operatorname{mat} T$.

Observera ordningen η, ξ i matrisbeteckningen $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$.

Om vi har samma definitions- och målrum, dvs. om $W = V$, väljer man ofta, men inte alltid, samma koordinatavbildning i de båda rummen, dvs. $\eta = \xi$.

Sats 3.10.2 *Låt V och W vara två vektorrum med koordinatavbildningar ξ resp. η. För varje vektor $v \in V$ är*

$$\eta(Tv) = (\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T)\xi(v).$$

Avbildningen $\operatorname{mat}_{\eta,\xi}\colon \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n}$ *är en isomorfi.*

Bevis. Det första påståendet följer av definitionen av avbildningens matris. Avbildningen $T \mapsto \widehat{T} = \eta T\xi^{-1}$ är en isomorfi mellan det linjära rummet $\mathcal{L}(V,W)$ av alla linjära avbildningar från V till W och det linjära rummet $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n,\mathbf{K}^m)$ av alla linjära avbildningar från $\mathbf{K}^n$ till $\mathbf{K}^m$. Matristilldelningen $\widehat{T} \mapsto \widetilde{T}$ är också en isomorfi (sats 3.4.3), så det följer att den sammansatta avbildningen $T \mapsto \widetilde{T} = \operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$ är en isomorfi. □

Satsen ovan innebär att den linjära avbildningen är entydigt bestämd av sin matris och att

$$\operatorname{mat}(\alpha S + \beta T) = \alpha \operatorname{mat} S + \beta \operatorname{mat} T.$$

Exempel 3.10.1 Låt $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ vara den linjära avbildningen

$$(Tp)(t) = (t+2)\,p''(t-1).$$

Vi skall bestämma avbildningens matris med avseende på de naturliga koordinatavbildningarna

$$\begin{aligned}\xi(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) &= (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad \text{och}\\ \eta(a_0 + a_1t + a_2t^2) &= (a_0, a_1, a_2)\end{aligned}$$

på $\mathcal{P}_3$ resp. $\mathcal{P}_2$.

Sätt $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$; då är $p''(t) = 2a_2 + 6a_3t$, $p''(t-1) = 2a_2 - 6a_3 + 6a_3t$ och

$$(Tp)(t) = (t+2)p''(t-1) = 4a_2 - 12a_3 + (2a_2 + 6a_3)t + 6a_3t^2.$$

För avbildningen $\widehat{T} = \eta T \xi^{-1}$ gäller därför

$$\begin{aligned}\widehat{T}(a_0, a_1, a_2, a_3) = \widehat{T}\xi(p) = \eta(Tp) &= \eta(4a_2 - 12a_3 + (2a_2 + 6a_3)t + 6a_3t^2)\\ &= (4a_2 - 12a_3, 2a_2 + 6a_3, 6a_3).\end{aligned}$$

Avbildningens matris är således

$$\operatorname{mat} T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -12\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

För att bestämma en linjär avbildnings matris räcker det att veta hur avbildningen opererar på basvektorerna. Nästa sats beskriver sambandet.

Sats 3.10.3 *Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ och $w_1, w_2, \dots, w_m$ vara baser för vektorrummen V och W, och låt ξ resp. η beteckna motsvarande koordinatavbildningar. Den j:te kolonnen i matrisen $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$ består då av de m koordinaterna för vektorn Tv_j med avseende på basen $w_1, w_2, \dots, w_m$.*

Bevis. Matrisen $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$ är per definition lika med matrisen för avbildningen $\widehat{T} = \eta T \xi^{-1}$, och den j:te kolonnen i denna matris är enligt definition 3.4.1 lika med vektorn $\widehat{T}\mathbf{e}_j$ i $\mathbf{K}^m$ (uppfattad som kolonnvektor). Här är $\mathbf{e}_j$ den j:te enhetsvektorn i $\mathbf{K}^n$. Men $\xi(v_j) = \mathbf{e}_j$, så det följer att $\widehat{T}\mathbf{e}_j = \eta T \xi^{-1}\mathbf{e}_j = \eta(Tv_j)$. □

Exempel 3.10.2 Låt $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara den linjära avbildning som definieras av att $(Tp)(t) = (t-2)p'(t)$. För att bestämma avbildningens matris med avseende på den naturliga basen 1, t, t^2 (och motsvarande koordinatavbildning), beräknar vi

$$T1 = 0, \quad Tt = (t-2)\cdot 1 = -2 + t \quad \text{och} \quad Tt^2 = (t-2)\cdot 2t = -4t + 2t^2.$$

Koordinaterna för polynomen $T1$, Tt och Tt^2 är således $(0,0,0)$, $(-2,1,0)$ resp. $(0,-4,2)$, och avbildningens matris är därför

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

För sammansättningar och inverser gäller följande generaliseringar till satserna 3.4.4 och 3.4.5.

Sats 3.10.4 *Låt U, V och W vara tre ändligdimensionella vektorrum med respektive koordinatavbildningar ξ, η och ζ, och antag att $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ är två linjära avbildningar. Den sammansatta linjära avbildningen $TS\colon U \to W$ har då med avseende på koordinatavbildningarna ξ och ζ matrisen*

$$\operatorname{mat}_{\zeta,\xi} TS = \operatorname{mat}_{\zeta,\eta} T \cdot \operatorname{mat}_{\eta,\xi} S.$$

Bevis. I diagramform har vi

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\xi"'] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\eta"'] & W \arrow[d, "\zeta"] \\ \mathbf{K}^p \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\eta,\xi} S"'] & \mathbf{K}^n \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\zeta,\eta} T"'] & \mathbf{K}^m \end{tikzcd}$$

Matrisen $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} S$ är matris till avbildningen $\eta S \xi^{-1}$, och $\operatorname{mat}_{\zeta,\eta} T$ är matris till avbildningen $\zeta T \eta^{-1}$, så det följer av sats 3.4.4 att produkten $\operatorname{mat}_{\zeta,\eta} T \cdot \operatorname{mat}_{\eta,\xi} S$ är matris till den sammansatta avbildningen

$$\zeta T \eta^{-1} \eta S \xi^{-1} = \zeta T S \xi^{-1},$$

dvs. till avbildningen TS med avseende på de givna koordinatavbildningarna.

□

Sats 3.10.5 *Låt ξ och η vara koordinatavbildningar på vektorrummen V resp. W. En linjär avbildning $T\colon V \to W$ är bijektiv om och endast om avbildningens matris $\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T$ är inverterbar, och i så fall är*

$$\operatorname{mat}_{\xi,\eta} T^{-1} = (\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T)^{-1}.$$

Bevis. Satsen följer av sats 3.4.5. □

Transformationsmatrisen till ett koordinatbyte kan uppfattas som en matris för den identiska avbildningen.

Påstående 3.10.6 *Låt ξ och ξ' vara två koordinatavbildningar på ett vektorrum V. Transformationsmatrisen vid byte från ξ till ξ' är lika med matrisen $\operatorname{mat}_{\xi',\xi} I$ för den identiska avbildningen $I\colon V \to V$.*

Bevis. Situationen beskrivs av diagrammet

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{I} & V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi' \\ \mathbf{K}^n & \xrightarrow[\widetilde{I}]{} & \mathbf{K}^n \end{array}$$

där $\widetilde{I} = \operatorname{mat}_{\xi',\xi} I$. Enligt sats 3.10.2 är

$$\xi'(v) = \xi'(Iv) = \widetilde{I}(\xi(v)),$$

vilket innebär att $\widetilde{I}$ är koordinatbytets transformationsmatris. □

En linjär avbildnings matris beror, förutom av avbildningen, på valet av koordinatavbildningar. Nästa sats visar hur matrisen transformeras vid koordinatbyte.

Sats 3.10.7 *Antag att ξ och ξ' är två koordinatavbildningar på vektorrummet V och att η och η' är två koordinatavbildningar på vektorrummet W, och låt A vara transformationsmatrisen vid byte från ξ till ξ' och B vara transformationsmatrisen vid byte från η till η'. Låt slutligen $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Då råder följande samband mellan avbildningens matriser med avseende på å ena sidan ξ, η och å andra sidan ξ', η':*

$$\operatorname{mat}_{\eta',\xi'} T = B \cdot (\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T) \cdot A^{-1}.$$

Bevis. Enligt påstående 3.10.6 är $B = \operatorname{mat}_{\eta',\eta} I_W$ och $A = \operatorname{mat}_{\xi',\xi} I_V$, där I_V och I_W betecknar de identiska avbildningarna på rummen V och W, och enligt sats 3.10.5 är $A^{-1} = \operatorname{mat}_{\xi,\xi'} I_V$. Eftersom $T = I_W T I_V$, följer det därför av sats 3.10.4 att

$$\begin{aligned} \operatorname{mat}_{\eta',\xi'} T &= \operatorname{mat}_{\eta',\xi'}(I_W T I_V) = (\operatorname{mat}_{\eta',\eta} I_W) \cdot (\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T) \cdot (\operatorname{mat}_{\xi,\xi'} I_V) \\ &= B \cdot (\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T) \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

Följande diagram beskriver hela beviset schematiskt

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "I_V"] \arrow[d, "\xi'"'] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\xi"'] & W \arrow[r, "I_W"] \arrow[d, "\eta"] & W \arrow[d, "\eta'"] \\ \mathbf{K}^n \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\xi,\xi'} I_V"'] & \mathbf{K}^n \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\eta,\xi} T"'] & \mathbf{K}^m \arrow[r, "\operatorname{mat}_{\eta',\eta} I_W"'] & \mathbf{K}^m \end{tikzcd}$$

□

För linjära avbildningar som startar och slutar i samma rum gäller speciellt:

Sats 3.10.8 *Låt ξ och ξ' vara två koordinatavbildningar på vektorrummet V, och antag att A är transformationsmatrisen vid övergång från ξ till ξ'. Låt $T\colon V \to V$ vara en linjär avbildning. Avbildningens matriser, då samma koordinatavbildning används i definitions- och målrummen, uppfyller sambandet*

$$\operatorname{mat}_{\xi',\xi'} T = A \cdot (\operatorname{mat}_{\xi,\xi} T) \cdot A^{-1}.$$

Övningar

3.51 Bestäm matrisen med avseende på koordinatavbildningen

$$\xi(p) = (p(-1), p(0), p(1))$$

på $\mathcal{P}_2$ till följande linjära operatorer på $\mathcal{P}_2$:
a) deriveringsoperatorn D;
b) operatorn $Tp(t) = p(t+1)$.

3.52 Visa att rangen för en linjär avbildning är lika med rangen för avbildningens matris (med avseende på godtyckliga koordinatavbildningar).

3.11 Kvotrum

Låt W vara ett linjärt delrum till vektorrummet V. Vi kommer att använda beteckningen $[v]$ för den delmängd av V som fås genom att translatera delrummet W med vektorn v, dvs.

$$[v] = v + W = \{v + w \mid w \in W\}.$$

Speciellt är alltså $[0]$ lika med delrummet W.

Vi börjar med att bestämma när två translat $[u]$ och $[v]$ är lika.

Påstående 3.11.1 $[u] = [v]$ *om och endast om* $u - v \in W$.

Bevis. Antag att $[u] = [v]$. Av $u \in [u]$ följer då att $u \in [v]$, vilket betyder att $u = v + w$ för något element $w \in W$, och detta innebär att $u - v \in W$.

Antag omvänt att $u - v$ tillhör W. Identiteten $(x-v)-(x-u) = u-v \in W$, kombinerad med att W är ett linjärt delrum, ger oss då

$$\begin{aligned} x - u \in W &\Leftrightarrow x - v \in W \\ x \in [u] &\Leftrightarrow x \in [v] \\ [u] &= [v]. \end{aligned}$$

□

Definition 3.11.2 Mängden $\{[v] \mid v \in V\}$ av alla translat av W kallas för *kvotrummet* V/W.

EXEMPEL 3.11.1 Låt V vara det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet, och låt delrummet W vara en linje ℓ genom origo. Då kan kvotrummet V/W identifieras med mängden av alla linjer som är parallella med ℓ. □

Kvotrummet kan på ett naturligt sätt göras till ett linjärt rum. För den skull behövs följande lemma.

Lemma 3.11.3 (a) *Om* $[u_1] = [u_2]$ *och* $[v_1] = [v_2]$*, så är* $[u_1+v_1] = [u_2+v_2]$.
(b) *Om* $[u] = [v]$*, så är* $[\alpha u] = [\alpha v]$ *för alla skalärer* α.

Bevis. (a) Om $[u_1] = [u_2]$ och $[v_1] = [v_2]$, så gäller på grund av påstående 3.11.1 att $u_1 - u_2 \in W$ och $v_1 - v_2 \in W$. Eftersom $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)$, följer det därför att vektorn $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)$ också ligger i W. Enligt påstående 3.11.1 är därför $[u_1 + v_1] = [u_2 + v_2]$.

Påstående (b) följer analogt. □

Sats 3.11.4 *Kvotrummet* V/W *är ett linjärt rum under följande definitioner av addition och multiplikation med skalär:*

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [u + v] \\ \alpha[v] &= [\alpha v]. \end{aligned}$$

Bevis. Lemma 3.11.3 innebär att elementet $[u+v]$ enbart beror av elementen $[u]$ och $[v]$ i kvotrummet V/W och inte av de specifika vektorerna u och v. Motsvarande gäller för $[\alpha v]$. Definitionerna i satsen är därför meningsfulla, och vi lämnar som enkel övning åt läsaren att kontrollera att vektorrumsaxiomen är uppfyllda med $[0]$ som nollelement. □

Vi har en naturlig avbildning $\pi\colon V \to V/W$, som definieras av att

$$\pi(v) = [v].$$

Denna avbildning, som förstås är linjär och surjektiv, kallas den *kanoniska projektionen* av V på V/W.

Observera att $\mathcal{N}(\pi)$, den kanoniska projektionens nollrum, är lika med W. Dimensionssatsen (sats 3.8.1) tillämpad på π ger oss därför omedelbart följande resultat.

Sats 3.11.5 *För varje linjärt delrum W av ett vektorrum V är*

$$\dim W + \dim V/W = \dim V.$$

Sats 3.11.6 *Antag att $T\colon V_1 \to V_2$ är en linjär avbildning, att W_1 och W_2 är linjära delrum till V_1 respektive V_2, och att $T(W_1) \subseteq W_2$. Då finns det en unik linjär avbildning*

$$\widetilde{T}\colon V_1/W_1 \to V_2/W_2$$

så att

$$\widetilde{T}\pi_1 = \pi_2 T,$$

där $\pi_1\colon V_1 \to V_1/W_2$ och $\pi_2\colon V_2 \to V_2/W_2$ är de kanoniska projektionerna.

Avbildningen $\widetilde{T}$ är injektiv om och endast om $T^{-1}(W_2) = W_1$.

Sambandet mellan avbildningarna T och $\widetilde{T}$ beskrivs schematiskt av det kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_1"'] & V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1/W_1 \arrow[r, "\widetilde{T}"'] & V_2/W_2 \end{tikzcd}$$

Bevis. Om det finns en sådan avbildning, så är den unik eftersom kravet $\widetilde{T}\pi_1 = \pi_2 T$ innebär att $\widetilde{T}([v]_1) = [Tv]_2$ för alla $v \in V_1$, där förstås $[v]_1$ betecknar translat i kvotrummet V_1/W_1 och $[Tv]_2$ betecknar translat i kvotrummet V_2/W_2.

Vi *definierar* därför $\widetilde{T}$ genom att sätta $\widetilde{T}([v]_1) = [Tv]_2$. Vi måste då först visa att denna definition är konsistent. Antag därför att $[u]_1 = [v]_1$; då ligger vektorn $u - v$ i W_1, så det följer att $Tu - Tv$ ligger i W_2, dvs. $[Tu]_2 = [Tv]_2$. Definitionen av $\widetilde{T}([v]_1)$ beror med andra ord enbart av mängden $[v]_1$ och inte av det speciella valet av representant v. Att avbildningen är linjär är självklart.

Avbildningen $\widetilde{T}$ är injektiv om och endast om $\widetilde{T}([v]_1) = 0 \Rightarrow [v]_1 = 0$, vilket är ekvivalent med $Tv \in W_2 \Rightarrow v \in W_1$, dvs. med att $T^{-1}(W_2) \subseteq W_1$.

Eftersom den omvända inklusionen $W_1 \subseteq T^{-1}(W_2)$ ingår som del av satsens förutsättningar, är således $\widetilde{T}$ injektiv om och endast om $T^{-1}(W_2) = W_1$. □

Vi skall nu formulera två viktiga specialfall av satsen ovan.

Korollarium 3.11.7 *Till varje linjär avbildning $T\colon V_1 \to V_2$ hör en unik injektiv linjär avbildning $\widehat{T}\colon V_1/\mathcal{N}(T) \to V_2$ med egenskapen att $T = \widehat{T}\pi$, där π är den kanoniska projektionen $V_1 \to V_1/\mathcal{N}(T)$.*

Schematiskt ges sambandet mellan T och $\widehat{T}$ av diagrammet

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & V_2 \\ V_1/\mathcal{N}(T) \arrow[ur, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Bevis. Vi använder beteckningarna i sats 3.11.6 och väljer $W_1 = \mathcal{N}(T)$ och $W_2 = \{0\}$. Projektionen π_1 är då identisk med korollariets π, medan projektionen π_2 är den triviala avbildning som till varje vektor $v \in V_2$ associerar motsvarande enpunktsmängd $\{v\}$ i kvotrummet $V_2/\{0\}$. Avbildningen π_2 är uppenbarligen en isomorfi, så vi kan därför definiera avbildningen $\widehat{T}$ genom att sätta $\widehat{T} = \pi_2^{-1}\widetilde{T}$. Detta betyder helt enkelt att $\widehat{T}(\pi(v)) = Tv$ för alla $v \in V_1$, en definition som vi naturligtvis kunde ha gjort direkt utan att referera till satsen ovan. Detta visar den sökta likheten $\widehat{T}\pi = T$.

Eftersom $T^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N}(T)$ per definition, är vidare avbildningen $\widetilde{T}$, och därmed också avbildningen $\widehat{T}$, injektiv. □

För att bekvämt kunna formulera nästa korollarium behöver vi följande definition.

Definition 3.11.8 Låt T vara en linjär operator på V, dvs. en linjär avbildning från V till V. Ett linjärt delrum W av V kallas ett *invariant delrum* till T om $T(W) \subseteq W$, dvs. om $Tw \in W$ för alla vektorer $w \in W$.

Genom att i sats 3.11.6 välja $V_1 = V_2 = V$ och $W_1 = W_2 = W$, får vi nu följande korollarium.

Korollarium 3.11.9 *Låt W vara ett invariant delrum till den linjära operatorn T på V. Då finns det en unik operator $T_{V/W}$ på kvotrummet V/W så att $T_{V/W}\pi = \pi T$, där $\pi\colon V \to V/W$ är den kanoniska projektionen. Operatorn $T_{V/W}$ är injektiv om och endast om $T^{-1}(W) = W$.*

Operatorn $T_{V/W}$ kallas den av T *inducerade operatorn* på kvotrummet V/W. Den inducerade operatorn definieras med andra ord av att

$$T_{V/W}[v] = [Tv]$$

för alla element $[v] = v + W$ i kvotrummet.

Övningar

3.53 Visa att om $V = W \oplus U$, så är kvotrummet V/W isomorft med U.

3.54 Sätt $V = \mathcal{C}[0,1]$ och $W = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0\}$. Visa att kvotrummet V/W är isomorft med $\mathbf{R}^3$.

3.55 Sätt $V = \mathcal{C}[0,1]$ och $W = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(t) = 0 \text{ för } 0 \le t \le \frac{1}{2}\}$. Visa att kvotrummet V/W är isomorft med $\mathcal{C}[0, \frac{1}{2}]$.

3.56 Låt T vara en operator på V och betrakta delrummen

$$\{0\} = \mathcal{N}(T^0) \subseteq \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^2) \subseteq \mathcal{N}(T^3) \subseteq \dots$$

av V. Antag att alla dessa nollrum är ändligdimensionella samt sätt

$$d_k = \dim \mathcal{N}(T^k).$$

a) Visa olikheterna

$$\begin{aligned} 0 \le d_{n+2} - d_{n+1} \le d_{n+1} - d_n, &\quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots \\ d_{m+n} \le d_m + d_n, &\quad m,\, n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots \end{aligned}$$

b) Antag att $d_m > d_{m-1}$. Visa att $d_1 + m - 1 \le d_m \le m\, d_1$, och att $d_m = m$ om och endast om $d_1 = 1$.

3.12 Komplexifiering

Teorin för komplexa vektorrum är i många avseenden enklare och mer komplett än teorin för reella vektorrum − detta hänger samman med algebrans fundamentalsats, som ju säger att varje komplext polynom av grad ≥ 1 har minst ett komplext nollställe, och vi kommer att se åtskilliga exempel på hur detta används i kapitlen 8 och 9. Man har därför stor nytta av det faktum att varje reellt vektorrum kan inbäddas i ett komplext vektorrum på liknande sätt som de reella talen kan inbäddas i de komplexa talen.

Definition 3.12.1 Låt V vara ett reellt vektorrum. Den s. k. *komplexifieringen* $V_{\mathbf{C}}$ av V definieras på följande sätt:

Elementen i $V_{\mathbf{C}}$ består av alla ordnade par $v = (v', v'')$ av element v', v'' i V. Vi kommer att skriva dessa par på formen $v = v' + \mathrm{i}v''$ och kalla v' och v'' för *real-* resp. *imaginärdelen* av v samt använda beteckningarna $v' = \operatorname{Re} v$ och $v'' = \operatorname{Im} v$.

Två vektorer $v = v' + \mathrm{i}v''$ och $w = w' + \mathrm{i}w''$ i $V_{\mathbf{C}}$ är lika om och endast om $v' = w'$ och $v'' = w''$.

Addition och multiplikation med komplexa skalärer definieras genom

$$\begin{aligned}(v' + \mathrm{i}v'') + (w' + \mathrm{i}w'') &= (v' + w') + \mathrm{i}(v'' + w'')\\ (\alpha' + \mathrm{i}\alpha'')(v' + \mathrm{i}v'') &= (\alpha'v' - \alpha''v'') + \mathrm{i}(\alpha'v'' + \alpha''v').\end{aligned}$$

Vi överlämnar åt läsaren att verifiera följande påstående.

Påstående 3.12.2 *Komplexifieringen $V_{\mathbf{C}}$ är ett vektorrum över $\mathbf{C}$.*

Exempel 3.12.1 Komplexifieringen av det reella vektorrummet $\mathbf{R}$ är det komplexa vektorrummet $\mathbf{C}$, och allmännare är komplexifieringen av $\mathbf{R}^n$ är lika med $\mathbf{C}^n$. □

Exempel 3.12.2 Komplexifiering används när man vill utvidga ett reellt begrepp till komplexa tal. En komplexvärd funktion f definierad på ett intervall I kan delas upp i två reella funktioner, realdelen f_1 och imaginärdelen f_2, så att $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$. Ett simpelt sätt att definiera kontinuitet för komplexvärda funktioner är därför att säga att f är kontinuerlig om och endast om både f_1 och f_2 är kontinuerliga. Men detta innebär förstås att mängden av alla kontinuerliga komplexvärda funktioner på I blir lika med komplexifieringen $\mathcal{C}(I)_{\mathbf{C}}$ av rummet av alla reella kontinuerliga funktioner på I. □

Om vi skriver vektorerna u i det reella vektorrummet V på formen $u+i0$, så blir vektorrummet V på ett naturligt sätt inbäddat som en *delmängd* av $V_{\mathbf{C}}$. Observera emellertid att V **inte** är ett linjärt delrum av $V_{\mathbf{C}}$ (eftersom det inte är slutet med avseende på multiplikation med komplexa skalärer).

Med *konjugatet* $\overline{v}$ av vektorn $v = v' + \mathrm{i}v''$ menas förstås vektorn $\overline{v} = v' - \mathrm{i}v''$. Real- och imaginärdelen av en vektor kan med hjälp av konjugering uttryckas som $\operatorname{Re} v = \frac{1}{2}(v+\overline{v})$ och $\operatorname{Im} v = \frac{1}{2\mathrm{i}}(v-\overline{v})$. De vanliga konjugeringsreglerna för summor och multiplikation med skalär är vidare uppfyllda, dvs. $\overline{v+w} = \overline{v} + \overline{w}$ och $\overline{\alpha v} = \overline{\alpha}\,\overline{v}$.

Följande påståenden är också triviala att verifiera och bevisen lämnas som övning.

Påstående 3.12.3 *Låt A vara en delmängd av ett reellt vektorrum V. Då gäller:*

(a) *A är linjärt oberoende som delmängd av det reella vektorrummet V om och endast om A är linjärt oberoende som delmängd av det komplexa vektorrummet $V_{\mathbf{C}}$.*

(b) *A är en bas för V om och endast om A är en bas för komplexifieringen $V_{\mathbf{C}}$.*

Påstående 3.12.4 *Om vektorrummet V är ändligdimensionellt, så är komplexifieringen $V_{\mathbf{C}}$ ändligtdimensionell och*

$$\dim V_{\mathbf{C}} = \dim V.$$

Till en linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ hör som bekant en reell $m \times n$-matris A så att $Tx = Ax$, där produkten i högerledet är matrismultiplikation. Men denna matrismultiplikation förblir naturligtvis väldefinierad om vi ersätter den reella kolonnvektorn x med en kolonnvektor $z = x + \mathrm{i}y$ med komplexa element, och genom att sätta $T_{\mathbf{C}}z = Az = Ax + \mathrm{i}\,Ay = Tx + \mathrm{i}\,Ty$ utvidgar vi vår ursprungliga avbildning till en avbildning $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$. På motsvarande sätt kan vi naturligtvis göra generellt, och detta leder till följande definition.

Definition 3.12.5 Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan två reella vektorrum. Med *komplexifieringen* $T_{\mathbf{C}}$ av T menas den linjära avbildningen $T_{\mathbf{C}}\colon V_{\mathbf{C}} \to W_{\mathbf{C}}$, som definieras av att

$$T_{\mathbf{C}}(v' + \mathrm{i}v'') = Tv' + \mathrm{i}\,Tv''.$$

Det är förstås trivialt att verifiera att $T_{\mathbf{C}}$ är en linjär avbildning. Observera också att $\overline{T_{\mathbf{C}}v} = T_{\mathbf{C}}\overline{v}$.

Om rummen V och W är ändligdimensionella och vi väljer baser i V och W, så har förstås T och $T_{\mathbf{C}}$ samma matris med avseende på dessa.

Exempel 3.12.3 Vi kan definiera integralen av en komplexvärd kontinuerlig funktion $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$ genom komplexifiering. Integralen $\int_a^b g(t)\,dt$ av en reellvärd komplex funktion är nämligen en linjär avbildning $\mathcal{C}[a,b] \to \mathbf{R}$, och genom att komplexifiera denna avbildning får vi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b f_2(t)\,dt. \qquad \square$$

Komplexifiering kommuterar med summering, sammansättning och inversbildning av linjära avbildningar:

Påstående 3.12.6 *Låt U, V och W vara reella vektorrum.*

(a) *Om S och T är linjära avbildningar från V till W och α, $\beta \in \mathbf{R}$, så är $(\alpha S + \beta T)_{\mathbf{C}} = \alpha S_{\mathbf{C}} + \beta T_{\mathbf{C}}$.*

(b) *Om $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ är linjära, så är $(TS)_{\mathbf{C}} = T_{\mathbf{C}}S_{\mathbf{C}}$.*

(c) *Om $T\colon V \to W$ har en invers, så har $T_{\mathbf{C}}$ en invers och $(T^{-1})_{\mathbf{C}} = (T_{\mathbf{C}})^{-1}$.*

Återigen lämnar vi de enkla bevisen som övning.

Kapitel 4

Linjära former

4.1 Dualrummet

Definition 4.1.1 En linjär avbildning från ett vektorrum V till skalärkroppen $\mathbf{K}$ kallas en *linjär form* eller en *linjär funktional* på V, och vektorrummet $\mathcal{L}(V, \mathbf{K})$ av alla linjära former på V kallas (den algebraiska) *dualen* eller *dualrummet* till V och betecknas V'.

Om $\dim V = n < \infty$, så kan de linjära formerna på V enligt sats 3.10.2 identifieras med radmatriser med n element. Det följer att $\dim V' = \dim V$. I det ändligdimensionella fallet är således dualrummet V' isomorft med V, och vi har en konkret representation av elementen i dualrummet. Vi kan därför koncentrera våra ansträngningar på att finna matchande baser i V och V'.

I det oändligdimensionella fallet är det algebraiska dualrummet V' alltför stort för att vara praktiskt användbart. Man kan visa att $\dim V' > \dim V$, och i allmänhet har man ingen bra representation för dualelementen. Vi kommer därför huvudsakligen att studera dualrum till ändligdimensionella vektorrum, men vi börjar med en karakterisering av linjärt oberoende delmängder som fungerar generellt, och för detta behövs följande lemma.

Lemma 4.1.2 *Låt W vara ett linjärt delrum till vektorrumet V.*

(i) *Antag att $v_0 \in V \setminus W$. Då finns det en linjär form $\phi \in V'$ sådan att $\phi(v_0) \neq 0$ och $\phi(w) = 0$ för alla $w \in W$.*

(ii) *Om v är en vektor i V och $\phi(v) = 0$ för alla $\phi \in V'$, så är $v = 0$.*

Bevis. (i) Välj en bas B för V genom att starta med en bas $\{v_i \mid i \in I\}$ för delrummet W och utvidga denna, först med vektorn v_0 och sedan med ytterligare vektorer $\{v_i \mid i \in J\}$ till en bas för hela rummet. Motsvarande koordinatfunktioner ξ_i är linjära former på V, och den mot basvektorn v_0

svarande koordinatfunktionen ξ_0 uppfyller villkoren i (i) eftersom $\xi_0(v_0) = 1$ och $\xi_0(v_i) = 0$ för alla andra basvektorer i B. Speciellt är därför $\xi_0(w) = 0$ för alla vektorer $w \in W$.

(ii) För varje nollskild vektor v finns det på grund av (i), tillämpat på fallet $W = \{0\}$, en linjär form ϕ med $\phi(v) \neq 0$. □

Sats 4.1.3 *Låt $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vara linjära former på ett vektorrum V. Då är följande två villkor ekvivalenta:*

(α) *$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ är en linjärt oberoende delmängd av dualrummet V'.*

(β) *Det finns vektorer $e_1, e_2, \dots, e_n$ i V så att $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$, där $\delta_{ij} = 0$ om $i \neq j$ och $\delta_{ij} = 1$ om $i = j$.*

Mängden $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ är i så fall en linjärt oberoende delmängd av V.

Bevis. Betrakta det linjära delrummet

$$W = \{(\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v)) \mid v \in V\}$$

av $\mathbf{K}^n$. Uppenbarligen är $W = \mathbf{K}^n$ om och endast om W innehåller alla standardbasvektorerna i $\mathbf{K}^n$, dvs. om och endast om villkoret (β) gäller.

Men på grund av (i) i föregående lemma är $W = \mathbf{K}^n$ om och endast om nollformen är den enda linjära form på $\mathbf{K}^n$ som är lika med noll på W. Låt därför

$$\eta(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

vara en godtycklig linjär form på $\mathbf{K}^n$; att dess restriktion till W är lika med noll betyder att

$$c_1\phi_1(v) + c_2\phi_2(v) + \cdots + c_n\phi_n(v) = 0$$

för alla $v \in V$, dvs. att $c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0$, och att η är lika med nollformen på $\mathbf{K}^n$ är detsamma som att $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Villkoret $W = \mathbf{K}^n$ är således enligt lemmat ekvivalent med implikationen

$$c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0 \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

dvs. med att $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ är linjärt oberoende. Därmed har vi visat att villkoren (α) och (β) är ekvivalenta.

Återstår att visa att vektorerna $e_1, e_2, \dots, e_n$ i (β) är linjärt oberoende. Antag därför att $c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = 0$ och applicera den linjära formen ϕ_i på detta uttryck. Det följer att

$$0 = \phi_i(\sum_{j=1}^n c_je_j) = \sum_{j=1}^n c_j\phi_i(e_j) = \sum_{j=1}^n c_j\delta_{ij} = c_i,$$

vilket visar att vektorerna är linjärt oberoende. □

Följande korollarium till sats 4.1.3 är användbart för att avgöra om en linjär form tillhör spannet till ett antal givna linjära former.

Korollarium 4.1.4 *Antag att η och $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ är linjära former ett vektorrum V. Då är följande två villkor ekvivalenta:*

(α) $\quad \eta \in \operatorname{spn}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$

(β) $\quad \phi_1(v) = \phi_2(v) = \cdots = \phi_n(v) = 0 \implies \eta(v) = 0.$

Bevis. Implikationen $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ är trivial.

För att visa den omvända implikationen $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ antar vi att (β) gäller, och börjar med att välja ut en maximal linjärt oberoende delmängd av mängden $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$; efter eventuell omnumrering kan vi anta att formerna ϕ_1, ϕ_2, …, ϕ_m bildar en sådan maximal oberoende delmängd. Formerna $\phi_{m+1}, \dots, \phi_n$ tillhör då $\operatorname{spn}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$, så det följer av den triviala implikationen $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ att

$$\phi_1(v) = \phi_2(v) = \cdots = \phi_m(v) = 0 \implies \phi_{m+1}(v) = \cdots = \phi_n(v) = 0.$$

Genom att kombinera detta med antagandet (β) erhåller vi implikationen

$$\phi_1(v) = \phi_2(v) = \cdots = \phi_m(v) = 0 \implies \eta(v) = 0.$$

Det kan därför inte finnas någon vektor $e_{m+1} \in V$ så att $\phi_i(e_{m+1}) = 0$ för $i = 1, 2, \dots, m$, och $\eta(e_{m+1}) = 1$. De $m+1$ stycken linjära formerna $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, η är därför på grund av sats 4.1.3 linjärt beroende. Det följer att formen η är beroende av formerna $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, dvs. $\eta \in \operatorname{spn}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$. Eftersom nämnda spann är en delmängd till spannet $\operatorname{spn}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ gäller (α), och därmed är korollariet bevisat. □

Exempel 4.1.1 Låt f och $g_1, g_2, \dots, g_m$ vara reellvärda funktioner av n variabler, och antag att de är definierade och kontinuerligt deriverbara på någon öppen delmängd Ω av $\mathbf{R}^n$. I flerdimensionell analys studeras problemet att maximera funktionen f under bivillkoren $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0$. Ett nödvändigt villkor för maximum ges av Lagranges multiplikatorsats:

Om restriktionen av f till bivillkorsmängden

$$X = \{x \in \Omega \mid g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}$$

har ett maximum i punkten $a \in X$, och om gradienterna $\nabla g_1(a)$, $\nabla g_2(a)$, …, $\nabla g_m(a)$ är linjärt oberoende, så finns det reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (Lagranges multiplikatorer) *så att*

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_2(a) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(a). \tag{1}$$

Med gradienten $\nabla g(a)$ i punkten a till en kontinuerligt deriverbar funktion g av n variabler menas vektorn $\big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\big)$. Gradienten $\nabla g(a)$ är en normalvektor till ytan $g(x) = g(a)$ i punkten a. Vi kan också uppfatta gradienten som en linjär form på $\mathbf{R}^n$ genom att identifiera den med avbildningen $v \mapsto \nabla g(a) \cdot v$, där vi använt $\cdot$ för att beteckna standardskalärprodukten i $\mathbf{R}^n$.

Beviset för Lagranges sats sker nu i två etapper. Först visar man med hjälp av implicita funktionssatsen att för varje vektor v i $\mathbf{R}^n$ med egenskapen att $\nabla g_1(a)\cdot v = \nabla g_2(a)\cdot v = \dots = \nabla g_m(a)\cdot v = 0$ finns det ett öppet intervall I kring origo i $\mathbf{R}$ och en kontinuerligt deriverbar funktion $\gamma\colon I \to \mathbf{R}^n$, som uppfyller $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$ och $\gamma(t) \in X$ för alla $t \in I$. Geometriskt betyder detta att det finns en kurva i X som passerar genom punkten a och där har v som sin tangentvektor.

Därefter konstaterar man att funktionen $F\colon t \mapsto f(\gamma(t))$ uppenbarligen har ett maximum för $t = 0$. Derivatan till envariabelfunktionen F är därför lika med 0 för $t = 0$. Derivatan $F'(0)$ kan förstås beräknas med hjälp av kedjeregeln, som ger $F'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(a) \cdot v = 0$.

Därmed har vi visat att antagandet $\nabla g_1(a) \cdot v = \nabla g_2(a) \cdot v = \dots = \nabla g_m(a) \cdot v = 0$ medför att $\nabla f(a) \cdot v = 0$. Existensen av parametrar λ_1, λ_2, …, λ_m som uppfyller (1) följer nu omedelbart av korollarium 4.1.4. □

För ändligdimensionella vektorrum är följande resultat en konsekvens av sats 4.1.3.

Sats 4.1.5 *Antag att vektorrummet V är ändligdimensionellt.*

(a) *Då är* $\dim V' = \dim V$.

(b) *Om $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en bas för V, så utgör motsvarande koordinatfunktioner $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ en bas för dualrummet V' med egenskapen $\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$.*

(c) *Om $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ är en godtycklig bas för dualrummet V', så är avbildningen $T\colon V \to \mathbf{K}^n$, definierad av att $Tv = (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v))$, en isomorfi, dvs. en koordinatavbildning på V.*

Bevis. Antag att $\dim V = n$ och att $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en bas för rummet. Att $\dim V' = n$ är – som vi redan nämnt inledningsvis – en omedelbar konsekvens av att dualelementen, dvs. de linjära formerna på V, kan identifieras med sina matrisrepresentationer, men likheten följer också direkt ur sats 4.1.3.

De till basen $e_1, e_2, \dots, e_n$ hörande koordinatfunktionerna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ uppfyller nämligen villkoret (β), så det följer av implikationen $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ att de bildar en linjärt oberoende delmängd i V'. Följaktligen är $\dim V' \geq n$.

Å andra sidan medför implikationen $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ att det inte kan finnas fler linjärt oberoende linjära former på V än det finns linjärt oberoende vektorer i V, vilket betyder att $\dim V' \leq n$. Detta innebär att $\dim V' = n = \dim V$, och det följer också att de linjärt oberoende koordinatfunktionerna $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ utgör en bas för V'. Därmed har vi visat påståendena (a) och (b).

(c) Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara de vektorer i V som ges av villkoret (β) i sats 4.1.3; vektorerna är linjärt oberoende och lika många som dimensionen för V, varför de är en bas för V. Vidare är $T(e_j) = \mathbf{e}_j$, där $\mathbf{e}_j$ är den j:te standardbasvektorn i $\mathbf{K}^n$. Avbildningen T avbildar således basen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i V på standardbasen i $\mathbf{K}^n$, vilket betyder att den är en isomorfi. $\square$

Anmärkning. För oändligdimensionella rum V är dimensionerna hos V och dualrummet V' olika. Mer precist kan man visa att $\dim V' = (\operatorname{card} \mathbf{K})^{\dim V} > \dim V$, där $\operatorname{card} \mathbf{K}$ betecknar kardinaltalet för $\mathbf{K}$. Se övning 4.8.

Definition 4.1.6 Baserna $e_1, e_2, \ldots, e_n$ för vektorrummet V och $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ för dualrummet V' kallas *duala baser* om $\xi_i(e_j) = \delta_{ij}$ för alla i, j.

Satserna 4.1.5 och 4.1.3 visar att varje bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i ett ändligtdimensionellt rum V har en dual bas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ i V', och vice versa.

Vi introducerar nu ett nytt sätt att beteckna funktionsvärden för linjära former. Om ϕ är en linjär form och v är en vektor skriver vi $\langle v, \phi \rangle$ för värdet $\phi(v)$. Per definition är alltså

$$\langle v, \phi \rangle = \phi(v).$$

Ibland, när vi betraktar former på olika vektorrum, behöver vi vara extra tydliga och skriver då $\langle v, \phi \rangle_{V,V'}$ för funktionsvärdet $\phi(v)$ för att markera att ϕ är en linjär form på V och v är en vektor i V.

Fördelen med den nya notationen är att den behandlar vektorn v och den linjära formen ϕ på ett symmetriskt sätt. Det är naturligt att uppfatta $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ som en funktion av två variabler, närmare bestämt som en funktion $V \times V' \to \mathbf{K}$. För fixt ϕ är funktionen $v \mapsto \langle v, \phi \rangle$ förstås den linjära formen ϕ.

Men vi kan också fixera vektorn v och betrakta funktionen

$$V' \to \mathbf{K}, \quad \phi \mapsto \langle v, \phi \rangle.$$

Låt oss kalla denna funktion v''; den är linjär eftersom

$$\begin{aligned} v''(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) &= \langle v, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \rangle = (\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)(v) \\ &= \alpha_1\phi_1(v) + \alpha_2\phi_2(v) = \alpha_1\langle v, \phi_1 \rangle + \alpha_2\langle v, \phi_2 \rangle \\ &= \alpha_1 v''(\phi_1) + \alpha_2 v''(\phi_2). \end{aligned}$$

Funktionen v'' är med andra ord ett element i dualrummet $(V')'$ till V'. Rummet $(V')'$ kallas *bidualen* till V och betecknas kortare V''.

Med vår nya $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$-notation kan vi nu skriva

$$\langle \phi, v''\rangle_{V',V''} = v''(\phi) = \langle v, \phi\rangle_{V,V'}$$

Sätt $Jv = v''$; detta ger oss en avbildning $J\colon V \to V''$ som definieras av att

$$\langle \phi, Jv\rangle_{V',V''} = \langle v, \phi\rangle_{V,V'} \tag{1}$$

för alla $v \in V$ och alla $\phi \in V'$, och som är är linjär eftersom

$$\begin{aligned}\langle \phi, J(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\rangle_{V',V''} &= \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \phi\rangle_{V,V'} = \alpha_1\langle v_1, \phi\rangle_{V,V'} + \alpha_2\langle v_2, \phi\rangle_{V,V'}\\ &= \alpha_1\langle \phi, Jv_1\rangle_{V',V''} + \alpha_2\langle \phi, Jv_2\rangle_{V',V''}\\ &= \langle \phi, \alpha_1 Jv_1 + \alpha_2 Jv_2\rangle_{V',V''}.\end{aligned}$$

Sats 4.1.7 *Den av ekvation* (1) *definierade linjära avbildningen $J\colon V \to V''$ är injektiv, och för ändligdimensionella vektorrum V är J en isomorfism.*

Bevis. Per definition är avbildningens nollrum

$$\mathcal{N}(J) = \{v \in V \mid \langle v, \phi\rangle_{V,V'} = 0 \text{ för alla } \phi \in V'\}.$$

Det följer därför av lemma 4.1.2 (ii) att $\mathcal{N}(J) = \{0\}$, vilket innebär att avbildningen är injektiv.

Om V är ändligdimensionellt, så är $\dim V'' = \dim V' = \dim V$, så det följer av dimensionssatsen att avbildningen J också är surjektiv, dvs. en isomorfism. □

Om rummet V är oändligdimensionellt, så är avbildningen J inte längre en isomorfi. Detta följer av dimensionsbetraktelser; i det oändligdimensionella fallet är nämligen $\dim V'' > \dim V' > \dim V$, där dimensionerna skall tolkas som oändliga kardinaltal. Jmf anmärkningen efter sats 4.1.5.

Övningar

4.1 Bestäm den duala basen till basen $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ för $\mathbf{R}^3$.

4.2 Låt A och c vara $m \times n$- resp. $1 \times n$-matriser. Visa att systemet

$$\begin{cases} Ax = 0\\ cx \neq 0\end{cases}$$

är lösbart om och endast om det duala systemet

$$A^t y = c^t$$

saknar lösning.

4.3 Antag att A är en icke-tom delmängd av vektorrummet V och Δ är en icke-tom delmängd av dualrummet V'. Mängden

$$A^0 = \{\phi \in V' \mid \langle v, \phi \rangle = 0 \text{ för alla } v \in A\}$$

kallas *annihilatorn* av A i V', och mängden

$${}^0\Delta = \{v \in V \mid \langle v, \phi \rangle = 0 \text{ för alla } \phi \in \Delta\}$$

kallas *annihilatorn* av Δ i V. Visa följande resultat för annihilatorer:

(i) A^0 och ${}^0\Delta$ är linjära delrum av V' resp. V.
(ii) $\{0\}^0 = V'$, $V^0 = \{0\}$, ${}^0\{0\} = V$, ${}^0(V') = \{0\}$.
(iii) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow {A_2}^0 \subseteq {A_1}^0$, $\Delta_1 \subset \Delta_2 \Longrightarrow {}^0\Delta_2 \subseteq {}^0\Delta_1$.
(iv) ${}^0(A^0) = \operatorname{spn} A$. Speciellt är alltså ${}^0(W^0) = W$ om W är ett linjärt delrum till V.
(v) $\operatorname{spn} \Delta \subseteq ({}^0\Delta)^0$,

4.4 Motsvarigheten till (iv) i föregående övning gäller inte generellt för annihilatorn till annihilatorn av ett delrum av dualen V'. Här följer ett exempel som visar detta. Låt X vara vektorrummet av alla konvergenta reella följder $x = (x_n)_1^\infty$ med addition och skalär multiplikation definierat på det naturliga sättet. Låt Δ vara det linjära delrum av dualen X' som består av alla linjära funktionaler ϕ på formen

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n x_n \quad \text{där} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| < \infty.$$

Låt slutligen η_0 vara den linjära funktional i X' som definieras av att

$$\eta_0(x) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(i) Visa att ${}^0\Delta = \{0\}$ och att följaktligen $({}^0\Delta)^0 = X'$.
(ii) Visa att $\eta_0 \notin \Delta$ och att följaktligen $({}^0\Delta)^0 \neq \Delta$.

4.5 Låt W vara ett linjärt delrum av ett ändligdimensionellt rum V. Visa att $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

*4.6 Låt V vara ett oändligdimensionellt vektorrum över $\mathbf{K}$ med bas B. Visa att varje element ϕ i dualrummet V' är entydigt bestämt av sina värden $\phi(v)$ för vektorerna v i basen B, och drag därav slutsatsen att det råder en 1–1-motsvarighet mellan V' och mängden $\mathbf{K}^B$ av alla funktioner från B till $\mathbf{K}$. Den sistnämnda mängden har per definition kardinalitet $(\operatorname{card} \mathbf{K})^{\operatorname{card} B}$, så det följer att $\operatorname{card} V' = (\operatorname{card} \mathbf{K})^{\dim V}$.

*4.7 Låt V vara ett oändligdimensionellt rum över $\mathbf{K}$. Visa att $\dim V' \geq \operatorname{card} \mathbf{K}$. [Ledning: Låt B vara en bas för V och välj en uppräknelig delmängd v_1, v_2, v_3, … av B. Definiera för varje $\lambda \in \mathbf{K}$ ett element $\phi_\lambda \in V'$ genom att sätta $\phi_\lambda(v_i) = \lambda^{i-1}$ för $i = 1, 2, 3, \ldots$ och $\phi_\lambda(v) = 0$ för alla andra vektorer v i basen B. Visa att de erhållna funktionalerna ϕ_λ är linjärt oberoende.]

*4.8 Visa att om V är oändligdimensionellt, så är $\dim V' = (\operatorname{card} \mathbf{K})^{\dim V}$. [Kombinera resultaten i övningarna 3.44, 4.6 och 4.7, och utnyttja att om A är en oändlig mängd så är $\operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B = \max(\operatorname{card} A, \operatorname{card} B)$.]

4.2 Transponatet till en linjär avbildning

Låt V och W vara två vektorrum över samma kropp $\mathbf{K}$, och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. För varje element ϕ i dualen W' är den sammansatta avbildningen $\phi T\colon V \to \mathbf{K}$, som definieras av att $(\phi T)(v) = \phi(Tv) = \langle Tv, \phi\rangle_{W,W'}$, en linjär form på V, dvs. ett element i dualen V'. Låt oss kalla detta element, som beror av såväl T som ϕ, för $T^t\phi$. Per definition är alltså

$$\langle v, T^t\phi\rangle_{V,V'} = \langle Tv, \phi\rangle_{W,W'} \quad \text{för alla } v \in V.$$

Detta ger oss en avbildning $T^t : W' \to V'$ som är linjär, eftersom

$$\begin{aligned}\langle v, T^t(\alpha\phi + \beta\psi)\rangle_{V,V'} &= \langle Tv, \alpha\phi + \beta\psi\rangle_{W,W'} = \alpha\langle Tv, \phi\rangle_{W,W'} + \beta\langle Tv, \psi\rangle_{W,W'} \\ &= \alpha\langle v, T^t\phi\rangle_{V,V'} + \beta\langle v, T^t\psi\rangle_{V,V'} \\ &= \langle v, \alpha T^t\phi + \beta T^t\psi\rangle_{V,V'}.\end{aligned}$$

Definition 4.2.1 Den linjära avbildningen $T^t\colon W' \to V'$, som definieras av sambandet

$$\langle v, T^t\phi\rangle_{V,V'} = \langle Tv, \phi\rangle_{W,W'},$$

kallas *transponatet* till avbildningen $T\colon V \to W$.

Sats 4.2.2 *Antag att rummen V och W är ändligdimensionella, och att den linjära avbildningen $T\colon V \to W$ har matrisen A med avseende på givna baser i V och W. Då har transponatet T^t matrisen A^t med avseende på de duala baserna i W' och V'.*

Bevis. Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ och $f_1, f_2, \ldots, f_m$ vara de givna baserna i V resp. W, och låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ och $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ vara motsvarande duala baser. Antag att $A = [a_{ij}]$, och att T^t har matrisen $B = [b_{ij}]$. Då är enligt sats 3.10.3

$$Te_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k \quad \text{och} \quad T^t\eta_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\xi_k,$$

så det följer att

$$b_{ij} = \langle e_i, T^t \eta_j \rangle_{V,V'} = \langle T e_i, \eta_j \rangle_{W,W'} = a_{ji},$$

vilket bevisar att $B = A^t$. $\square$

Övningar

4.9 Visa följande samband mellan nollrummen och bildrummen till en operator och dess transponat:

$$\mathcal{N}(T) = {}^0\mathcal{R}(T^t), \;\; \mathcal{N}(T^t) = \mathcal{R}(T)^0, \;\; \mathcal{R}(T) = {}^0\mathcal{N}(T^t), \;\; \mathcal{R}(T^t) \subseteq \mathcal{N}(T)^0.$$

Kapitel 5

Bilinjära former

5.1 Bilinjära former

Definition 5.1.1 Låt V och W vara två vektorrum över samma kropp $\mathbf{K}$. En *bilinjär form* på $V \times W$ är en funktion $b : V \times W \to \mathbf{K}$ som är linjär i varje variabel för sig:

(i$_1$) $b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 b(v_1, w) + \alpha_2 b(v_2, w)$

(i$_2$) $b(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 b(v, w_1) + \beta_2 b(v, w_2)$.

Summan av två bilinjära former och produkten mellan en skalär och en bilinjär form är bilinjära former, så mängden av alla bilinjära former på $V \times W$ utgör ett linjärt rum, som vi betecknar $\mathcal{B}(V, W)$.

I många fall kommer rummen V och W att sammanfalla; bilinjära former på $V \times V$ kommer kortare att kallas bilinjära former på V.

Med induktion följer det förstås ur (i$_1$) och (i$_2$) att

$$b\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j b(v_i, w_j). \tag{1}$$

I många sammanhang behöver vi inte ge den bilinjära formen som vi betraktar något speciellt namn, och den bilinjära formens värde för variabelparet $(v, w) \in V \times W$ kommer då att betecknas $\langle v, w \rangle$.

Exempel 5.1.1 Definiera

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) g(t)\, dt.$$

Då är $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ en bilinjär form på $\mathcal{C}[0, 1]$. $\square$

Exempel 5.1.2 Låt V vara ett godtyckligt vektorrum. Vi får en bilinjär form på $V \times V'$ genom att definiera

$$\langle v, \phi \rangle = \phi(v);$$

denna bilinjära form studerade vi utförligt i föregående kapitel. □

Exempel 5.1.3 Vi får en bilinjär form på $\mathbf{R}^2$ genom att sätta

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2.$$

Till denna bilinjära form kan vi på ett naturligt sätt associera matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

med vars hjälp vi kan uttrycka den bilinjära formen som $\langle x, y \rangle = x^t By$, där vi som vanligt uppfattar x och y som kolonnmatriser. □

Exempel 5.1.4 Den bilinjära formen $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2x_4y_4$ på $\mathbf{R}^4$ spelar en viktig roll inom relativitetsteorin, eftersom den används för att definiera avstånd i rum-tiden. □

Precis som i exempel 5.1.3 kan vi associera matriser till bilinjära former på ändligdimensionella rum.

Definition 5.1.2 Låt V och W vara två ändligdimensionella rum med baser $e_1, e_2, \dots, e_m$ resp. $f_1, f_2, \dots, f_n$, och låt b vara en bilinjär form på $V \times W$. Sätt $b_{ij} = b(e_i, f_j)$. Då kallas $m \times n$-matrisen $B = [b_{ij}]$ för den *bilinjära formens matris* med avseende på de givna baserna.

Påstående 5.1.3 *Om den bilinjära formen b har matrisen B med avseende på baserna $e_1, e_2, \dots, e_m$ och $f_1, f_2, \dots, f_n$ och om ξ och η är motsvarande koordinatavbildningar, så är*

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i(v) b_{ij} \eta_j(w) = \xi(v)^t B \eta(w). \tag{2}$$

Bevis. Tillämpa (1) på vektorerna $v = \sum_{i=1}^m \xi_i(v) e_i$ och $w = \sum_{j=1}^n \eta_j(w) f_j$. □

Sats 5.1.4 *Matristilldelningen $b \mapsto B$ i definition 5.1.2 är en isomorfi mellan rummet $\mathcal{B}(V, W)$ och matrisrummet $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$. Dimensionen hos rummet $\mathcal{B}(V, W)$ är således lika med $\dim V \cdot \dim W$.*

Bevis. Matristilldelningen är uppenbarligen en linjär operation. För varje $m \times n$-matris B definierar formel (2) en bilinjär form, och om $B = 0$ så är b lika med nollformen, dvs. nollelementet i rummet av de bilinjära formerna. Avbildningen $b \mapsto B$ är således bijektiv, dvs. en isomorfi. □

EXEMPEL 5.1.5 Låt $\mathbf{K}$ vara en godtycklig kropp. Genom att tillämpa påstående 5.1.3 på standardbaserna ser vi omedelbart att varje bilinjär form på $\mathbf{K}^m \times \mathbf{K}^n$ har formen

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

med koefficienter b_{ij} i $\mathbf{K}$. □

Definition 5.1.5 Om b är en bilinjär form på $V \times W$, så får vi en bilinjär form b^t på $W \times V$ genom att sätta

$$b^t(w, v) = b(v, w).$$

Denna bilinjära form kallas *transponatet* till b.

Påstående 5.1.6 *Om rummen är ändligdimensionella och b har matrisen B med avseende på givna baser i V och W, så har transponatet b^t matrisen B^t med avseende på samma baser.*

Bevis. Trivialt. □

Definition 5.1.7 En bilinjär form b på ett vektorrum V kallas *symmetrisk* om $b^t = b$, dvs. om $b(v, w) = b(w, v)$ för alla vektorer v, $w \in V$.

EXEMPEL 5.1.6 Den bilinjära formen i exempel 5.1.1 är symmetrisk. □

Påstående 5.1.8 *En bilinjär form på ett ändligdimensionellt vektorrum är symmetrisk om och endast om formens matris med avseende på en godtycklig bas är symmetrisk.*

Bevis. Uppenbart. □

EXEMPEL 5.1.7 Den bilinjära formen $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ på vektorrummet $\mathbf{Z}_5^3$ är symmetrisk. Formens matris med avseende på standardbasen är enhetsmatrisen. □

Övningar

5.1 Bestäm dimensionen för rummet av alla bilinjära former och för rummet av alla symmetriska bilinjära former på ett n-dimensionellt vektorrum.

5.2 En bilinjär form b på ett vektorrum kallas *antisymmetrisk* om $b^t = -b$. Karakterisera de antisymmetriska bilinjära formernas matriser samt bestäm dimensionen för rummet av alla antisymmetriska former på ett n-dimensionellt vektorrum.

5.3 En bilinjär form b på ett vektorrum kallas *alternerande* om $b(v, v) = 0$ för alla vektorer v i rummet. Bevisa att alternerande former är antisymmetriska. Gäller omvändningen?

5.4 I denna övning förutsätts V vara ett vektorrum över en kropp där inte $1 + 1 = 0$. Visa att

a) nollformen är den enda bilinjära form på V som är både symmetrisk och antisymmetrisk;
b) om b är en godtycklig bilinjär form på V, så är formen $\frac{1}{2}(b + b^t)$ symmetrisk och formen $\frac{1}{2}(b - b^t)$ antisymmetrisk;
c) varje bilinjär form b på V på ett entydigt sätt kan skrivas som en summa $b = b_s + b_a$ av en symmetrisk form b_s och en antisymmetrisk form b_a.

5.5 För att visa att resultaten i föregående övning blir annorlunda i kroppar där $2 = 0$ inbjuds läsaren att studera de bilinjära formerna på vektorrummet $\mathbf{Z}_2^2$. Vilka är symmetriska, vilka är antisymmetriska och vilka är alternerande?

5.2 Kvadratiska former

Definition 5.2.1 Funktionen $q\colon V \to \mathbf{K}$ kallas en *kvadratisk form* om det finns en symmetrisk bilinjär form b på V så att

$$q(v) = b(v, v)$$

för alla $v \in V$.

En kvadratisk form q är homogen av grad 2, dvs. $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ för alla $v \in V$ och $\lambda \in \mathbf{K}$.

Exempel 5.2.1 Sätt

$$q(f) = \int_0^1 t^2 f(t)^2 \, dt.$$

Då är q en kvadratisk form på $\mathcal{C}[0, 1]$, ty $q(f) = \langle f, f \rangle$, där $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ är den symmetriska bilinjära formen i exempel 5.1.1. □

Sats 5.2.2 *Låt q vara en kvadratisk form på V och antag att $q(v) = b(v, v)$, där b är en symmetrisk bilinjär form på V. Då är*

(i) $$2b(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w) \qquad \text{och}$$

(ii) $$4b(v, w) = q(v + w) - q(v - w).$$

Bevis. Identiteten (i) följer av räkningen

$$\begin{aligned} q(v + w) &= b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(v, w) + b(w, v) + b(w, w) \\ &= q(v) + 2b(v, w) + q(w). \end{aligned}$$

Analogt fås att $q(v - w) = q(v) - 2b(v, w) + q(w)$, och subtraktion ger identiteten (ii). □

Enligt föregående sats är en symmetrisk bilinjär form b på ett vektorrum över $\mathbf{K}$ entydigt bestämd av sin motsvarande kvadratiska form q, och vi kan rekonstruera b från q förutsatt att vi kan dividera med 2 i kroppen $\mathbf{K}$, dvs. förutsatt att $2 \neq 0$.[1]

Exempel 5.2.2 Den kvadratiska formen

$$q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 9x_2^2 + 7x_3^2$$

på $\mathbf{R}^3$ kommer från den symmetriska bilinjära formen

$$\langle x, y \rangle = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 9x_2y_2 + 7x_3y_3,$$

och med hjälp av denna forms symmetrisk matris

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

kan vi skriva $q(x) = x^tBx$. □

Ovan definierade vi kvadratiska former med hjälp av *symmetriska* bilinjära former; detta är inte nödvändigt utan vi kunde lika gärna ha utgått från godtyckliga bilinjära former på grund av följande resultat.

Sats 5.2.3 *Om V är ett vektorrum över en kropp där $2 \neq 0$ och b är en godtycklig bilinjär form på V, så är $q(v) = b(v, v)$ en kvadratisk form.*

[1]Man uttrycker detta genom att säga att kroppens *karakteristik* är skild från 2. I kroppen $\mathbf{Z}_2$ är $2 = 0$.

Bevis. Definiera en ny bilinjär form b_s genom att sätta $b_s = \frac{1}{2}(b + b^t)$, dvs.

$$b_s(v, w) = \frac{1}{2}\big(b(v, w) + b(w, v)\big).$$

Formen b_s är uppenbarligen symmetrisk och $b_s(v, v) = b(v, v) = q(v)$. $\square$

Låt q vara en kvadratisk form på ett ändligdimensionellt vektorrum V. Med *matrisen* för q (med avseende på en given bas och motsvarande koordinatavbildning) menas matrisen för den mot q svarande symmetriska bilinjära formen b. Om denna matris är Q och koordinatavbildningen kallas ξ, så är förstås $q(v) = b(v, v) = \xi(v)^t Q\xi(v)$.

Matrisen beror av valet av bas i vektorrummen V och förändras vid basbyte på följande sätt.

Sats 5.2.4 *Låt ξ och ξ' vara två koordinatavbildningar på V, och låt C vara transformationsmatrisen vid koordinatbytet från ξ' till ξ så att $\xi = C\xi'$. Låt vidare q vara en kvadratisk form på V och antag att q har matrisen Q med avseende på koordinatavbildningen ξ. Då har q matrisen C^tQC med avseende på koordinatavbildningen ξ'.*

Bevis. Påståendet följer av att

$$q(v) = \xi(v)^t Q\xi(v) = (C\xi'(v))^t Q(C\xi'(v)) = \xi'(v)^t C^t QC\xi'(v).$$

$\square$

Övningar

5.6 Bestäm motsvarande symmetriska bilinjära form och matrisen med avseende på standardbasen för följande kvadratiska former:
a) $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ på $\mathbf{R}^3$,
b) $q(p) = p(0)^2 + 4p(0)p(1) - p(1)^2 + p'(0)^2$ på $\mathcal{P}_2$,
c) $q(p) = \int_0^1 p(t)p'(t)\,dt$ på $\mathcal{P}_2$.

5.7 Låt q vara en kvadratisk form. Visa att

$$q(u + v + w) = q(u + v) + q(v + w) + q(w + u) - q(u) - q(v) - q(w)$$

för alla vektorer u, v, w.

5.3 Seskvilinjära och hermiteska former

I reella vektorrum kan man, som vi skall se i nästa kapitel, definiera ett längdbegrepp med hjälp av positivt definita symmetriska bilinjära former. I komplexa vektorrum fungerar inte de symmetriska bilinjära formerna för detta ändamål, utan vi behöver modifiera definitionen något och får då så kallade hermiteska former. Vi skall studera dessa i det här avsnittet, där V ***och W genomgående betecknar komplexa vektorrum.***

Definition 5.3.1 Med en *seskvilinjär* form h på $V \times W$ menas en funktion $h\colon V \times W \to \mathbf{C}$ som uppfyller följande villkor:

(i$_1$) $h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 h(v_1, w) + \lambda_2 h(v_2, w)$

(i$_2$) $h(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \overline{\lambda}_1 h(v, w_1) + \overline{\lambda}_2 h(v, w_2)$

för alla komplexa skalärer λ_1, λ_2. Strecket över ett komplext tal betecknar förstås komplex konjugering.

Villkor (i$_1$) innebär att formen är linjär med avseende på det första argumentet, medan (i$_2$) betyder att funktionen $w \mapsto \overline{h(v,w)}$ är en linjär form på W för varje fixt v.

Med induktion kan vi förstås utvidga egenskaperna (i$_1$) och (i$_2$) till godtyckliga linjärkombinationer; vi får då

$$h\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu}_j h(v_i, w_j).$$

Precis som för bilinjära former skriver vi ofta $\langle v, w\rangle$ istället för $h(v,w)$, och om $W = V$ säger vi kortare att h är en seskvilinjär form på V.

Antag att $e_1, e_2, \dots, e_m$ och $f_1, f_2, \dots, f_n$ är baser i rummen V resp. W och att ξ resp. η är motsvarande koordinatavbildningar. En seskvilinjär form h är då förstås entydigt bestämd av talen $h_{ij} = h(e_i, f_j)$. Matrisen $H = (h_{ij})$ kallas formens *matris*, och för alla $v \in V$ och $w \in W$ är

$$h(v,w) = \xi(v)^t H \overline{\eta(w)}.$$

Definition 5.3.2 En seskvilinjär form h på V kallas *hermitesk* om

$$h(v,w) = \overline{h(w,v)}$$

för alla vektorer v och w.

Notera att om h är en hermitesk form på V, så är funktionsvärdet $h(v,v)$ reellt för varje vektor $v \in V$.

Exempel 5.3.1 $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w}_i$ är en hermitesk form på $\mathbf{C}^n$. $\square$

Exempel 5.3.2 Definiera

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

där f och g är två kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Då blir $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ en hermitesk form på det komplexa vektorrummet $\mathcal{C}[0, 1)_{\mathbf{C}}$ av alla komplexvärda kontinuerliga funktioner på intervallet. □

En hermitesk form h kan rekonstrueras utifrån kännedom om $h(v, v)$ för alla vektorer v.

Sats 5.3.3 *För en hermitesk form h gäller identiteterna*

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} h(v, w) &= h(v + w, v + w) - h(v, v) - h(w, w) \\ 2\operatorname{Im} h(v, w) &= h(v + \mathrm{i}w, v + \mathrm{i}w) - h(v, v) - h(w, w). \end{aligned}$$

Bevis. Utveckla högerleden. □

Definition 5.3.4 Låt A vara en matris med komplexa element a_{ij}. Den matris som fås genom att konjugera samtliga element i A kallas A-*konjugat* och betecknas $\overline{A}$. Matrisen $\overline{A}^{\,t}$ $(= \overline{A^t})$ kallas den till A *adjungerade matrisen* eller A:s *adjunkt* och betecknas A^*. Per definition är alltså elementet på plats (i, j) i matrisen A^* lika med $\overline{a}_{ji}$.

Om alla matriselementen i A är reella, så är förstås $A^* = A^t$. I fortsättningen kommer vi därför ofta att använda symbolen * istället för ^{t} för transponering av *reella* matriser, speciellt om vi därigenom kan behandla ett reellt fall som ett specialfall av ett allmännare komplext fall.

Exempel 5.3.3

$$\begin{bmatrix} 2 + \mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 1 + 2\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 - \mathrm{i} & 1 - 2\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}.$$

□

För adjungering gäller följande räkneregler, vars bevis vi lämnar som enkel övning.

Sats 5.3.5 *Låt A och B vara matriser av typ $m \times n$ och C vara en matris av typ $n \times p$ med komplexa element. Då är*

(i) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$

(ii) $(A^*)^* = A$

(iii) $(AC)^* = C^* A^*$

(iv) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$*, förutsatt att inversen A^{-1} existerar.*

Definition 5.3.6 En matris A med komplexa element kallas *hermitesk* eller *självadjungerad* om $A^* = A$.

I en hermitesk matris är alla diagonalelement reella. En reell matris är förstås hermitesk om och endast om den är symmetrisk.

EXEMPEL 5.3.4 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2+3\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}$$

är hermitesk. □

På samma sätt som symmetriska matriser svarar mot symmetriska bilinjära former svarar hermiteska matriser mot hermiteska former.

Sats 5.3.7 *En seskvilinjär form h på ett ändligdimensionellt rum är hermitesk om och endast om formens matris H (med avseende på en godtycklig bas) är hermitesk.*

Bevis. Lämnas som övning. □

Övningar

5.8 Låt A vara en godtycklig kvadratisk matris. Visa att matriserna $\frac{1}{2}(A + A^*)$ och $\frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$ är hermiteska.

5.9 Visa att varje kvadratisk matris A på ett entydigt sätt kan skrivas $A = H_1 + \mathrm{i}H_2$ där matriserna H_1 och H_2 är hermiteska.

5.10 Låt A vara en godtycklig matris. Visa att matrisen A^*A är hermitesk.

5.4 Ortogonalitet

Definition 5.4.1 Låt V och W vara vektorrum över samma kropp $\mathbf{K}$, och låt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ vara en bilinjär form på $V \times W$. Om vektorrummen är komplexa, dvs. om $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, kan $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ även få vara en seskvilinjär form.

Om $\langle v, w \rangle = 0$, säger vi att vektorerna $v \in V$ och $w \in W$ är *ortogonala* mot varandra med avseende på formen $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ och skriver $v \perp w$.

Om vektorn w i W är ortogonal mot alla vektorer i en icke-tom delmängd A av V, dvs. om $\langle v, w \rangle = 0$ för alla $v \in A$, säger vi att w är *ortogonal mot A*

och skriver $A \perp w$. Mängden av alla vektorer i W som är ortogonala mot A kallas *högerortogonala komplementet* till A och betecknas $A^{\perp}$, dvs.

$$A^{\perp} = \{w \in W \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ för alla } v \in A\}.$$

Om B är en delmängd av W, så säger vi på motsvarande sätt att en vektor $v \in V$ är ortogonal mot B och skriver $v \perp B$, om v är ortogonal mot alla vektorer i B. Mängden av alla vektorer i V som är ortogonala mot B kallas *vänsterortogonala komplementet* till B och betecknas ${}^{\perp}B$.

För symmetriska former (och för hermiteska former) $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ gäller förstås att $v \perp w$ om och endast om $w \perp v$, och vänsterortogonala komplementet ${}^{\perp}A$ till en godtycklig mängd A är lika med högerortogonala komplementet $A^{\perp}$. I sådana fall kallar vi $A^{\perp}$ kort och gott för *ortogonala komplementet* till A.

Påstående 5.4.2 *Låt A och B vara icke-tomma delmängder av V resp. W. Då gäller:*

(a) *$A^{\perp}$ är ett linjärt delrum av W, och ${}^{\perp}B$ är ett linjärt delrum av V;*

(b) *$A^{\perp} = (\operatorname{spn} A)^{\perp}$ och ${}^{\perp}B = {}^{\perp}(\operatorname{spn} B)$;*

(c) *$A \subseteq {}^{\perp}(A^{\perp})$ och $B \subseteq ({}^{\perp}B)^{\perp}$.*

Bevis. Att vänsterortogonala komplementet ${}^{\perp}B$ är ett linjärt delrum är en omedelbar konsekvens av att bilinjära (och seskvilinjära) former är linjära i det första argumentet, och att $A^{\perp}$ är ett linjärt delrum följer av att bilinjära former är linjära i det andra argumentet (resp. att avbildningen $w \to \overline{\langle v, w \rangle}$ är linjär i det seskvilinjära fallet).

Påstående (b) följer också av linearitet, och (c) är en direkt följd av definitionen av komplement. □

Om U är ett ändligdimensionellt delrum av ett inre produktrum V, så är V en direkt summa av delrummen U och $U^{\perp}$. (Se sats 6.3.5.) Denna egenskap gäller emellertid inte för godtyckliga symmetriska bilinjära former $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Som följande exempel visar kan snittet $U \cap U^{\perp}$ innehålla nollskilda vektorer.

Exempel 5.4.1 Låt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ vara den symmetriska bilinjära formen

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2x_4y_4$$

på $\mathbf{R}^4$, där $c \neq 0$. Sätt $v = (c, 0, 0, 1)$ och $U = \operatorname{spn}\{v\}$; då är

$$U^{\perp} = \{v\}^{\perp} = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - cx_4 = 0\}.$$

Notera att $v \perp v$ och att följaktligen $U \cap U^{\perp} = U$. □

Exempel 5.4.2 Låt $\mathbf{K}$ vara kroppen $\mathbf{Z}_3$ av heltal modulo 3 och betrakta den symmetriska bilinjära formen

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

på vektorrummet $V = \mathbf{K}^3$. Vektorn $v = (1, 1, 1)$ är ortogonal mot sig själv och

$$\{v\}^\perp = \{x \in \mathbf{K}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \operatorname{spn}\{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\}.$$

□

Sats 5.4.3 *Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en bilinjär (eller seskvilinjär) form på $V \times W$ och antag att ${}^\perp W = \{0\}$. Låt U vara ett ändligdimensionellt linjärt delrum av V. Då är kvotrummet $W/U^\perp$ isomorft med delrummet U.*

Bevis. Sätt $n = \dim U$ och låt $u_1, u_2, \dots, u_n$ vara en bas för delrummet U. Låt $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vara de linjära former på W som definieras av att

$$\phi_i(w) = \langle u_i, w\rangle \quad \text{resp.} \quad \phi_i(w) = \overline{\langle u_i, w\rangle}$$

i det bilinjära resp. seskvilinjära fallet.

Formerna $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ är linjärt oberoende. Antag nämligen att

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots + \alpha_n\phi_n = 0.$$

Detta innebär i det bilinjära fallet att $\langle \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \cdots + \alpha_nu_n, w\rangle = 0$ för alla $w \in W$ med slutsatsen att $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \cdots + \alpha_nu_n = 0$ på grund av antagandet ${}^\perp W = \{0\}$, och eftersom vektorerna $u_1, u_2, \dots, u_n$ är linjärt oberoende, följer det att $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

I det seskvilinjära fallet får vi istället $\overline{\alpha}_1u_1 + \overline{\alpha}_2u_2 + \cdots + \overline{\alpha}_nu_n = 0$ med samma slutsats.

Betrakta nu avbildningen $T\colon W \to \mathbf{K}^n$ som definieras av att

$$Tw = (\phi_1(w), \phi_2(w), \dots, \phi_n(w)).$$

Avbildningen T är linjär och surjektiv enligt sats 4.1.3, och avbildningens nollrum är

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \bigcap_{i=1}^{n}\{w \in W \mid \phi_i(w) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{w \in W \mid \langle u_i, w\rangle = 0\}\\ &= \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp = U^\perp.\end{aligned}$$

Det följer därför av korollarium 3.11.7 att den av T inducerade avbildningen $\hat{T}\colon W/U^\perp \to \mathbf{K}^n$ är en isomorfism. Eftersom $\dim U = n$, är vidare U isomorft med $\mathbf{K}^n$, så det följer att kvotrummet $W/U^\perp$ är isomorft med U. □

Definition 5.4.4 En bilinjär (eller seskvilinjär) form $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ på $V \times W$ kallas *icke-degenererad* om ${}^\perp W = \{0\}$ och $V^\perp = \{0\}$, dvs. om nollvektorn är den enda vektor som är ortogonal mot alla vektorer i V resp. W.

Exempel 5.4.3 De symmetriska bilinjära formerna

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2x_4y_4, \quad \text{där } c \neq 0,$$

på $\mathbf{R}^4$ och

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

på $\mathbf{Z}_3^3$ i exempel 5.4.1 och 5.4.2 är icke-degenererade. Den bilinjära formen

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2 = (x_1 + 3x_2)(y_1 + 2y_2)$$

på $\mathbf{R}^2$ är degenererad, eftersom exempelvis $(-3, 1) \perp \mathbf{R}^2$. □

Exempel 5.4.4 Låt V vara ett godtyckligt vektorrum, och betrakta den bilinjära formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ på $V \times V'$ som definieras av att $\langle v, \phi\rangle = \phi(v)$. Höger- och vänsterortogonala komplement till mängder i V resp. V' kallas i detta fall också annihilatorer. Se övning 4.3. Formen är icke-degenererad − att $V^\perp = \{0\}$ är en omedelbar konsekvens av nollformens definition, och att ${}^\perp(V') = \{0\}$ är en omformulering av lemma 4.1.2 (ii). □

Vi noterar nu två omedelbara korollarier till sats 5.4.3.

Korollarium 5.4.5 *Antag att $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är en icke-degenererad bilinjär eller seskvilinjär form på $V \times W$ och att rummet V är ändligdimensionellt. Då är också rummet W ändligdimensionellt och* $\dim W = \dim V$.

Bevis. Sats 5.4.3 tillämpad på fallet $U = V$ visar att V är isomorft med kvotrummet $W/\{0\}$, dvs. med W. Följaktligen har V och W samma dimension. □

Korollarium 5.4.6 *Antag att $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är en icke-degenererad bilinjär eller seskvilinjär form på $V \times W$, där rummen V och W är ändligdimensionella och då nödvändigtvis av samma dimension. Låt U vara ett linjärt delrum av V. Då är*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

Naturligtvis gäller också ett analogt resultat för delrum U av W, nämligen att $\dim U + \dim {}^\perp U = \dim V$. Detta följer genom att betrakta den till $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ transponerade formen (resp. i det seskvilinjära fallet konjugatet av den transponerade formen).

Bevis. Enligt sats 5.4.3 är delrummet U isomorft med kvotrummet $W/U^\perp$, och följaktligen är

$$\dim U = \dim W/U^\perp = \dim W - \dim U^\perp = \dim V - \dim U^\perp.$$

□

För icke-degenererade former på ändligdimensionella rum kan vi nu skärpa påstående 5.4.2 (c).

Sats 5.4.7 *Om $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är en icke-degenererad bilinjär eller seskvilinjär form på $V \times W$, där båda rummen är ändligdimensionella, och U är ett linjärt delrum av V, så är $U = {}^\perp(U^\perp)$.*

Motsvarande gäller förstås också för delrum av W.

Bevis. U är enligt påstående 5.4.2 (c) ett delrum till delrummet ${}^\perp(U^\perp)$, så påståendet om likhet följer om vi visar att rummen har samma dimension. Men enligt korollarium 5.4.6 (och anmärkningen efter detsamma tillämpad på delrummet $U^\perp$ av W) är

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V = \dim U^\perp + \dim {}^\perp(U^\perp),$$

så det följer direkt att $\dim U = \dim {}^\perp(U^\perp)$. □

Till varje bilinjär (resp. seskvilinjär) form $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ på $V \times W$ kan vi på ett naturligt sätt associera en icke-degenererad form genom att övergå till lämpliga kvotrum. Vi skall nu beskriva denna konstruktion.

Vi börjar med att konstatera att för godtyckliga vektorer $v \in V$, $v_1 \in {}^\perp W$, $w \in W$ och $w_1 \in V^\perp$ är

$$\langle v + v_1, w + w_1\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w_1\rangle + \langle v_1, w + w_1\rangle = \langle v, w\rangle + 0 + 0 = \langle v, w\rangle.$$

Vi kan därför definiera en bilinjär (resp. seskvilinjär) form $\langle\cdot\,,\cdot\rangle'$ på produktrummet $V/{}^\perp W \times W/V^\perp$ genom att sätta

$$\langle [v], [w]\rangle' = \langle v, w\rangle,$$

ty högerledet beror enbart av translaten $[v]$ och $[w]$ och inte av de speciella vektorerna v och w. (Här är förstås $[v] = v + {}^\perp W$ och $[w] = w + V^\perp$.)

Lemma 5.4.8 *Den ovan definierade formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle'$ är icke-degenererad.*

Bevis. Om $\langle [v], [w]\rangle' = 0$ för alla w så följer av definitionen att $v \in {}^\perp W$, dvs. $[v] = 0$. Detta visar att ${}^\perp(W/V^\perp) = \{0\}$. Analogt är förstås $(V/{}^\perp W)^\perp = \{0\}$. □

Sats 5.4.9 *Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en bilinjär eller seskvilinjär form på $V \times W$, där rummen V och W är ändligdimensionella. Då är*

$$\dim W - \dim V^\perp = \dim V - \dim {}^\perp W.$$

Bevis. Eftersom formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle'$ på $V/{}^\perp W \times W/V^\perp$ är icke-degenererad, följer det av korollarium 5.4.5 och sats 3.11.5 att

$$\dim V - \dim {}^\perp W = \dim V/{}^\perp W = \dim W/V^\perp = \dim W - \dim V^\perp.$$

□

Korollarium 5.4.10 *Antag att V och W är vektorrum med samma ändliga dimension, och låt $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ vara en bilinjär eller seskvilinjär form på $V \times W$. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(α) $V^\perp = \{0\}$;

(β) ${}^\perp W = \{0\}$;

(γ) *formen $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ är icke-degenererad.*

Bevis. Det följer av föregående sats att $\dim V^\perp = \dim {}^\perp W$, så påståendena ($\alpha$) och ($\beta$) är ekvivalenta. Detta innebär att formen $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ är icke-degenererad om och endast om ettdera av villkoren (α) eller (β) gäller. □

Vi har sett flera exempel på icke-degenererade symmetriska bilinjära former och delrum U med $U \cap U^\perp \neq \{0\}$. För symmetriska bilinjära former och hermiteska former $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ är villkoret $U \cap U^\perp = \{0\}$ ekvivalent med att *restriktionen* av $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ till delrummet U är icke-degenererad, ty med avseende på denna restriktion är delrummets U:s (höger)ortogonala komplement

$$\{w \in U \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ för alla } v \in U\} = \{w \in U \mid w \in U^\perp\} = U \cap U^\perp,$$

och för symmetriska (och hermiteska) former är höger- och vänsterkomplementen identiska.

Vi har nu följande resultat för former på ändligdimensionella rum.

Sats 5.4.11 *Låt $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ vara en icke-degenererad symmetrisk bilinjär eller hermitesk form på ett ändligdimensionellt vektorrum V och låt U vara ett linjärt delrum till V. Då är följande tre villkor ekvivalenta.*

(α) *Restriktionen av $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ till U är icke-degenererad.*

(β) *Restriktionen av $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ till $U^\perp$ är icke-degenererad.*

(γ) $V = U + U^\perp$.

Om (γ) gäller, så är vidare summan direkt.

Bevis. (α) $\Leftrightarrow$ (β): Vänster- och högerortogonalt komplement är i detta fall samma sak, så enligt sats 5.4.7 är $U = (U^\perp)^\perp$. Följaktligen är

$$U \cap U^\perp = U^\perp \cap (U^\perp)^\perp,$$

och detta medför enligt diskussionen omedelbart före satsen att formens restriktion till U är icke-degenererad om och endast om dess restriktion till $U^\perp$ är det.

(α) $\Leftrightarrow$ (γ): Delrummet $U + U^\perp$ är lika med V om och endast om det har samma dimension som V, och dimensionsformeln för en summa ger i kombination med formeln i korollarium 5.4.6 att

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = \dim V - \dim(U \cap U^\perp).$$

Följaktligen är $U + U^\perp = V$ om och endast om $U \cap U^\perp = \{0\}$, dvs. om och endast om (α) gäller.

Slutligen är summan i (γ) automatiskt direkt, eftersom (γ) gäller om och endast om $U \cap U^\perp = \{0\}$. $\square$

Vi avslutar med en koordinatoberoende definition av en forms rang.

Definition 5.4.12 Låt V och W vara två ändligdimensionella rum. Med *rangen* hos en bilinjär eller seskvilinjär form form på $V \times W$ menas talet

$$r = \dim W - \dim V^\perp.$$

Sats 5.4.13 *En bilinjär form har samma rang som sitt transponat. Motsvarande gäller för en seskvilinjär form.*

Bevis. Låt b vara en bilinjär form på $V \times W$. Då är delrummet ${}^\perp W$ högerortogonalt komplement till W med avseende på den transponerade bilinjära formen b^t på $W \times V$. Följaktligen är per definition $\operatorname{rang} b^t = \dim V - \dim {}^\perp W$ medan $\operatorname{rang} b = \dim W - \dim V^\perp$. Det följer därför av sats 5.4.9 att de båda rangerna är lika. $\square$

Sats 5.4.14 *En bilinjär eller seskvilinjär forms rang är lika med rangen hos formens matris (med avseende på godtyckliga baser i vektorrummen).*

Bevis. Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en form på $V \times W$, låt B vara formens matris med avseende på koordinatavbildningarna ξ och η på V resp. W, och sätt $m = \dim V$ och $n = \dim W$. Matrisen B är alltså av typ $m \times n$. Vi får nu följande ekvivalenser

$$\begin{aligned} w \in V^\perp &\iff \langle v, w\rangle = 0 \text{ för alla } v \in V \iff \xi^t(v)B\eta(w) = 0 \text{ för alla } v \in V \\ &\iff x^t B\eta(w) = 0 \quad \text{för alla } x \in \mathbf{K}^m \iff B\eta(w) = 0 \\ &\iff \eta(w) \in \mathcal{N}(B). \end{aligned}$$

Delrummet $V^\perp$ är med andra ord isomorft med nollrummet $\mathcal{N}(B)$ till matrisen B, så det följer att

$$\dim V^\perp = \dim \mathcal{N}(B) = n - \operatorname{rang} B = \dim W - \operatorname{rang} B.$$

Matrisens rang, $\operatorname{rang} B$, är således lika med $\dim W - \dim V^\perp$, formens rang. $\square$

Övningar

5.11 Antag att $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är en bilinjär form på $V \times W$. För fixt $v \in V$ är då $\phi_v(w) = \langle v, w\rangle$ en linjär form på W, och man får en avbildning $J\colon V \to W'$ genom att sätta $Jv = \phi_v$.

a) Visa att avbildningen J är linjär.

b) Visa att J är injektiv om och endast om ${}^{\perp}W = \{0\}$.

c) Visa att J är en isomorfism om $\dim V = \dim W$ och ${}^{\perp}W = \{0\}$.

5.12 Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en icke-degenererad bilinjär form på ett ändligdimensionellt vektorrum V, och definiera för $T \in \mathcal{L}(V, V)$ en ny bilinjär form $b_T \in \mathcal{B}(V, V)$ genom att sätta $b_T(v, w) = \langle Tv, w\rangle$. Visa att avbildningen

$$\mathcal{L}(V, V) \to \mathcal{B}(V, V), \quad T \mapsto b_T$$

är en isomorfism. Varje bilinjär form b på V har med andra ord formen $b(v, w) = \langle Tv, w\rangle$ för någon entydigt bestämd linjär operator T.

5.5 Ortogonala baser

I det här avsnittet antar vi att alla vektorrum är ***ändligdimensionella***. Vi förutsätter vidare att skalärkroppen har karakteristik skild från 2, dvs. att $2 \neq 0$.

Definition 5.5.1 En bas $e_1, e_2, \dots, e_n$ för vektorrummet V kallas en *ortogonal bas* med avseende på en given symmetrisk bilinjär (eller hermitesk form) $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ om basvektorerna är parvis ortogonala, dvs. om $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ för alla $i \neq j$.

Matrisen för $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ med avseende på en ortogonal bas $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en diagonalmatris. Om ξ är motsvarande koordinatavbildning så är i det symmetriskt bilinjära fallet

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i(v)\xi_i(w) \qquad \text{och} \qquad \langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i(v)^2,$$

där $d_i = \langle e_i, e_i\rangle$. Vi uttrycker detta genom att säga att vi skrivit formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ och motsvarande kvadratiska form på *diagonalform*.

I det hermiteska fallet blir istället

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i(v)\overline{\xi_i(w)} \qquad \text{och} \qquad \langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i |\xi_i(v)|^2.$$

Följande två exempel illustrerar hur man konstruerar en diagonalform till en given kvadratisk form genom *kvadratkomplettering.*

Exempel 5.5.1 Vi skall bestämma en diagonalform till den kvadratiska formen

$$q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 11x_2^2 - 16x_2x_3 + 9x_3^2$$

på $\mathbf{R}^3$. Vi börjar med att samla ihop alla termer som innehåller x_1 och noterar att den erhållna delsumman kan skrivas

$$x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2,$$

dvs. som en kvadratterm plus en summa av termer som inte innehåller variabeln x_1. Därför är

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2 + 11x_2^2 - 16x_2x_3 + 9x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2. \end{aligned}$$

Summan $2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ är en kvadratisk form i variablerna x_2 och x_3, och i den samlar vi ihop de två termer som innehåller x_2. Den så erhållna delsumman uttrycker vi som en jämn kvadrat plus en term som inte innehåller variabeln x_2. Resultatet blir

$$2x_2^2 - 4x_2x_3 = 2(x_2^2 - 2x_2x_3) = 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Således är

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2 + 5x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

Med koordinatbytet

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

får vi $q(x) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$. □

Metoden i exemplet förutsätter att ursprungsformen innehåller kvadrattermer, så därför studerar vi nu också ett exempel utan sådana.

Exempel 5.5.2 För att diagonalisera den kvadratiska formen

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3$$

börjar vi med ett koordinatbyte som introducerar kvadrattermer. Sätt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

I de nya koordinaterna får q utseendet

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3.$$

Eftersom q nu innehåller kvadrattermer kan vi kvadratkomplettera och får då

$$\begin{aligned} q(x) &= (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 + 2y_2y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2. \end{aligned}$$

Koordinatbytet

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \qquad + y_3 \\ z_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ z_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

ger slutligen $q(x) = z_1^2 - z_2^2 + 0z_3^2$. □

Metoden i de två exemplen kan lätt generaliseras och vi har följande allmänna resultat.

Sats 5.5.2 *För varje symmetrisk bilinjär (resp. hermitesk) form på ett vektorrum V av dimension ≥ 1 finns det en ortogonal bas.*

Bevis. Vi börjar med att visa satsen för icke-degenererade former genom induktion över vektorrummets dimension.

I fallet $\dim V = 1$ finns det inget att visa, så antag att varje icke-degenererad form på ett $(n-1)$-dimensionellt rum har en ortogonal bas, och låt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ vara en icke-degenererad form på ett rum V av dimension n. Välj en vektor e_1 så att $\langle e_1, e_1 \rangle \neq 0$ och sätt $U = \operatorname{spn}\{e_1\}$. Det finns en sådan vektor, ty om $\langle v, v \rangle = 0$ för alla vektorer v, så är på grund av sats 5.2.2 (resp. sats 5.3.3) $\langle v, w \rangle = 0$ för alla vektorer v och w, vilket strider mot att formen är icke-degenererad.

Restriktionen av formen $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ till delrummet U är icke-degenererad. Enligt sats 5.4.11 är därför också restriktionen av $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ till det ortogonala komplementet $U^\perp$ icke-degenererad och $V = U \oplus U^\perp$. Eftersom $\dim U^\perp = n - 1$ följer det av induktionsantagandet att det finns en ortogonal bas e_2, e_3, …, e_n för $U^\perp$, och eftersom samtliga dessa vektorer är ortogonala mot e_1, är $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en ortogonal bas för V. Därmed är satsen visad för icke-degenererade former.

Om formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är degenererad betraktar vi den i lemma 5.4.8 angivna icke-degenererade formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle'$ på $V/V^\perp \times V/V^\perp$. Enligt den redan visade delen av satsen finns det vektorer $e_1, e_2, \ldots, e_m$ så att kvotelementen $[e_1]$, $[e_2]$, ..., $[e_m]$ bildar en ortogonal bas i $V/V^\perp$ med avseende på formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle'$, och eftersom $\langle v, w\rangle = \langle [v], [w]\rangle'$ är vektorerna $e_1, e_2, \ldots, e_m$ också ortogonala mot varandra och mot varje vektor i $V^\perp$ med avseende på formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Om $e_{m+1}, \ldots, e_n$ är en godtycklig bas i $V^\perp$, så är därför $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en ortogonal bas för V. $\square$

Sats 5.5.3 *Antag att $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är en ortogonal bas i vektorrummet V med avseende på en symmetrisk bilinjär (eller hermitesk) form $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, och sätt $d_i = \langle e_i, e_i\rangle$. Då är $V^\perp = \operatorname{spn}\{e_i \mid d_i = 0\}$. Formen är således icke-degenererad om och endast om alla diagonalkoefficienterna d_i är nollskilda.*

Bevis. En vektor $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ tillhör ${}^\perp V$ om och endast om $\langle v, e_i\rangle = \alpha_i\langle e_i, e_i\rangle = \alpha_i d_i = 0$ för alla i, dvs. om och endast om koordinaterna α_i svarande mot nollskilda diagonalkoefficienter d_i är noll. $\square$

Sats 5.5.2 kan också tolkas som följande resultat om diagonalisering av symmetriska matriser.

Sats 5.5.4 (a) *Om B är en symmetrisk matris, så finns det en inverterbar matris A och en diagonalmatris D så att $A^tBA = D$.*

(b) *Om H är en hermitesk matris, så finns det en inverterbar matris A och en diagonalmatris D så att $A^*HA = D$.*

Bevis. (a) Betrakta den symmetriska bilinjära formen $\langle x, y\rangle = x^tBy$ på $\mathbf{K}^n$. Enligt föregående sats har $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ en ortogonal bas. Låt ξ vara motsvarande koordinatavbildning, och låt A vara transformationsmatrisen vid övergång från koordinaterna ξ till de kanoniska koordinaterna på $\mathbf{K}^n$, dvs. $A\xi(x) = x$. Enligt sats 5.2.4 har den bilinjära formen matrisen A^tBA med avseende på den ortogonala basen, och denna matris är en diagonalmatris.

(b) följer på motsvarande sätt genom diagonalisering av den hermiteska formen $\langle z, w\rangle = z^tH\overline{w}$ på $\mathbf{C}^n$. $\square$

Övningar

5.13 Bestäm en koordinatavbildning som överför följande kvadratiska form på $\mathbf{R}^3$ till diagonalform och ange diagonalformen

a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 20x_2x_3$

b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$
c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

5.14 Bestäm en ortogonal bas till de kvadratiska formerna i övning 5.6.

5.6 Tröghetssatsen

I det här avsnittet skall vi specialstudera hermiteska former och symmetriska bilinjära former på *reella* vektorrum; vi skall bland annat skärpa resultatet i sats 5.5.2 för sådana former. Först några definitioner.

Definition 5.6.1 Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en hermitesk form på ett komplext vektorrum V eller en symmetrisk bilinjär form på ett reellt vektorrum V. Formen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ (och motsvarande kvadratiska form) kallas

- *positivt semidefinit* om $\langle v, v\rangle \geq 0$ för alla $v \in V$;
- *positivt definit* om $\langle v, v\rangle > 0$ för alla $v \neq 0$;
- *negativt semidefinit* resp. *negativt definit* om formen $-\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ är positivt semidefinit resp. positivt definit;
- *indefinit* om det finns vektorer v och w så att $\langle v, v\rangle > 0$ och $\langle w, w\rangle < 0$.

Varje positivt definit form är naturligtvis icke-degenererad.

Exempel 5.6.1 Den symmetriska bilinjära formen

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,dt$$

på $\mathcal{C}[0,1]$ är positivt definit, ty integralen $\int_0^1 t^2 f(t)^2\,dt$ är uppenbarligen alltid icke-negativ, och den är lika med noll endast om den kontinuerliga funktionen f^2 är noll överallt, dvs. endast om f är nollfunktionen. □

Definition 5.6.2 En symmetrisk reell matris Q kallas *positivt definit*, etc. om den symmetriska bilinjära form $\langle x, y\rangle = x^tQy$ på $\mathbf{R}^n$ är positivt definit, etc.

En hermitesk matris Q kallas *positivt definit*, etc. om den hermiteska formen $\langle z, w\rangle = z^tQ\overline{w}$ på $\mathbf{C}^n$ är positivt definit, etc.

Exempel 5.6.2 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

är positivt definit, ty $x^tQx = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$ för $x \neq 0$. □

Exempel 5.6.3 Om A är en godtycklig reell (resp. komplex) $m \times n$-matris, så är den symmetriska matrisen A^tA (resp. hermiteska matrisen A^*A) positivt semidefinit. Matrisen är vidare positivt definit om och endast om $\operatorname{rang} A = n$.

Bevis. Betrakta i det reella fallet motsvarande symmetriska bilinjära form $b(x, y) = x^t(A^tA)y$ på $\mathbf{R}^n$. Vi kan uttrycka b i termer av den positivt definita formen $b_0(x, y) = x^ty = \sum_{i=1}^m x_iy_i$ på $\mathbf{R}^m$, ty

$$b(x, y) = (Ax)^t(Ay) = b_0(Ax, Ay).$$

Det följer att $b(x, x) \geq 0$ för alla x, så formen b är positivt semidefinit. Vidare är $b(x, x) > 0$ för alla x som uppfyller $Ax \neq 0$. Formen b är därför positivt definit om och endast om $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, vilket gäller om och endast om $\operatorname{rang} A = n$.

Det komplexa fallet bevisas analogt genom att man utnyttjar sambandet mellan den hermiteska formen $h(z, w) = z^tA^*A\overline{w}$ på $\mathbf{C}^n$ och den positivt definita formen $h_0(z, w) = z^t\overline{w}$ på $\mathbf{C}^m$, som är att $h(z, w) = h_0(\overline{A}z, \overline{A}w)$. □

Nu till den utlovade skärpningen av sats 5.5.2.

Sats 5.6.3 *Om $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ är en symmetrisk bilinjär form på ett reellt eller en hermitesk form på ett komplext ändligdimensionellt vektorrum V, så finns det en ortogonal bas $f_1, f_2, \dots, f_n$ med egenskapen att $\langle f_i, f_i \rangle$ är lika med -1, 0 eller 1 för alla i.*

Bevis. Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara en ortogonal bas, sätt $d_i = \langle e_i, e_i \rangle$ och definiera

$$f_i = \begin{cases} 1/\sqrt{|d_i|}\, e_i, & \text{om } d_i \neq 0 \\ e_i, & \text{om } d_i = 0. \end{cases}$$

Då är $f_1, f_2, \dots, f_n$ en ortogonal bas, och $\langle f_i, f_i \rangle = 1$ om $d_i > 0$, $= -1$ om $d_i < 0$, och $= 0$ om $d_i = 0$. □

En symmetrisk bilinjär (resp. hermitesk) forms ortogonala bas är naturligtvis inte unik. Däremot är *antalet* positiva diagonalelement och antalet negativa diagonalelement entydigt bestämda av formen. Detta resultat går under namnet *tröghetssatsen.*

Sats 5.6.4 (Tröghetssatsen) *Låt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ vara en symmetrisk bilinjär (resp. hermitesk) form på ett reellt (resp. komplext) n-dimensionellt vektorrum V. Då finns det två tal p och q så att om $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en ortogonal bas, så är precis p stycken av talen $\langle e_i, e_i \rangle$ positiva och q stycken av talen negativa.*

Trippeln $(p, q, n-p-q)$ kallas formens (och motsvarande kvadratiska forms) *signatur.*

Bevis. Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ och $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vara två ortogonala baser och sätt $d_i = \langle e_i, e_i \rangle$ och $d'_i = \langle f_i, f_i \rangle$. Antalet positiva resp. negativa tal d_i betecknas p resp. q, och på motsvarande sätt betecknar p' och q' antalet positiva resp. negativa tal d'_i. Vi skall bevisa att $p = p'$ och $q = q'$ och kan då utan inskränkning anta att basvektorerna är numrerade så att $d_i > 0$ för $i \leq p$ och $d'_i > 0$ för $i \leq p'$.

Betrakta vektorerna e_1, …, e_p, $f_{p'+1}$,…,f_n. Vi skall visa att dessa är linjärt oberoende. Därav följer att $p + n - p' \leq n$, dvs. att $p \leq p'$. Av symmetriskäl är då också $p' \leq p$, dvs. $p = p'$. Detta visar att antalet positiva koefficienter är en invariant, och eftersom antalet negativa koefficienter till $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ är lika med antalet positiva till formen $-\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, måste även antalet negativa koefficienter vara invariant, dvs. $q = q'$.

Antag därför att

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \beta_{p'+1} f_{p'+1} + \cdots + \beta_n f_n = 0. \tag{1}$$

Då är

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = -\beta_{p'+1} f_{p'+1} - \cdots - \beta_n f_n,$$

varav följer att

$$\begin{aligned}&\langle \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p, \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \rangle \\ &\quad = \langle -\beta_{p'+1} f_{p'+1} - \cdots - \beta_n f_n, -\beta_{p'+1} f_{p'+1} - \cdots - \beta_n f_n \rangle,\end{aligned}$$

vilket efter förenkling ger

$$d_1 |\alpha_1|^2 + \cdots + d_p |\alpha_p|^2 = d'_{p'+1} |\beta_{p'+1}|^2 + \cdots + d'_n |\beta_n|^2.$$

Vänstra sidan är ≥ 0 och högra sidan är ≤ 0. Det följer att båda leden är lika med 0, vilket medför att $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ eftersom koefficienterna d_1, …, d_p är positiva. Ekvationen (1) reduceras därför till

$$\beta_{p'+1} f_{p'+1} + \cdots + \beta_n f_n = 0,$$

och det följer att också $\beta_{p'+1} = \cdots = \beta_n = 0$, eftersom vektorerna $f_{p'+1}$, …, f_n ingår i en bas. Därmed har vi bevisat att vektorerna e_1, …, e_p, $f_{p'+1}$,…,f_n är linjärt oberoende. □

En forms signatur innehåller givetvis information om huruvida formen är definit eller ej; följande resultat är en trivial konsekvens av definitionen av signatur.

Påstående 5.6.5 *En symmetrisk bilinjär (resp. hermitesk) form med signaturen (α, β, γ) är*

(a) *positivt semidefinit om och endast om* $\beta = 0$;

(b) *positivt definit om och endast om* $\beta = \gamma = 0$;

(c) *negativt semidefinit om och endast om* $\alpha = 0$;

(d) *negativt definit om och endast om* $\alpha = \gamma = 0$;

(e) *indefinit om och endast om* $\alpha > 0$ *och* $\beta > 0$.

Exempel 5.6.4 Den kvadratiska formen i exempel 5.5.1 har signaturen $(3, 0, 0)$ och är positivt definit, medan formen i exempel 5.5.2 har signaturen $(1, 1, 1)$ och är indefinit. □

Övningar

5.15 Bestäm signaturen för den kvadratiska formen

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

på $\mathbf{R}^3$ för olika värden på parametern a.

5.16 Bestäm signaturen för följande kvadratiska form på $\mathbf{R}^4$:

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Kapitel 6

Inre produktrum

Vektorrumsaxiomen tillåter oss strängt taget bara att bilda linjärkombinationer av vektorer. De geometriska begreppen *längd* och *vinkel* saknar mening i ett abstrakt vektorrum; för att införa dem krävs det mer struktur.

För konkreta vektorer i planet och rummet är längd- och vinkelbegreppen givna från början, och med hjälp av dem kan man definiera skalärprodukten $v \cdot w$ av två vektorer som $|v||w|\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna.

I allmänna reella eller komplexa vektorrum skall vi gå den motsatta vägen − vi skall börja med att definiera en skalärprodukt med vissa önskvärda egenskaper och kan sedan använda skalärprodukten för att *definiera* längd och vinkel. När det gäller vinkelbegreppet kommer vi dock endast att intressera oss för räta vinklar och ortogonalitet.

6.1 Inre produkt

Definition 6.1.1 Med en *skalärprodukt* eller *inre produkt* på ett *reellt* vektorrum V menas en positivt definit symmetrisk bilinjär form $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ på V.

En skalärprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ på V är med andra ord en reellvärd funktion på $V \times V$ som uppfyller:

(i_1) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w\rangle = \alpha_1\langle v_1, w\rangle + \alpha_2\langle v_2, w\rangle$

(i_2) $\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \alpha_1\langle v, w_1\rangle + \alpha_2\langle v, w_2\rangle$

(ii) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

(iii) $\langle v, v\rangle > 0$ för alla $v \neq 0$.

Egenskap (i_2) följer naturligtvis av egenskaperna (i_1) och (ii), så för att verifiera att en form $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ är en skalärprodukt räcker det att kontrollera att (i_1), (ii) och (iii) gäller.

EXEMPEL 6.1.1 Standardskalärprodukten $v \cdot w = |v||w| \cos\theta$ i det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet är naturligtvis en skalärprodukt även i den nya meningen. □

EXEMPEL 6.1.2 Vi får en skalärprodukt på vektorrummet $\mathcal{C}[a, b]$ av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ genom att sätta

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt.$$

Vi kallar den för *standardskalärprodukten på* $\mathcal{C}[a, b]$. □

EXEMPEL 6.1.3 *Standardskalärprodukten på* $\mathbf{R}^n$ definieras av sambandet

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Om x och y uppfattas som kolonnmatriser är $\langle x, y \rangle = x^t y = y^t x$. □

Observera att produkten av reella matriser kan uttryckas med hjälp av standardskalärprodukten; matriselementet på plats (i, k) i produkten AB är nämligen skalärprodukten $\langle A_{i*}, B_{*k} \rangle$ av den i:te raden i A och den k:te kolonnen i B.

EXEMPEL 6.1.4 Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum, och låt ξ vara en koordinatavbildning på V. Varje skalärprodukt på V har då enligt påstående 5.1.3 formen

$$\langle v, w \rangle = \xi(v)^t B \xi(w),$$

där B är en positivt definit symmetrisk $n \times n$-matris. □

Definition 6.1.2 Med en *skalärprodukt* eller *inre produkt* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ på ett *komplext* vektorrum V menas en positivt definit hermitesk form $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ på V, dvs. en komplexvärd funktion på $V \times V$ som uppfyller:

(i_1) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle$

(i_2) $\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \overline{\alpha}_1 \langle v, w_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle v, w_2 \rangle$

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

(iii) $\langle v, v \rangle > 0$ för alla $v \neq 0$.

Även i detta fall följer naturligtvis egenskap (i_2) av egenskaperna (i_1) och (ii). Observera vidare att (ii) garanterar att skalärprodukten $\langle v, v \rangle$ är reell för alla vektorer v, något som är nödvändigt för att (iii) skall vara meningsfullt.

Exempel 6.1.5 Den s. k. *standardskalärprodukten* på $\mathbf{C}^n$ definieras av att

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i.$$

Om z och w uppfattas som kolonnmatriser är $\langle z, w\rangle = \overline{w}^t z = w^* z$. □

Definition 6.1.3 Ett reellt eller komplext vektorrum V som är försett med en inre produkt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, kallas ett *inre produktrum.*

Om rummet är ändligdimensionellt kallas det också ett *euklidiskt rum* i det reella fallet och ett *unitärt rum* i det komplexa fallet.

Exempel 6.1.6 $\mathbf{R}^n$ med standardskalärprodukten är ett euklidiskt rum, och $\mathbf{C}^n$ med standardskalärprodukten är ett unitärt rum. Rummet $\mathcal{C}[a, b]$ av reellvärda funktioner med standardskalärprodukten är reellt inre produktrum.

När vi i fortsättningen talar om $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ och $\mathcal{C}[a, b]$ som inre produktrum (utan att ange skalärprodukten) är det alltid standardskalärprodukten i resp. rum som avses. □

Definition 6.1.4 *Normen* eller *längden* $\|v\|$ av en vektor v i ett inre produktrum definieras som

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Definitionen möjliggörs av villkoret (iii) i skalärproduktsdefinitionen, som garanterar att $\langle v, v\rangle$ är icke-negativt. Normens kvadrat $\|\cdot\|^2$ är förstås den till skalärprodukten $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ hörande kvadratiska formen.

Exempel 6.1.7 Standardskalärprodukterna i $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ och $\mathcal{C}[a, b]$ ger upphov till normerna

$$\|x\| = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \quad \|z\| = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}} \quad \text{resp.} \quad \|f\| = \Bigl(\int_a^b f(t)^2\,dt\Bigr)^{\frac{1}{2}}.$$ □

Följande normegenskaper följer omedelbart ur normdefinitionen.

Påstående 6.1.5 *För alla vektorer v och alla skalärer α är*

(i) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$

(ii) $\|v\| \geq 0$ *med likhet om och endast om $v = 0$.*

Skalärprodukten kan rekonstrueras ur normen. Vi har nämligen följande identiteter, som uttrycker skalärprodukten med hjälp av normen.

Sats 6.1.6 *Låt V vara ett inre produktrum med skalärprodukt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ och norm $\|\cdot\|$, och låt v och w vara två godtyckliga vektorer i V.*

(a) *I det reella fallet är*

$$4\langle v, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2.$$

(b) *I det komplexa fallet är istället*

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle &= \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \\ 4\,\mathrm{Im}\,\langle v, w\rangle &= \|v + \mathrm{i}w\|^2 - \|v - \mathrm{i}w\|^2. \end{aligned}$$

Bevis. Identiteterna är specialfall av satserna 5.2.2 och 5.3.3, men vi upprepar ändå beviset. Genom att utveckla normen i kvadrat får vi i det reella fallet

$$\begin{aligned} (1) \qquad \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \end{aligned}$$

och analogt

$$(2) \qquad \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2,$$

och identiteten (a) följer nu genom subtraktion.

I det komplexa fallet får vi istället

$$\begin{aligned} (1') \qquad \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \end{aligned}$$

och

$$(2') \qquad \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2.$$

Subtraktion ger den första identiteten i (b).

Eftersom $\langle v, \mathrm{i}w\rangle = -\mathrm{i}\langle v, w\rangle$, är vidare $\mathrm{Im}\,\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}\,\langle v, \mathrm{i}w\rangle$. Den andra av identiterna i (b) följer därför ur den första om w bytes mot $\mathrm{i}w$. □

I en parallellogram är summan av kvadraterna på diagonalerna lika med summan av kvadraterna på de fyra sidorna. Följande identitet generaliserar denna geometriska sats och brukar därför kallas parallellogramlagen.

Sats 6.1.7 (Parallellogramlagen) *I inre produktrum gäller identiteten*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Bevis. Addera de båda identiterna (1) och (2) resp. (1′) och (2′). □

I det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet är det trivialt att skalärprodukten uppfyller olikheten $|\langle v,w\rangle| = |v\cdot w| \leq \|v\|\|w\|$. Vi skall nu se att denna olikhet gäller generellt.

Sats 6.1.8 (Cauchy–Schwarz olikhet) *För alla vektorer v, w i ett inre produktrum V gäller olikheten*

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|,$$

och likhet råder om och endast om $v = 0$ eller $w = \lambda v$ för någon skalär λ.

Bevis. Att likhet råder om vektorerna är linjärt beroende, dvs. om $v = 0$ eller $w = \lambda v$ för någon skalär λ, är trivialt. Antag därför att vektorerna v och w är linjärt oberoende; vi skall visa att Cauchy–Schwarz olikhet då är uppfylld med strikt olikhet.

Sätt för den skull $f(t) = \|tv + w\|^2$. Eftersom $tv + w \neq 0$ är $f(t) > 0$ för alla skalärer t.

I det reella fallet är

$$\begin{aligned} f(t) &= \|tv\|^2 + 2\langle tv,w\rangle + \|w\|^2 = t^2\|v\|^2 + 2t\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \big(t\|v\| + \langle v,w\rangle/\|v\|\big)^2 + \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2/\|v\|^2. \end{aligned}$$

För $t_0 = -\langle v,w\rangle/\|v\|^2$ är därför $f(t_0) = \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2/\|v\|^2$, och eftersom $f(t_0) > 0$ följer det att $\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2/\|v\|^2 > 0$, vilket förstås är ekvivalent med Cauchy–Schwarz olikhet.

I det komplexa fallet utnyttjar vi istället identiteten

$$f(t) = |t|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t\langle v,w\rangle) + \|w\|^2.$$

För $t_0 = -\overline{\langle v,w\rangle}/\|v\|^2$ är $f(t_0) = \|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2/\|v\|^2$, och vi kan på nytt dra slutsatsen att $\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2/\|v\|^2 > 0$. □

Exempel 6.1.8 Cauchy–Schwarz olikhet tillämpad på standardskalärprodukten i rummet $\mathcal{C}[a,b]$ ger olikheten

$$\Big|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\Big| \leq \Big(\int_a^b f(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_a^b g(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

och samma olikhet tillämpad på standardskalärprodukten i $\mathbf{C}^n$ visar att

$$\Big|\sum_{i=1}^n z_i\overline{w}_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

för alla komplexa tal $z_1, z_2, \ldots, z_n$ och $w_1, w_2, \ldots, w_n$. □

En viktig konsekvens av Cauchy–Schwarz olikhet är triangelolikheten:

Sats 6.1.9 (Triangelolikheten) *För normen i ett inre produktrum gäller olikheten*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Likhet råder om och endast om en av vektorerna är en icke-negativ multipel av den andra.

Bevis. Genom att utnyttja triangelolikheten för reella (resp. komplexa) tal och Cauchy–Schwarz olikhet får vi olikheten

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v\rangle + \langle v + w, w\rangle \leq |\langle v + w, v\rangle| + |\langle v + w, w\rangle| \\ &\leq \|v + w\|\,\|v\| + \|v + w\|\,\|w\| = \|v + w\|(\|v\| + \|w\|).\end{aligned}$$

Om $v + w = 0$ finns det förstås ingenting att visa, och om $v + w \neq 0$ kan vi dividera olikheten ovan med $\|v + w\|$, vilket resulterar i triangelolikheten. Påståendet om när likhet råder lämnas som övning. □

EXEMPEL 6.1.9 För den euklidiska standardnormen på $\mathbf{R}^n$ innebär triangelolikheten att

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

EXEMPEL 6.1.10 För oändliga följder $x = (x_i)_1^\infty$ av reella tal x_i sätter vi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vi definierar ℓ^2 (uttalas *lilla l-två*) som mängden av alla följder x som uppfyller $\|x\|_2 < \infty$. Vi skall visa att ℓ^2 är ett euklidiskt rum under skalärprodukten

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i. \tag{3}$$

För att inse att ℓ^2 är ett vektorrum räcker det, eftersom ℓ^2 är en delmängd av vektorrummet av alla följder, att visa att ℓ^2 är slutet under addition och multiplikation med skalärer. Låt därför x och y vara två följder i ℓ^2. Av triangelolikheten för standardnormen på $\mathbf{R}^n$ får vi

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_2 + \|y\|_2.\end{aligned}$$

Då detta gäller för varje n, kan vi dra slutsatsen att summorna $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2$ är uppåt begränsade av talet $(\|x\|_2+\|y\|_2)^2$. Serien $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2$ är därför konvergent, dvs.

$$\|x+y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Detta innebär att summan $x+y$ tillhör ℓ^2. Att αx tillhör ℓ^2 för alla reella tal α är trivialt. Rummet ℓ^2 är således slutet under addition och multiplikation med skalärer.

Det återstår att visa att (3) definierar en skalärprodukt. Vi konstaterar då först att högerledet är ändligt för alla vektorer x och y i ℓ^2. Cauchy–Schwarz olikhet för standardskalärprodukten i $\mathbf{R}^n$ ger nämligen

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|x\|_2\|y\|_2$$

för alla n, varav följer att serien $\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$ är absolutkonvergent. Det är nu enkelt att verifiera att (3) har de egenskaper (i) – (iii) som krävs av en skalärprodukt. Observera slutligen att $\|\cdot\|_2$ är den norm som hör till skalärprodukten. □

Det är triangelolikheten och egenskaperna i påstående 6.1.5 som rättfärdigar att vi kallar $\|\cdot\|$ en norm. Begreppet norm är nämligen mycket allmännare.

Definition 6.1.10 En funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbf{R}$ på ett reellt eller komplext vektorrum V kallas en *norm* om

(i) $\|v\| > 0$ för alla vektorer $v \neq 0$.

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$ för alla vektorer $v \in V$ och alla skalärer α.

(iii) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Låt oss kalla en norm $\|\cdot\|$ på ett vektorrum V för en *inre produktnorm* om den kommer från någon inre produkt, dvs. om det finns en inre produkt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ på V sådan att $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. En naturlig fråga är om man kan ”se” på en norm att den är en inre produkt-norm. Enligt sats 6.1.7 måste en inre produkt-norm uppfylla parallellogramlagen; detta villkor är också tillräckligt för att en norm skall vara en inre produkt-norm.

Sats 6.1.11 *En norm $\|\cdot\|$ på ett vektorrum V är en inre produktnorm om och endast om identiteten i parallellogramlagen gäller för normen.*

Bevis. Se övning 6.15. □

Exempel på normer som inte är inre produktnormer finns i övningarna 6.11 och 6.12.

Övningar

6.1 Verifiera i detalj att formen i exempel 6.1.2 är en skalärprodukt.

6.2 Är $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} t f(t)g(t)\, dt$ en skalärprodukt på $\mathcal{C}[-1,1]$?

6.3 Är $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)\, dt$ en skalärprodukt på $\mathcal{C}[-1,1]$?

6.4 Beräkna $\langle f, g\rangle$ för standardskalärprodukten på rummet $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, då

a) $f(t) = t$, $g(t) = t^2$ b) $f(t) = t$, $g(t) = \sin t$
c) $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$

6.5 För vilka värden på konstanterna a och b är

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$$

en skalärprodukt på $\mathbf{R}^2$?

6.6 Vilka av följande former på $\mathcal{P}_2$, rummet av alla polynom av grad högst lika med 2, är skalärprodukter?
a) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0)$
b) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$
c) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$

6.7 Beräkna $\langle t + 1, t^2 + t\rangle$ för var och en av skalärprodukterna i föregående övning.

6.8 Beräkna normen av vektorn $(3, 4)$ med avseende på

a) standardnormen på $\mathbf{R}^2$,
b) den norm som fås av skalärprodukten $\langle x, y\rangle = x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2$ på $\mathbf{R}^2$.

6.9 Beräkna normen av funktionen e^t med avseende på

a) standardnormen på $\mathcal{C}[-1,1]$,
b) den norm som fås av skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t} f(t)g(t)\, dt$.

6.10 I ett euklidiskt rum är $\|v\| = 3$, $\|w\| = 6$ och $\|v + w\| = 5$. Beräkna skalärprodukten $\langle v, w\rangle$.

6.11 Sätt $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ för $x = (x_1, x_2)$ i $\mathbf{R}^2$. Visa att detta är en norm på $\mathbf{R}^2$ men att det inte finns någon skalärprodukt på $\mathbf{R}^2$ som uppfyller $\langle x, x\rangle = \|x\|_1^2$.
[Ledning: Visa att parallellogramlagen inte gäller för $\|\cdot\|_1$.]

6.12 För kontinuerliga funktioner f på intervallet $[0,1]$ definierar vi $\|f\|_{\max}$ som maximum av $|f(t)|$ på intervallet. Visa att detta är en norm på rummet $\mathcal{C}[0,1]$ men att det inte finns någon skalärprodukt som uppfyller $\langle f, f\rangle = \|f\|^2_{\max}$.

6.13 Bestäm maximum av $2x - y + 4z$ då

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ b) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

[Ledning: Uppfatta $2x - y + 4z$ som en lämplig skalärprodukt och tillämpa Cauchy–Schwarz olikhet.]

6.14 Bestäm normen av vektorn $(2^{-i})_1^\infty$ i ℓ^2.

6.15 Låt $\|\cdot\|$ vara en norm på ett vektorrum V och antag att denna norm uppfyller parallellogramlagen. Visa att normen är en inre produktnorm i det reella fallet genom att *definiera* $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ och bevisa att detta är en inre produkt på V med egenskapen $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.
[Ledning: Visa detta i följande steg:

(a) $\|u + v + w\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u + w\|^2 + \|v + w\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$.
(Detta är den trickigaste delen.)
(b) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
(c) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.
(d) $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ för alla heltal n.
(Använd (b) och induktion.)
(e) $\langle rv, w\rangle = r\langle v, w\rangle$ för alla rationella tal r.
(f) $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$.
(g) $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$ för alla reella tal α.
(Välj en rationell följd av tal $(r_n)_1^\infty$ som konvergerar mot α samt utnyttja (e) och (f).)]

6.2 Ortogonalitet

I kapitel 5.4 definierade vi ortogonalitet med avseende på symmetriska bilinjära former och hermiteska former. När vi talar om ortogonalitet i ett inre produktrum, så avser vi förstås ortogonalitet med avseende på den speciella inre produkten i rummet.

Definition 6.2.1 Två vektorer v och w i ett inre produktrum V säges vara *ortogonala* mot varandra, vilket skrives $v \perp w$, om $\langle v, w\rangle = 0$. En följd (eller mängd) A av vektorer i ett inre produktrum kallas *ortogonal* om vektorerna i A är parvis ortogonala. Om dessutom samtliga vektorer i A har norm 1, kallas följden (eller mängden) A *ortonormerad*.

Speciellt kallar vi alltså en bas i ett inre produktrum för en *ortogonal bas* om basens vektorer är parvis ortogonala. Om dessutom alla basvektorerna har norm 1, säger vi att basen är *ortonormerad* eller en *ON-bas*.

En bas $e_1, e_2, \dots, e_n$ för ett n-dimensionellt inre produktrum är med andra ord en ON-bas om och endast om

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ 1 & \text{om } i = j. \end{cases}$$

Varje ortogonal bas kan naturligtvis lätt göras till en ON-bas; det är bara att ersätta varje vektor v i basen med den normerade vektorn $v/\|v\|$.

Exempel 6.2.1 De två vektorerna $(1, 2, 1)$ och $(3, -2, 1)$ i $\mathbf{R}^3$ är ortogonala mot varandra. □

Exempel 6.2.2 Standardbasen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ i $\mathbf{R}^n$ är en ON-bas. □

Exempel 6.2.3 I rummet $\mathcal{C}[-1, 1]$ bildar polynomen $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 3t^2 - 1$ och $p_3(t) = 5t^3 - 3t$ en ortogonal följd. För att verifiera detta måste vi visa att

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_i(t) p_j(t)\, dt = 0$$

för $0 \leq i < j \leq 3$. Observera att polynomen p_0 och p_2 är jämna medan p_1 och p_3 är udda. Produkten $p_i p_j$ är därför ett udda polynom om $i + j$ är udda, och eftersom integrationsintervallet är symmetriskt följer det att $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ för dessa värden på i och j. Det återstår därför endast att verifiera att

$$\langle p_0, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 3t^2 - 1\, dt = \big[t^3 - t\big]_{-1}^{1} = 0 \qquad \text{och}$$

$$\langle p_1, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} 5t^4 - 3t^2\, dt = \big[t^5 - t^3\big]_{-1}^{1} = 0.$$ □

Om v_1 och v_2 är två vinkelräta vektorer i planet, så representerar vektorerna v_1, v_2 och $v_1 + v_2$ de båda kateterna och hypotenusan i en rätvinklig triangel, så det följer av Pythagoras sats att $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$. Detta är ett specialfall av följande allmänna resultat.

Sats 6.2.2 (Pythagoras sats) *Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är en ortogonal följd i ett inre produktrum, så är*

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

Bevis. Påståendet gäller för $n = 2$, ty

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_1\rangle + \|v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.$$

Om vektorn v_1 är ortogonal mot var och en av vektorerna $v_2, \dots, v_n$, så är v_1 också ortogonal mot summan $v_2 + \cdots + v_n$, och det följer av det redan visade fallet att

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2 + \cdots + v_n\|^2.$$

Det allmänna fallet följer därför med induktion. □

Sats 6.2.3 *I ett inre produktrum är varje ortogonal mängd av nollskilda vektorer linjärt oberoende.*

Bevis. Det räcker att visa att varje ändlig ortogonal följd $v_1, v_2, \dots, v_n$ av nollskilda vektorer är linjärt oberoende. Antag därför att

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned} 0 = \|0\|^2 &= \|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\|^2 \\ &= |\lambda_1|^2\|v_1\|^2 + |\lambda_2|^2\|v_2\|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2\|v_n\|^2, \end{aligned}$$

varav följer att $\lambda_i = 0$ för alla i. Detta visar att följden är linjärt oberoende. □

Korollarium 6.2.4 *En ortogonal följd av nollskilda vektorer i ett n-dimensionellt inre produktrum innehåller högst n stycken vektorer, och varje ortogonal följd av n stycken nollskilda vektorer är en bas.*

Bevis. Kombinera satsen ovan med sats 3.7.7. □

Sats 6.2.5 *Varje ändligdimensionellt inre produktrum har en ortonormerad bas.*

Bevis. Satsen är förstås ett specialfall av sats 5.5.2, som säger att varje symmetrisk bilinjär form och varje hermitesk form har en ortogonal bas. Ett alternativ bevis för satsen kommer också att ges längre fram (se korollarium 6.3.9). □

Anmärkning. För oändligdimensionella inre produktrum är situationen annorlunda; vissa rum som $\mathcal{P}$ med skalärprodukten

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

har en ON-bas (se exempel 6.3.7), medan andra rum saknar. Begreppet ON-bas är således inte ”rätt” begrepp för oändligdimensionella inre produktrum. Rätt begrepp är istället begreppet *fullständigt ortonormerat system*. En systematisk diskussion av detta begrepp faller utanför ramen för den här framställningen, men vi kan illustrera det med ett exempel.

Exempel 6.2.4 Betrakta rummet ℓ^2, som definierades i exempel 6.1.10 och består av alla reella följder $x = (x_i)_1^\infty$ med $\|x\|_2^2 = \sum_i x_i^2 < \infty$ och skalärprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$.

Definiera $\mathbf{e}_i$ som den oändliga följd vars i:te element är 1 och alla övriga element är 0. Det är då klart att $A = (\mathbf{e}_i)_{i=1}^\infty$ är en oändlig ortonormerad följd av vektorer i ℓ^2. Följden är vidare maximal i den bemärkelsen att om x är en vektor som är ortogonal mot alla element i A så är $x = 0$. Av $x \perp A$ följer nämligen att $x_i = \langle x, \mathbf{e}_i\rangle = 0$ för alla i. Den ortonormerade mängden A kan således inte utvidgas till någon större ortonormerad mängd.

A spänner emellertid inte upp rummet ℓ^2 och är således inte en bas. För varje ändlig(!) linjärkombination x av vektorer ur A är nämligen $x_i = 0$ för alla i som är större än något index i_0, och exempelvis $(2^{-i})_1^\infty$ är ett element i ℓ^2 som inte har denna form.

Däremot gäller för varje x i ℓ^2 att

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i\|_2^2 &= \lim_{n\to\infty} \|(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_2^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^\infty x_i^2 = 0.\end{aligned}$$

Varje vektor x i ℓ^2 kan således approximeras med godtycklig noggranhet av (ändliga) linjärkombinationer av vektorer i den ortonormerade följden A. En ortonormerad följd eller mängd med denna egenskap kallas ett fullständigt ON-system. De fullständiga ON-systemen spelar samma roll i oändligtdimensionella inre produktrum som ON-baserna i ändligdimensionella. □

I inre produktrum kan en vektors koordinater med avseende på en given ON-bas uttryckas med hjälp av skalärprodukten:

Sats 6.2.6 *Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en ON-bas för rummet V. För varje vektor $v \in V$ är*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i,$$

dvs. $\langle v, e_i\rangle$ är den i:te koordinaten för vektorn v med avseende på den givna basen.

Bevis. Vi kan skriva v som en linjärkombination $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ av basvektorerna. Genom att ta skalärprodukten med basvektorn e_k och utnyttja ortogonalitetsegenskaperna erhåller vi

$$\langle v, e_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_k \rangle = \lambda_k,$$

vilket bevisar satsen. □

Skalärprodukten av två vektorer kan på ett enkelt sätt uttryckas med hjälp av vektorernas koordinater om basen är ortonormerad.

Sats 6.2.7 *Låt V vara ett inre produktrum med ON-bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ och låt ξ vara motsvarande koordinatavbildning. Då är*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(v)\overline{\xi_i(w)} \qquad \textit{och} \qquad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i(v)|^2.$$

(I det euklidiska fallet behövs naturligtvis inget konjugeringsstreck.)

Bevis.

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum_i \xi_i(v) e_i, \sum_j \xi_j(w) e_j \rangle = \sum_{i,j} \xi_i(v)\overline{\xi_j(w)} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i \xi_i(v)\overline{\xi_i(w)},$$

och den andra identiteten följer förstås av att $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. □

Övningar

6.16 Bestäm en skalärprodukt på $\mathbf{R}^2$ så att vektorerna $(1, 1)$ och $(2, 1)$ bildar en ON-bas. Bestäm också normen av vektorerna $(1, 0)$ och $(0, 1)$ med avseende på den erhållna skalärprodukten.

6.17 Bestäm en ON-bas för $\mathbf{R}^2$ med avseende på skalärprodukten

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

6.18 Verifiera att $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ och $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ är en ON-bas för $\mathbf{R}^3$ med avseende på standardskalärprodukten.

6.19 Komplettera vektorn $(\cos\theta, \sin\theta)$ i $\mathbf{R}^2$ med en vektor till en ON-bas.

6.3 Ortogonala projektioner

Följande definition och åtskilliga resultat i det här avsnittet är specialfall av motsvarande definition och resultat i avsnitt 5.4.

Definition 6.3.1 Låt A vara en icke-tom delmängd av ett inre produktrum V. Mängden av alla vektorer i V som är ortogonala mot A kallas det *ortogonala komplementet* till A och betecknas $A^\perp$. Vi har med andra ord

$$A^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \quad \text{för alla } w \in A\}.$$

Uppenbarligen är $\{0\}^\perp = V$ och $V^\perp = \{0\}$.

EXEMPEL 6.3.1 De ortogonala komplementen till mängderna $A = \{(1, 2, 3)\}$ och $B = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ i $\mathbf{R}^3$ (med standardskalärprodukten) är

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\} \quad \text{och} \\ B^\perp &= \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \text{ och } 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Geometriskt svarar förstås $A^\perp$ mot planet genom origo med $(1, 2, 3)$ som normalvektor, medan $B^\perp$ är den linje genom origo som är vinkelrät mot de båda vektorerna i B. □

EXEMPEL 6.3.2 Låt $A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}\}$ vara en godtycklig delmängd av $\mathbf{R}^n$. Om vi uppfattar vektorerna i A som rader i en $m \times n$-matris C, så är det ortogonala komplementet $A^\perp$ lika med matrisens nollrum, dvs. $A^\perp = \mathcal{N}(C) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Cx = 0\}$. □

Påstående 6.3.2 *Låt A och B vara delmängder av ett inre produktrum V.*

(a) *Ortogonala komplementet $A^\perp$ är ett linjärt delrum av V.*

(b) $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$.

(c) $A^\perp = (\operatorname{spn} A)^\perp$.

(d) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Bevis. (a) Uppenbarligen gäller att $0 \in A^\perp$, så det ortogonala komplementet är inte tomt. Om v_1, $v_2 \in A^\perp$ och $w \in A$, så är

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w\rangle = \alpha_1\langle v_1, w\rangle + \alpha_2\langle v_2, w\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0,$$

och det följer att $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in A^\perp$. Detta visar att $A^\perp$ är ett linjärt delrum.

(b) är trivialt.

(c) Linearitetsegenskaperna hos skalärprodukten medför att en vektor v, som är ortogonal mot vektorerna $w_1, w_2, \dots, w_n$, också är ortogonal mot varje linjärkombination $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n$. Detta visar att $A^\perp \subseteq (\operatorname{spn} A)^\perp$, och den omvända inklusionen följer av (b), eftersom $A \subseteq \operatorname{spn} A$.

(d) Varje vektor i A är ortogonal mot varje vektor i $A^\perp$ och ligger därför per definition också i det ortogonala komplementet $(A^\perp)^\perp$ til $A^\perp$. □

Definition 6.3.3 Två delrum W_1 och W_2 av ett inre produktrum V säges vara *ortogonala* mot varandra, om varje vektor i W_1 är ortogonal mot varje vektor i W_2, dvs. om $\langle w_1, w_2\rangle = 0$ för alla $w_1 \in W_1$ och $w_2 \in W_2$.

En familj $\{W_j \mid j \in J\}$ av delrum kallas *ortogonal*, om delrummen i familjen är parvis ortogonala mot varandra.

Sats 6.3.4 *Varje ortogonal familj $\{W_j\}$ av delrum är linjärt oberoende.*

Bevis. Antag att $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 0$, där vektorerna w_j för olika index j tillhör olika delrum W_j. Vektorerna är då parvis ortogonala, så Pythagoras sats (sats 6.2.2) ger att $0 = \|0\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 \cdots + \|w_m\|^2$, varav följer att $w_j = 0$ för $j = 1, 2, \ldots, m$. □

Summan av en ortogonal familj av delrum är därför direkt; vi kallar den en *ortogonal direkt summa.*

Speciellt är förstås $W \oplus W^\perp$ en direkt summa för varje delrum W av V, och en naturlig följdfråga blir då om $W \oplus W^\perp = V$. Detta gäller inte generellt (se exempel 6.3.4), men för ändligdimensionella delrum W är svaret ja.

Sats 6.3.5 *Antag att W är ett ändligdimensionellt delrum av inre produktrummet V. Då är*

$$V = W \oplus W^\perp,$$

dvs. för varje vektor v i V finns det en unik vektor $Pv \in W$ och en unik vektor $Qv \in W^\perp$ så att

$$v = Pv + Qv.$$

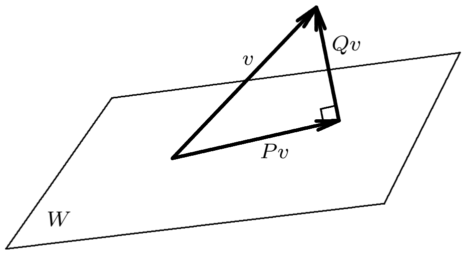
Om $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är en ON-bas för W, så är

$$Pv = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Vektorn Pv är den vektor i W som minimerar normen av $v - w$ då w genomlöper W, dvs. $\|v - Pv\| \le \|v - w\|$ för alla $w \in W$, med sträng olikhet om $w \ne Pv$.

Bevis. Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en ON-bas för W. För att visa att $V = W \oplus W^\perp$ räcker det att visa att varje $v \in V$ har en uppdelning $v = Pv + Qv$ med $Pv \in W$ och $Qv \in W^\perp$. *Definiera* därför Pv och Qv genom att sätta

$$Pv = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i \qquad \text{och} \qquad Qv = v - Pv.$$



Figur 6.1.

Då gäller trivialt att $Pv \in W$ och $v = Pv + Qv$, så det återstår bara att visa att $Qv \in W^{\perp}$. Men $\langle Pv, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle v, e_i\rangle\langle e_i, e_k\rangle = \langle v, e_k\rangle$, vilket medför att $\langle Qv, e_k\rangle = 0$ för $k = 1, 2, \ldots, n$. Vektorn Qv är med andra ord ortogonal mot alla basvektorerna i W och därmed mot W, dvs. $Qv \in W^{\perp}$.

Att avbildningen P är linjär följer omedelbart av dess definition, och eftersom $Q = I - P$, är också Q linjär.

För att visa påståendet om minsta längd låter vi w vara en godtycklig vektor i W. Eftersom $Pv - w \in W$ och $Qv \in W^{\perp}$, är $Qv \perp (Pv - w)$. Pythagoras sats ger därför

$$\|v - w\|^2 = \|Qv + (Pv - w)\|^2 = \|Qv\|^2 + \|Pv - w\|^2 \geq \|Qv\|^2 = \|v - Pv\|^2,$$

med likhet om och endast om $Pv - w = 0$. Detta visar att minimum antas för $w = Pv$ och endast för denna vektor. □

Definition 6.3.6 De linjära avbildningarna P och Q i sats 6.3.5 är projektioner på delrummen W resp. $W^{\perp}$, och eftersom delrummen är ortogonala kallar vi projektionerna *ortogonala projektioner.*

EXEMPEL 6.3.3 Låt f vara funktionen

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Vi skall bestämma det polynom av grad högst 3 som bäst approximerar f med avseende på den euklidiska normen i rummet $\mathcal{C}[-1, 1]$. I exempel 6.2.3 visade vi att polynomen $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 3t^2 - 1$ och $p_3(t) = 5t^3 - 3t$ utgör en ortogonal följd i $\mathcal{C}[-1, 1]$, så om vi normaliserar dem får vi en ON-bas för delrummet $\mathcal{P}_3$ av $\mathcal{C}[-1, 1]$. Enligt sats 6.3.5 är därför

$$Pf = \sum_{i=0}^{3}\langle f, \frac{p_i}{\|p_i\|}\rangle \frac{p_i}{\|p_i\|} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle f, p_i\rangle}{\|p_i\|^2}\, p_i$$

det sökta polynomet. Eftersom f är en jämn funktion medan p_1 och p_3 är udda, blir $\langle f, p_1\rangle = \langle f, p_3\rangle = 0$. I övrigt får vi

$$\langle f, p_0\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \langle f, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3t^2-1}{t^2+1}\,dt = 6-2\pi,$$
$$\|p_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2, \quad \text{och} \quad \|p_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (3t^2-1)^2\,dt = \frac{8}{5}.$$

Det polynom som bäst approximerar f i den angivna bemärkelsen är således polynomet

$$Pf = \frac{\pi/2}{2}\,p_0 + \frac{6-2\pi}{8/5}\,p_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{15-5\pi}{4}(3t^2-1) = \frac{45-15\pi}{4}t^2 + \frac{6\pi-15}{4}.$$

□

Nästa exempel visar att slutsatserna i sats 6.3.5 inte behöver gälla om delrummet W är oändligdimensionellt.

Exempel 6.3.4 Betrakta i ℓ^2 delrummet W bestående av alla följder $(x_i)_1^\infty$ med $x_i = 0$ för alla utom ändligt många index i. Delrummet W spänns upp av de speciella följderna $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, som har en etta på plats i och nollor på övriga platser.

För en godtycklig följd $y = (y_i)_1^\infty \in \ell^2$ gäller att $y \perp W$ om och endast om $y_i = \langle y, \mathbf{e}_i\rangle = 0$ för alla i, dvs. om och endast om $y = 0$, och detta innebär att $W^\perp = \{0\}$. Följaktligen är $W \oplus W^\perp = W \neq \ell^2$. □

Sats 6.3.5 ger en explicit formel för den ortogonala projektionen P på ett delrum W med hjälp av en ON-bas för W. Nästa sats beskriver hur man uttrycker projektionen i termer av en godtycklig bas eller godtycklig ändlig mängd av generatorer för W.

Sats 6.3.7 *Låt W vara ett ändligdimensionellt delrum av ett inre produktrum V, och antag att vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_n$ spänner upp W. Låt P beteckna den ortogonala projektionen på W, och låt v vara en godtycklig vektor i V. Då är $Pv = \sum_{i=1}^n x_i f_i$, där $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ är en lösning till ekvationssystemet*

$$\begin{cases} \langle f_1, f_1\rangle x_1 + \langle f_2, f_1\rangle x_2 + \cdots + \langle f_n, f_1\rangle x_n = \langle v, f_1\rangle \\ \langle f_1, f_2\rangle x_1 + \langle f_2, f_2\rangle x_2 + \cdots + \langle f_n, f_2\rangle x_n = \langle v, f_2\rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle f_1, f_n\rangle x_1 + \langle f_2, f_n\rangle x_2 + \cdots + \langle f_n, f_n\rangle x_n = \langle v, f_n\rangle. \end{cases}$$

Ekvationssystemet har entydig lösning om vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_n$ är linjärt oberoende.

Bevis. Projektionen Pv är förstås en linjärkombination av vektorerna f_1, f_2, ..., f_n, så $Pv = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. Det följer av sats 6.3.5 att vektorn Pv är entydigt bestämd av villkoret att vektorn $v - Pv$ skall vara ortogonal mot W, dvs. mot alla vektorerna i följden $f_1, f_2, \dots, f_n$. Ekvationssystemet i satsen uttrycker precis detta, nämligen att

$$\langle v - Pv, f_k\rangle = \langle v, f_k\rangle - \sum_{i=1}^n x_i\langle f_i, f_k\rangle = 0$$

för $k = 1, 2, \dots, n$.

Om $f_1, f_2, \dots, f_n$ är en bas för W, är förstås lösningen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ entydigt bestämd, eftersom $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i detta fall är koordinaterna för vektorn Pv med avseende på den givna basen. □

Exempel 6.3.5 Låt W vara det delrum av $\mathbf{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $f_1 = (1, 1, 1)$ och $f_2 = (2, 3, 1)$. Ortogonala projektionen av vektorn $v = (2, -2, 0)$ på W är vektorn $Pv = x_1 f_1 + x_2 f_2$, där

$$\begin{cases} \langle f_1, f_1\rangle x_1 + \langle f_2, f_1\rangle x_2 = \langle v, f_1\rangle \\ \langle f_1, f_2\rangle x_1 + \langle f_2, f_2\rangle x_2 = \langle v, f_2\rangle \end{cases}$$

Eftersom $\langle f_1, f_1\rangle = 3$, $\langle f_1, f_2\rangle = 6$, $\langle f_2, f_2\rangle = 14$, $\langle v, f_1\rangle = 0$ och $\langle v, f_2\rangle = -2$, får vi systemet

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ 6x_2 = \ \ 0 \\ 6x_1 + 14x_2 = -2 \end{cases}$$

med lösningen $x_1 = 2$ och $x_2 = -1$. Detta innebär att $Pv = 2f_1 - f_2 = (0, -1, 1)$. □

Sats 6.3.5 ger upphov till följande algoritm för att ur en följd av vektorer konstruera en ortonormerad följd med samma linjära hölje.

Sats 6.3.8 (Gram–Schmidts metod) *Låt v_1, v_2, v_3, ... vara en ändlig eller oändlig följd av vektorer i ett inre produktrum. Sätt*

$$f_1 = v_1 \qquad \text{och} \qquad e_1 = \begin{cases} \|f_1\|^{-1} f_1, & \text{om } f_1 \neq 0 \\ 0, & \text{om } f_1 = 0. \end{cases}$$

Antag induktivt att vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_n$ och $e_1, e_2, \dots, e_n$ redan är definierade. Sätt, om den ursprungliga följden innehåller $n+1$ eller fler vektorer,

$$f_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle v_{n+1}, e_i\rangle e_i \quad \text{och} \quad e_{n+1} = \begin{cases} \|f_{n+1}\|^{-1} f_{n+1}, & \text{om } f_{n+1} \neq 0 \\ 0, & \text{om } f_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Då är följden f_1, f_2, f_3, ... ortogonal, och följden e_1, e_2, e_3, ... är ortonormerad sedan eventuella nollvektorer strukits. Vidare gäller för varje n att

$$\text{spn}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \text{spn}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}. \tag{1}$$

Bevis. Vi visar satsen med induktion.

Startsteget $n = 1$ är trivialt eftersom $v_1 = f_1 = \|v_1\|e_1$. Antag därför att följden $f_1, f_2, \dots, f_n$ är ortogonal, att $f_i = \|f_i\|e_i$ för $i = 1, 2, \dots, n$, samt att (1) gäller, och sätt $W = \text{spn}\{e_1, \dots, e_n\}$. Om vi stryker eventuella nollvektorer i följden $e_1, e_2, \dots, e_n$ så är resterande vektorer en ON-bas för W. Eventuella nollvektorer i följden ger heller inga bidrag till summan $\sum_{i=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_i\rangle e_i$, som därför på grund av sats 6.3.5 representerar projektionen Pv_{n+1} av vektorn v_{n+1} på delrummet W.

Vektorn $f_{n+1} = v_{n+1} - Pv_{n+1}$ är enligt samma sats ortogonal mot W, och därmed ortogonal mot samtliga vektorer i följderna $e_1, e_2, \dots, e_n$ och $f_1, f_2, \dots, f_n$. Detta visar att följden f_1, $f_2, \dots, f_{n+1}$ är ortogonal. Definitionen av e_{n+1} innebär också att alla nollskilda vektorer i följden e_1, $e_2, \dots, e_{n+1}$ är normerade, så följden är ortonormerad efter att eventuella nollvektorer strukits. Slutligen är per definition f_{n+1} en linjärkombination av vektorerna v_{n+1} och $e_1, e_2, \dots, e_n$, och v_{n+1} är en linjärkombination av f_{n+1} och $e_1, e_2, \dots, e_n$. På grund av induktionsantagandet är därför

$$\begin{aligned} \text{spn}\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} &= \text{spn}\{e_1, \dots, e_n, v_{n+1}\} = \text{spn}\{e_1, \dots, e_n, f_{n+1}\} \\ &= \text{spn}\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Därmed är induktionssteget genomfört och satsen bevisad. □

Korollarium 6.3.9 *Varje ändligdimensionellt inre produktrum V har en ON-bas.*

Bevis. Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ vara en godtycklig bas för V, och utför Gram–Schmidts ortogonaliseringsprocess på denna. Den resulterande ON-följden $e_1, e_2, \dots, e_n$ blir då en ON-bas för V eftersom

$$\text{spn}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \text{spn}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V.$$

□

Exempel 6.3.6 Låt W vara det delrum av $\mathbf{R}^5$ som spänns upp av vektorerna $v_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 2, 1, -2)$ och $v_4 = (1, 1, 0, 0, 1)$. Vi skall bestämma en ON-bas för W. Gram–Schmidts metod ger:

$$
\begin{aligned}
&f_1 = v_1 = (1,1,1,1,0),\\
&\|f_1\| = 2, \quad e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1,0);\\
&f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 = (1,2,0,1,2) - 2\frac{1}{2}(1,1,1,1,0) = (0,1,-1,0,2),\\
&\|f_2\| = \sqrt{6}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,0,2);\\
&f_3 = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2\\
&\quad = (1,0,2,1,-2) - 2\frac{1}{2}(1,1,1,1,0) + \frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,0,2) = (0,0,0,0,0),\\
&e_3 = 0;\\
&f_4 = v_4 - \langle v_4, e_1\rangle e_1 - \langle v_4, e_2\rangle e_2\\
&\quad = (1,1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1,0) - \frac{3}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,0,2) = (1,0,0,-1,0),\\
&\|f_4\| = \sqrt{2}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1,0)
\end{aligned}
$$

Vektorerna e_1, e_2, e_4 bildar en ON-bas för W. □

Exempel 6.3.7 Betrakta rummet $\mathcal{P}$ av alla polynom som ett delrum av $\mathcal{C}[-1,1]$ med standardskalärprodukten. Gram–Schmidts metod tillämpad på polynomföljden 1, t, t^2, t^3, … ger en ortogonal följd f_0, f_1, f_2, f_3, … av polynom, som spänner upp $\mathcal{P}$ eftersom den ursprungliga följden gör det. $\mathcal{P}$ har således en ON-bas. De fyra första polynomen i den ortogonala följden överensstämmer − bortsett från en normaliseringsfaktor − med polynomen i exempel 6.2.3. Se vidare övningarna 6.28 och 6.29, där polynomen i den ortogonala följden dels bestäms explicit, dels ges av en rekursionsformel. □

Övningar

6.20 Konstruera en ON-bas för det delrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1,1,0,1)$, $(0,-1,1,-1)$, $(-1,1,-1,1)$ och $(2,2,1,2)$.

6.21 Bestäm en ON-bas för delrummet $\{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\}$ av $\mathbf{R}^4$.

6.22 Genom $\langle p,q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$ definieras en skalärprodukt på rummet $\mathcal{P}_2$. Konstruera en ON-bas med avseende på denna skalärprodukt.

6.23 Genom $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 9x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$ definieras en skalärprodukt på $\mathbf{R}^3$. Konstruera en ON-bas med avseende på denna skalärprodukt genom att ortogonalisera standardbasen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

6.24 Bestäm för $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ med standardskalärprodukten ortogonala projektionen av funktionen f på det delrum som spänns upp av funktionerna 1, $\cos t$ och $\sin t$ om

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = \sin 2t$ c) $f(t) = t^2$.

6.25 Betrakta $\mathcal{P}_3$ med skalärprodukten $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$. Bestäm en ON-bas för delrummet $W = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = 0\}$.

6.26 Visa att $(W^\perp)^\perp = W$ om W är ett ändligdimensionellt delrum.

6.27 Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara en skalärprodukt på rummet $\mathcal{P}$ av alla reella polynom och antag att skalärprodukten har egenskapen att

$$\langle tp(t), q(t)\rangle = \langle p(t), tq(t)\rangle$$

för alla polynom $p(t)$ och $q(t)$.

a) Visa att om polynomet $p(t)$ är ortogonalt mot delrummet $\mathcal{P}_d$ av alla polynom av grad $\leq d$, så är polynomet $tp(t)$ ortogonalt mot delrummet $\mathcal{P}_{d-1}$.

b) Visa att om $(p_n(t))_{n=0}^{\infty}$ är en ortogonal följd av polynom, där n är lika med graden för $p_n(t)$, så satisfierar den ortogonala följden en rekursionsformel av typen $p_{n+1}(t) = (a_nt + b_n)p_n(t) + c_np_{n-1}(t)$, där $(a_n)_1^\infty$, $(b_n)_1^\infty$ och $(c_n)_1^\infty$ är följder av reella tal.

[Ledning: Låt a_n vara kvoten mellan koefficienten för t^{n+1} i $p_{n+1}(t)$ och koefficienten för t^n i $p_n(t)$; då är $p_{n+1}(t) - a_ntp_n(t)$ ett polynom av grad $\leq n$, som på grund av a) är ortogonalt mot delrummet $\mathcal{P}_{n-2}$.]

6.28 Det s. k. *Legendrepolynomet* $P_n(t)$ av grad n definieras av att

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}D^n(t^2-1)^n,$$

där $D^n(t^2-1)^n$ betecknar n-te derivatan av polynomet $(t^2-1)^n$. Visa att $(P_n(t))_0^\infty$ är en ortogonal följd av polynom med avseende på skalärprodukten $\langle p(t), q(t)\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$ och att $\|P_n(t)\|^2 = 2/(2n+1)$.

[Ledning: Beräkna $2^m m!\,2^n n!\langle P_m(t), P_n(t)\rangle = \int_{-1}^{1} D^m(t^2-1)^m\,D^n(t^2-1)^n\,dt$ genom att integrera partiellt m gånger och vid varje integration flytta en derivering från $P_m(t)$ till $P_n(t)$. Den utintegrerade delen är varje gång lika med 0 beroende på att ± 1 är nollställen av multiplicitet m till $(t^2-1)^m$. Man får därför $2^m m!\,2^n n!\langle P_m(t), P_n(t)\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^m D^{n+m}(t^2-1)^n\,dt$. Termen $D^{m+n}(t^2-1)^n$ är lika med 0 om $m > n$, och lika med $(2n)!$ om $m = n$.]

6.29 Visa att Legendrepolynomen satisfierar rekursionsformeln

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t).$$

[Ledning: Använd resultatet i övning 6.27, och bestäm koefficienterna a_n, b_n och c_n genom att betrakta koefficienterna för termerna av grad $n+1$, n och $n-1$ i polynomen P_{n+1}, P_n och P_{n-1}.]

6.4 Minsta kvadratmetoden

Antag att sambandet mellan två fysikaliska storheter x och y beskrivs av en ekvation av typen $y = ax+b$, där a och b är konstanter som vi vill bestämma. Om vi kunde mäta de fysikaliska storheterna utan mätfel, skulle det för att bestämma konstanterna a och b förstås räcka att mäta upp (x, y) för två olika x-värden. Vi kan emellertid inte bortse från mätfel, och för att minska effekterna av dem gör man istället en serie mätningar (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, m$, av de givna storheterna i syfte att bestämma a och b ur systemet

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \qquad \vdots \\ ax_m + b = y_m. \end{cases}$$

Problemet är förstås att de erhållna punkterna (x_i, y_i) i allmänhet inte ligger i linje, dvs. att det erhållna överbestämda ekvationssystemet är inkonsistent. Uppgiften blir då att bestämma den linje som bäst ansluter till de givna punkterna. Det är inte självklart vad som skall menas med detta, så först måste vi precisera betydelsen av ”bästa” linje.

Med $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ och $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ är ekvationssystemet ovan ekvivalent med vektorekvationen $ax + b\mathbf{1} = y$, och systemet är inkonsistent så snart y inte tillhör $W = \operatorname{spn}\{x, \mathbf{1}\}$. Den vektor i W som ligger närmast vektorn y (när avståndet mäts med hjälp av den euklidiska normen) är enligt sats 6.3.5 projektionen Py av y på W. Det förefaller därför naturligt att definiera den ”bästa” approximativa lösningen (a, b) till systemet $ax + b\mathbf{1} = y$ som lösningen till det konsistenta systemet $ax + b\mathbf{1} = Py$. Denna lösning, som är unik förutsatt att x inte är en multipel av $\mathbf{1}$, kallas *minsta kvadratlösningen* till det givna överbestämda ekvationssystemet.

Vi skall beräkna minsta kvadratlösningen explicit. Först skall vi emellertid beskriva en mer generell situation.

Definition 6.4.1 Betrakta ett godtyckligt ekvationssystem

$$Ax = b, \tag{1}$$

där A är en komplex $m \times n$-matris. Systemet är lösbart om och endast om b tillhör kolonnrummet $\mathcal{K}(A)$ till matrisen A. Låt P beteckna ortogonala projektionen på kolonnrummet. Med en *minsta kvadratlösning* till ekvationssystemet (1) menas en lösning till det lösbara ekvationssystemet

$$Ax = Pb. \tag{2}$$

Minsta kvadratlösningen är unik för varje högerled b om och endast om $\operatorname{rang} A = n$.

På vektorform kan systemet (1) skrivas

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_{*i} = b,$$

och kolonnrummet $\mathcal{K}(A)$ spänns upp av kolonnvektorerna $A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}$. Av sats 6.3.7 följer därför att minstakvadratlösningen fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \langle A_{*1}, A_{*1}\rangle x_1 + \langle A_{*2}, A_{*1}\rangle x_2 + \cdots + \langle A_{*n}, A_{*1}\rangle x_n = \langle b, A_{*1}\rangle \\ \langle A_{*1}, A_{*2}\rangle x_1 + \langle A_{*2}, A_{*2}\rangle x_2 + \cdots + \langle A_{*n}, A_{*2}\rangle x_n = \langle b, A_{*2}\rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle A_{*1}, A_{*n}\rangle x_1 + \langle A_{*2}, A_{*n}\rangle x_2 + \cdots + \langle A_{*n}, A_{*n}\rangle x_n = \langle b, A_{*n}\rangle. \end{cases}$$

Observera att koefficientmatrisen för detta system är A^*A och att högerledet är A^*b. Vi har därmed visat följande sats.

Sats 6.4.2 *Minsta kvadratlösningarna till ekvationssystemet $Ax = b$ fås som lösningar till ekvationssystemet $A^*Ax = A^*b$.*

Låt oss slutligen återvända till problemet att anpassa en rät linje $y = ax + b$ till punktern (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$. Minsta kvadratlösningen (a, b) fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \langle x, x\rangle a + \langle \mathbf{1}, x\rangle b = \langle y, x\rangle \\ \langle x, \mathbf{1}\rangle a + \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle b = \langle y, \mathbf{1}\rangle \end{cases}$$

dvs.

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^m x_i^2)a + (\sum_{i=1}^m x_i)b = \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^m x_i)a + \qquad mb = \sum_{i=1}^m y_i \end{cases}$$

Övningar

6.30 Bestäm den räta linje som i minsta kvadratmening är bäst anpassad till punkterna $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$ och $(3, 5)$.

6.31 Bestäm minsta kvadratlösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

6.5 Ortogonala och unitära matriser

Definition 6.5.1 En kvadratisk matris av ordning n kallas *ortogonal* om matriselementen är reella tal och matriskolonnerna bildar en ON-bas för $\mathbf{R}^n$ med avseende på standardskalärprodukten.

Matrisen kallas *unitär* om matriselementen är komplexa tal och matriskolonnerna bildar en ON-bas för $\mathbf{C}^n$ med avseende på standardskalärprodukten.

EXEMPEL 6.5.1 Matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

är ortogonal, och matrisen

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} \end{bmatrix}$$

är unitär. □

Vi påminner om att om $A = [a_{ij}]$ är en matris med komplexa element, så kallas matrisen $\overline{A}^t$ för *adjunkten* till A och betecknas A^*. Elementet på plats (i, j) i A^* är således är lika med $\overline{a}_{ji}$.

Om A är reell $n \times n$-matris, så är elementet c_{ik} på plats i, k i produkten A^tA lika med skalärprodukten av den i:te raden i A^t och den k:te kolonnen i A med avseende på standardskalärprodukten i $\mathbf{R}^n$, och eftersom den i:te raden i A^t är lika med den i:te kolonnen A_{*i} i A innebär detta att $c_{ik} = \langle A_{*i}, A_{*k}\rangle = \langle A_{*k}, A_{*i}\rangle$. För komplexa $n \times n$-matriser A är elementet på plats i, k i matrisen A^*A också lika med $\langle A_{*k}, A_{*i}\rangle$, där skalärprodukten nu förstås tas i $\mathbf{C}^n$.

För reella matriser A är därför matrisprodukten A^tA lika med enhetsmatrisen om och endast om A:s kolonner bildar en ON-bas för $\mathbf{R}^n$, och för komplexa matriser A är matrisprodukten A^*A lika med enhetsmatrisen om och endast om kolonnerna i A utgör en ON-bas i $\mathbf{C}^n$. Detta ger oss följande karakterisering av ortogonala och unitära matriser.

Sats 6.5.2 *Följande fyra villkor är ekvivalenta för en kvadratisk matris A av ordning n med reella element:*

(α) *A är ortogonal.*

(β) *Matrisens rader bildar en ON-bas i $\mathbf{R}^n$.*

(γ) $A^tA = E$.

(δ) $AA^t = E$.

Och följande fyra villkor är ekvivalenta för en kvadratisk matris A av ordning n med komplexa element:

(α') *A är unitär.*

(β') *Matrisens rader bildar en ON-bas i $\mathbf{C}^n$.*

(γ') $A^*A = E$.

(δ') $AA^* = E$.

Villkoren (γ) och (γ') är förstås ekvivalenta med att $A^{-1} = A^t$ resp. att $A^{-1} = A^*$. Ortogonala matriser A är därför inverterbara med invers A^t, och unitära matriser A är inverterbara med invers A^*.

Bevis. Diskussionen omedelbart före satsen visar att villkoren (α) och (γ) är ekvivalenta. Vidare är (γ) och (δ) ekvivalenta, ty båda villkoren är ekvivalenta med att $A^{-1} = A^t$. Eftersom $(A^t)^t = A$ innebär detta att en matris A är ortogonal om och endast om A^t är ortogonal. Slutligen är ju kolonnerna i A^t rader i A, så det följer att A är ortogonal om och endast om raderna utgör en ON-bas.

Att de fyra påståendena om unitära matriser är ekvivalenta visas förstås analogt. □

Nästa sats innebär att klasserna av ortogonala matriser resp. unitära matriser av ordning n är slutna under multiplikation och inversbildning. De är med andra ord grupper, den s. k. *ortogonala gruppen* $\mathrm{O}(n)$ resp. *unitära gruppen* $\mathrm{U}(n)$.

Sats 6.5.3 *Produkten av två ortogonala matriser av samma ordning är ortogonal. Inversen till en ortogonal matris är ortogonal.*

Produkten av två unitära matriser av samma ordning är unitär. Inversen till en unitär matris är unitär.

Bevis. Antag att A och B är ortogonala. Då är

$$(AB)^t AB = B^t A^t AB = B^t EB = B^t B = E,$$

vilket visar att matrisen AB är ortogonal. Eftersom $A^{-1} = A^t$ är inversen A^{-1} ortogonal. Påståendena om unitära matriser bevisas analogt. □

Koordinatbytet mellan två godtyckliga baser i ett ändligdimensionellt vektorrum förmedlas av en inverterbar matris. Bytet mellan ON-baser förmedlas av ortogonala resp. unitära matriser. Vi har nämligen:

Sats 6.5.4 *Låt $\xi = A\eta$ vara sambandet mellan två koordinatavbildningar ξ och η på euklidiskt (resp. unitärt) rum V, och antag att den mot ξ svarande basen $e_1, e_2, \dots, e_n$ är en ON-bas. Då är den mot η svarande basen $f_1, f_2, \dots, f_n$ en ON-bas om och endast om transformationsmatrisen A är ortogonal (resp. unitär).*

Bevis. Den k:te kolonnen i matrisen A består av koordinaterna för f_k i basen $e_1, e_2, \dots, e_n$. Basen $f_1, f_2, \dots, f_n$ är därför ortonormerad om och endast om koordinattiplarna A_{*1}, A_{*2}, …, A_{*n} utgör en ON-bas för $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), dvs. om och endast om A är en ortogonal (resp. unitär) matris. □

Övningar

6.32 Bestäm inversen till matriserna i exempel 6.5.1.

6.6 Isometrier

Definition 6.6.1 Låt V och W vara två inre produktrum av samma typ (dvs. båda reella eller båda komplexa). En linjär avbildning $T\colon V \to W$ kallas en *isometri* om $\|Tv\| = \|v\|$ för alla vektorer v i V.

Isometrier är uppenbarligen injektiva avbildningar.

Exempel 6.6.1 Avbildningen

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad T(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2)$$

är en isometri, ty

$$\|Tx\|^2 = \frac{1}{9}\big((x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 + x_2)^2 + (2x_2 - 2x_2)^2\big) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2. \qquad \square$$

Exempel 6.6.2 Det euklidiska rummet ℓ^2 definierades i exempel 6.1.10 och består av alla reella följer $x = (x_i)_1^\infty$ med $\|x\|_2 = (\sum x_i^2)^{1/2} < \infty$. Låt nu $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ vara avbildningen

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

som förskjuter följden ett steg åt höger och sätter in en nolla på första platsen. T är uppenbarligen en isometri. $\square$

En isometri är per definition normbevarande; vi skall se att den också bevarar skalärprodukter.

Sats 6.6.2 *En linjär avbildning $T\colon V \to W$ är en isometri om och endast om $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ för alla vektorer u och v i V.*

Bevis. Av $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ följer för $u = v$ att $\|Tv\|^2 = \|v\|^2$.

Antag omvänt att T är normbevarande. I det reella fallet får vi då på grund av sats 6.1.6

$$\begin{aligned}4\langle Tu, Tv\rangle &= \|Tu + Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2 = \|T(u + v)\|^2 - \|T(u - v)\|^2 \\ &= \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v\rangle,\end{aligned}$$

vilket visar att skalärprodukten bevaras. Det komplexa fallet är analogt. $\square$

Påstående 6.6.3 *Antag att $T\colon V \to W$ är en linjär avbildning mellan två inre produktrum och att rummet V är ändligtdimensionellt med ON-bas $e_1, e_2, \dots, e_n$. Då är T en isometri om och endast om följden Te_1, Te_2, …, Te_n är ortonormerad.*

Bevis. Om T är en isometri, så är $\langle Te_i, Te_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$, och det följer att följden $Te_1, Te_2, \dots, Te_n$ är ortonormerad.

Antag omvänt att följden är ortonormerad. Då är $\langle Te_i, Te_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$, så för godtyckliga vektorer $u = \sum_i \alpha_i e_i$ och $v = \sum_j \beta_j e_j$ är

$$\begin{aligned}\langle Tu, Tv\rangle &= \langle \sum_i \alpha_i Te_i, \sum_j \beta_j Te_j\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta}_j \langle Te_i, Te_j\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta}_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle \sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j\rangle = \langle u, v\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Sats 6.6.4 *En linjär avbildning $T\colon V \to W$ mellan två euklidiska (resp. unitära) rum av samma dimension är en isometri om och endast om avbildningens matris A med avseende på två godtyckliga ON-baser i V och W är ortogonal (resp. unitär).*

Bevis. Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ och $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vara ON-baser i V resp. W. Enligt påstående 6.6.3 är T en isometri om och endast om $Te_1, Te_2, \ldots, Te_n$ är en ON-bas för W. Eftersom den k:te kolonnen i matrisen A består av koordinaterna för Te_k i basen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, inträffar detta om och endast om matriskolonnerna utgör en ON-bas för $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), dvs. om och endast om matrisen A är ortogonal (resp. unitär). □

Övningar

6.33 Spegling i ett plan är en isometri. Bestäm matrisen för spegling i planet med ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. (ON-system förutsätts.)

6.34 Rotation kring origo i planet och rotation kring en axel genom origo i rummet är isometriska avbildningar. Bestäm matrisen för
a) rotation $60°$ kring origo i planet;
b) rotation $60°$ kring linjen $x_1 = x_2 = x_3$ i rummet.
(ON-system förutsätts.)

6.35 Utrusta $\mathcal{P}_2$ med skalärprodukten $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$. Undersök om det finns någon isometri $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ så att $T(0,0,2) = \sqrt{2}$ och $T(1,1,\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{3}\,t$.

6.7 Adjunkten

Vi börjar med att karakterisera dualrummet V' till ett ändligdimensionellt inre produktrum.

Sats 6.7.1 *Om V är ett ändligdimensionellt inre produktrum, så finns det för varje linjär form $\phi \in V'$ en unik vektor $v_\phi \in V$ så att $\phi(v) = \langle v, v_\phi\rangle$ för alla $v \in V$.*

Bevis. För varje vektor $w \in V$ får vi en linjär form ϕ_w på V genom att sätta $\phi_w(v) = \langle v, w\rangle$.

Betrakta nu avbildningen $J\colon V \to V'$ som definieras av att $Jw = \phi_w$. Om V är ett reellt inre produktrum, så är avbildningen J linjär (beroende på att en inre produkt är linjär i den andra faktorn). Om V är ett komplext rum, så gäller istället att $J(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \overline{\alpha}_1 Jw_1 + \overline{\alpha}_2 Jw_2$. I båda fallen är nollrummet $\mathcal{N}(J) = V^\perp = \{0\}$, så avbildningen J är injektiv. Det följer därför av dimensionssatsen att $\dim \mathcal{V}(J) = \dim V$, och eftersom $\dim V' = \dim V$ är avbildningen J följaktligen också surjektiv. Varje $\phi \in V'$ är med andra ord lika med ϕ_w för någon vektor $w \in V$, vilket bevisar existensen av vektorn v_ϕ i satsen. Entydigheten följer av att avbildningen J är injektiv. □

Anmärkning. Om inre produktrummet V är oändligdimensionellt, så är avbildningen J inte surjektiv beroende på att $\dim V' > \dim V$. I detta fall finns det alltså linjära former som inte kan uttryckas som inre produkter.

EXEMPEL 6.7.1 Varje linjär form ϕ på $\mathbf{R}^n$ har formen

$$\phi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

och med $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ som standardskalärprodukten och $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är uppenbarligen $\phi(x) = \langle x, a \rangle$. □

Definition 6.7.2 Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning mellan två inre produktrum. Avbildningen $T^*\colon W \to V$ kallas en *adjunkt* till T om

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$$

för alla v, $w \in V$.

Här och i fortsättningen använder vi samma beteckning $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ för den inre produkten i V och i W eftersom det framgår av sammanhanget att skalärprodukten $\langle Tv, v \rangle$ är en inre produkt i W och att $\langle v, T^* w \rangle$ är en inre produkt i V.

Linjära avbildningar från oändligdimensionella rum behöver inte ha någon adjunkt (se exempel 6.7.5), men om den existerar så är den unik. Vi har följande resultat.

Sats 6.7.3 *Om $T\colon V \to W$ har en adjunkt T^*, så är den entydigt bestämd och linjär. Adjunkten T^* existerar säkert om rummet V är ändligdimensionellt.*

Bevis. Antag att det finns två adjunkter, T^* och $T^\#$, dvs. avbildningar som uppfyller

$$\langle v, T^* w \rangle = \langle v, T^\# w \rangle = \langle Tv, w \rangle$$

för alla $v \in V$ och $w \in W$. Då är $\langle v, T^* w - T^\# w \rangle = 0$ för alla $v \in V$, vilket medför att $T^* w - T^\# w = 0$ eftersom $V^\perp = \{0\}$. För alla $w \in W$ är därför $T^* w = T^\# w$, så avbildningarna T^* och $T^\#$ är identiska. Om det finns en adjunkt T^*, så är den således entydigt bestämd.

Antag nu att adjunkten T^* existerar; då är

$$\begin{aligned}\langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)\rangle &= \langle Tv, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle Tv, w_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle Tv, w_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}_1\langle v, T^*w_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle v, T^*w_2\rangle = \langle v, \alpha_1 T^*w_1 + \alpha_2 T^*w_2\rangle,\end{aligned}$$

varav följer att $T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 T^*w_1 + \alpha_2 T^*w_2$. Adjunkten är således i förekommande fall en linjär avbildning.

För att slutligen visa att adjunkten existerar om $\dim V < \infty$ betraktar vi för fixt $w \in W$ den linjära formen

$$\phi_w(v) = \langle Tv, w\rangle$$

på V. Enligt sats 6.7.1 finns det en vektor $\tilde{w} \in V$ så att $\phi_w(v) = \langle v, \tilde{w}\rangle$ för alla $v \in V$. Genom att definiera $T^*w = \tilde{w}$ har vi därför skaffat oss en avbildning $T^*\colon W \to V$ som uppfyller villkoret i definition 6.7.2. □

EXEMPEL 6.7.2 Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ vara avbildningen

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1 - x_2).$$

Då är

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= (x_1 + 2x_2)y_1 + (3x_1 + 4x_2)y_2 + (x_1 - x_2)y_3 \\ &= x_1(y_1 + 3y_2 + y_3) + x_2(2y_1 + 4y_2 - y_3),\end{aligned}$$

vilket visar att

$$T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + 3y_2 + y_3, 2y_1 + 4y_2 - y_3).$$

□

EXEMPEL 6.7.3 På rummet ℓ^2 låter vi T vara högerskift och S vänsterskift, dvs.

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{och} \quad S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Då är

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(Tx)_i y_i = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(Sy)_i = \langle x, Sy\rangle,$$

vilket visar att $T^* = S$. □

Exempel 6.7.4 Låt V vara vektorrummet av alla oändligt deriverbara funktioner på $\mathbf{R}$ som är periodiska med period 1, och förse V med skalärprodukten $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Vi skall bestämma adjunkten till deriveringsoperatorn D på V. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\langle Df, g\rangle &= \int_0^1 f'(t)g(t)\,dt = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(t)g'(t)\,dt \\ &= -\langle f, Dg\rangle = \langle f, -Dg\rangle.\end{aligned}$$

Således är $D^* = -D$. □

Exempel 6.7.5 Låt V vara ett godtyckligt oändligdimensionellt reellt inre produktrum och låt $\phi \in V'$ vara en linjär form som inte kan uttryckas som en inre produkt. Då saknar avbildningen $\phi\colon V \to \mathbf{R}$ adjunkt, ty existensen av en adjunkt $\phi^*\colon \mathbf{R} \to V$ skulle medföra att

$$\phi(v) = \phi(v)\cdot 1 = \langle \phi(v), 1\rangle = \langle v, \phi^*(1)\rangle,$$

dvs. att $\phi(v) = \langle v, w\rangle$ för vektorn $w = \phi^*(1)$. □

Sats 6.7.4 (a) *Om $S, T\colon V \to W$ är linjära avbildningar med adjunkter och α, β är skalärer, så har avbildningen $\alpha S + \beta T$ en adjunkt och*

$$(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*.$$

(b) *Om $T\colon V \to W$ är en linjär avbildning med adjunkt, så har adjunkten T^* en adjunkt och*

$$(T^*)^* = T.$$

(c) *Om $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ är linjära avbildningar med adjunkter, så har den sammansatta avbildningen TS en adjunkt och*

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

(d) *För den identiska avbildningen I på ett rum V gäller att $I^* = I$.*

(e) *Om T är en inverterbar operator med adjunkt, så är adjunkten T^* inverterbar och*

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

Bevis. (a), (b) och (c) följer av följande likheter:

$$\begin{aligned}\langle \alpha Sv + \beta Tv, w\rangle &= \alpha\langle Sv, w\rangle + \beta\langle Tv, w\rangle = \alpha\langle v, S^*w\rangle + \beta\langle v, T^*w\rangle \\ &= \langle v, \overline{\alpha}S^*w + \overline{\beta}T^*w\rangle; \\ \langle T^*w, v\rangle &= \overline{\langle v, T^*w\rangle} = \overline{\langle Tv, w\rangle} = \langle w, Tw\rangle; \\ \langle TSu, w\rangle &= \langle Su, T^*w\rangle = \langle u, S^*T^*w\rangle.\end{aligned}$$

Påstående (d) är trivialt, och (e) följer av (c) och (d). □

Sambandet mellan adjunkten till matriser och adjunkten till linjära avbildningar mellan ändligdimensionella rum ges av följande sats.

Sats 6.7.5 *Låt T vara en linjär avbildning mellan två ändligdimensionella inre produktrum V och W. Om matriserna för T och T^* beräknas med avseende på samma ON-baser i V resp. W, så är*

$$\operatorname{mat} T^* = (\operatorname{mat} T)^*.$$

Bevis. Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara ON-basen i V och $f_1, f_2, \dots, f_m$ vara ON-basen i W, och låt a_{ij} resp. b_{ij} vara elementen på plats (i, j) i T:s resp. T^*:s matriser. Då är

$$a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle = \langle e_j, T^* f_i \rangle = \overline{\langle T^* f_i, e_j \rangle} = \overline{b_{ji}}.$$

□

Definition 6.7.6 En linjär operator T på ett inre produktrum med adjunkt T^* kallas *självadjungerad* om $T^* = T$ och *unitär* om $T^*T = TT^* = I$.

I det reella fallet kallas avbildningen också *symmetrisk* istället för självadjungerad och *ortogonal* istället för unitär.

I följande sats karakteriseras självadjungerade och unitära operatorer på ändligdimensionella rum med hjälp av sina matriser. Satsen följer förstås omedelbart av sats 6.7.5.

Sats 6.7.7 *Låt T vara en linjär operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum, och låt* $\operatorname{mat} T$ *vara operatorns matris med avseende på en godtycklig ON-bas. Då gäller:*

(a) *Operatorn T är självadjungerad om och endast om matrisen* $\operatorname{mat} T$ *är hermitesk.*

(b) *Operatorn T är unitär om och endast om matrisen* $\operatorname{mat} T$ *är unitär.*

Isometriska operatorer med adjunkter karakteriseras av följande sats.

Sats 6.7.8 *En linjär operator $T\colon V \to V$ med adjunkt är en isometri om och endast om $T^*T = I$.*

Bevis. Operatorn T är en isometri om $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ för alla vektorer v och w i V. Eftersom $\langle v, T^*Tw \rangle = \langle Tv, Tw \rangle$, är således T en isometri om och endast om $\langle v, T^*Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ för alla v och w. Detta gäller om och endast om $T^*Tw = w$ för alla w, dvs. om och endast om $T^*T = I$. □

Korollarium 6.7.9 *Unitära (ortogonala) operatorer är isometrier. Omvänt är varje isometrisk operator på ett ändligdimensionellt rum unitär (ortogonal).*

Bevis. Av föregående sats följer att varje unitär (ortogonal) operator är en isometri. För operatorer på ändligdimensionella rum är villkoret $T^*T = I$ ekvivalent med att $T^*T = TT^* = I$. Varje isometri på ett ändligdimensionellt rum är således unitär (resp. ortogonal i det reella fallet). □

Övningar

6.36 Antag att T är en självadjungerad operator och att $T^2 = T$. Visa att operatorn $U = I - 2T$ är unitär.

6.37 Bestäm adjunkten till operatorerna $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ och $T\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^2$ om
a) $Sx = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2, 5x_1 + 6x_2)$
b) $Tz = (z_1 + \mathrm{i}z_2 + (1-\mathrm{i})z_3, (1+2\mathrm{i})z_1 + (2+\mathrm{i})z_2 + 2z_3)$.

6.38 Bestäm adjunkten till operatorn T på $\mathcal{C}[-1,1]$ om
a) $Tf(t) = f(-t)$ b) $Tf(t) = tf(t)$ c) $Tf(t) = \int_{-1}^{t} f(s)\,ds$
d) $Tf(t) = \int_{-1}^{1} |t-s| f(s)\,ds$.

6.39 Låt P vara en operator på ett inre produktrum V.
a) Visa att om P är en ortogonal projektion så är $P^* = P$.
b) Antag omvänt att P har egenskaperna $P^2 = P$ och $P^* = P$. Visa att då är $\mathcal{N}(P) = \mathcal{V}(P)^\perp$, $V = \mathcal{V}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$, och P är den ortogonala projektionen av V på $\mathcal{V}(P)$.

6.40 Antag att V är ett ändligdimensionellt inre produktrum med ON-bas e_1, e_2, $\ldots$, e_n, och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att
$$T^*w = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle w, Te_i\rangle e_i.$$

6.41 Låt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ vara standardskalärprodukten på rummet $\mathcal{C}[0,1]$ av kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$. Visa att den linjära formen δ_0 på $\mathcal{C}[0,1]$, som definieras av att $\delta_0(f) = f(0)$, inte kan skrivas som en skalärprodukt, dvs. att det inte finns någon funktion $g \in \mathcal{C}[0,1]$ så att $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = f(0)$ för alla f.

6.8 Fourierserier

Låt oss börja med att påminna om att
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t.$$

En funktion f som är definierad på hela reella axeln kallas 2π-periodisk om $f(t + 2\pi) = f(t)$ för alla t. Den komplexvärda exponentialfunktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ är uppenbarligen 2π-periodisk.

Definition 6.8.1 Låt f vara en 2π-periodisk (komplex- eller reellvärd) funktion som är integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$. Talen

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt,$$

där $n \in \mathbf{Z}$, kallas funktionens *fourierkoefficienter*, och serien

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

kallas f:s *fourierserie.*

Exempel 6.8.1 Låt $f(t) = t$ på intervallet $[0, 2\pi[$ och utvidga funktionen till en periodisk funktion på hela reella axeln. Fourierkoefficienterna fås genom partiell integration och är

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}dt\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}t - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\mathrm{i}}{n} \qquad \text{för } n \neq 0,\end{aligned}$$

medan

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \pi.$$

Fourierserien är således

$$\pi + \sum_{n\neq 0}\frac{\mathrm{i}}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}.$$

□

En funktions fourierserie behöver inte vara konvergent, men man kan visa att så är fallet om t. ex. funktionen f är deriverbar utom i ändligt många punkter och höger- och vänsterderivatorna existerar i dessa punkter. I så fall är vidare

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = f(t)$$

i alla kontinuitetspunkter t till f.

Vi skall emellertid inte gå in på detta här utan enbart beröra den del av teorin för fourierserier som hör ihop med teorin för inre produktrum. Vi börjar då med att observera att följden $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ är en ortonormerad följd i $\mathcal{C}[0,2\pi]_{\mathbf{C}}$, rummet av alla komplexvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,2\pi]$, med avseende på skalärprodukten

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Vi har nämligen

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt},\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)t\,dt} = \begin{cases} 1, & \text{om } m=n \\ 0, & \text{annars.}\end{cases}$$

Observera vidare att

$$\hat{f}(n) = \langle f,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\rangle.$$

Den ändliga följden $\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\big)_{n=-N}^{N}$ spänner upp ett $(2N+1)$-dimensionellt delrum W_N av $\mathcal{C}[0,2\pi]_{\mathbf{C}}$. Elementen i detta delrum är förstås de ändliga summorna

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

som, om vi utnyttjar definitionen av $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, också kan skrivas på formen

$$b_0 + \sum_{n=1}^{N}(b_n\cos nt + c_n\sin nt).$$

Summan $\sum_{-N}^{N} a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ kallas därför ett *trigonometriskt polynom* av grad N (om någon av koefficienterna a_N och a_{-N} är nollskild).

Låt P_N beteckna den ortogonala projektionen på W_N; enligt sats 6.3.5 är

$$P_Nf(t) = \sum_{n=-N}^{N}\langle f,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

som är en ändlig delsumma till fourierserien. Av alla trigonometriska polynom $p(t)$ av grad högst N är P_Nf det polynom som minimerar uttrycket

$$\|f-p\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-p(t)|^2dt.$$

Eftersom $f(t)-P_Nf(t)$ och $P_Nf(t)$ är ortogonala mot varandra får vi vidare med hjälp av Pythagoras sats

$$\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2 = \|P_Nf\|^2 \le \|P_Nf\|^2 + \|f-P_Nf\|^2 = \|f\|^2.$$

Genom att låta $N \to \infty$ får vi olikheten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|^2,$$

som går under namnet *Bessels olikhet*. Man kan bevisa att i själva verket gäller likhet:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2.$$

Denna likhet kallas *Parsevals relation*. Parsevals relation är ekvivalent med att

$$\lim_{N\to\infty} \|f - P_N f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}|^2 dt = 0.$$

Man säger därför att fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ konvergerar mot f i norm eller L^2-mening.

Exempel 6.8.2 Parsevals relation innebär för funktionen i exempel 6.8.1 att

$$\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4\pi^2}{3},$$

varur följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Kapitel 7

Alternerande former och determinanter

För att motivera införandet av determinanter betraktar vi följande problem:

Finn ett explicit uttryck för lösningen till ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem $Ax = b$ med inverterbar koefficientmatris av ordning n.

Det följer av Gausseliminationsalgoritmen att de obekanta x_k ges av rationella uttryck $r_k(a_{11}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n)$ innehållande de i systemet ingående koefficienterna, så uppgiften består i att finna dessa rationella funktioner r_k.

Om vi döper kolonnvektorerna i koefficientmatrisen till $a_1, a_2, \dots, a_n$, blir problemet ekvivalent med följande problem, som naturligtvis kan formuleras för ett godtyckligt n-dimensionellt vektorrum V:

Bestäm en explicit formel för vektorn b:s koordinater $x_1, x_2, \dots, x_n$ i basen $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Låt oss anta att vi har en funktion $\phi\colon V \times V \times \cdots \times V \to \mathbf{K}$, som är definierad på den Cartesianska produkten av n stycken kopior av V, och som är linjär i varje variabel för sig, och som dessutom har egenskapen att $\phi(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ om och endast om vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_n$ är linjärt beroende. Då kan vi lösa vårt problem. Med utgångspunkt från utvecklingen

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = x_k a_k + w_k, \qquad \text{där} \qquad w_k = \sum_{j \neq k} x_j a_j$$

får vi nämligen

$$\begin{aligned}
\phi(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n) &= \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k a_k + w_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \\
&= x_k \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) + \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, w_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \\
&= x_k \phi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) + 0,
\end{aligned}$$

där den näst sista likheten utnyttjar att ϕ är linjär i den k:te variabeln, och den sista likheten beror på att vektorn w_k är linjärt beroende av vektorerna $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$. Division ger

$$x_k = \frac{\phi(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{\phi(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}$$

där nämnaren är skild från noll eftersom $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är en bas.

För att vårt problem skall kunna anses som löst återstår det förstås att konstruera ϕ, vilket vi skall göra i det här kapitlet.

7.1 Alternerande former

Definitioner och grundläggande egenskaper

I det här avsnittet betecknar V genomgående ett vektorrum över kroppen $\mathbf{K}$, och $V^k = V \times V \times \cdots \times V$ är den Cartesianska produkten av k kopior av V, dvs. mängden av alla k-tipler av element i V.

Definition 7.1.1 En funktion $\phi\colon V^k \to \mathbf{K}$ kallas en *multilinjär form* på V om funktionen är linjär i varje argument för sig, dvs. om det för $i = 1, 2, \ldots, k$ gäller att

$$\phi(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta w_i, \ldots, v_k) = \alpha\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \beta\phi(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k).$$

Om vi speciellt behöver framhålla antalet variabler k säger vi *k-multilinjär form* eller *k-form.*

Linjära former och bilinjära former är naturligtvis samma sak som 1- och 2-former.

Det är uppenbart att summan av två k-former är en k-form, och att produkten av en skalär med en k-form är en k-form. Mängden av alla k-former bildar ett vektorrum.

EXEMPEL 7.1.1 $\phi(x, y, z) = x_1 y_2 z_1$ är en 3-form på $\mathbf{R}^2$. □

Ur definitionen följer enkelt med induktion att en k-form ϕ opererar på linjärkombinationer av vektorer på följande sätt:

$$\begin{aligned}\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_{i2} v_i, \ldots, \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} v_i) \\ = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_k k}\, \phi(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}).\end{aligned}$$

Härav följer att om V är ett n-dimensionellt rum med bas e_1, e_2, …, e_n, så är k-formen ϕ entydigt bestämd av sina värden $\phi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ på alla k-tiplar av basvektorerna. Speciellt är $\phi = 0$ om alla dessa värden är 0.

Definition 7.1.2 En k-form ϕ på V kallas *alternerande* om

$$\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$$

så snart $v_i = v_{i+1}$ för något index i, $1 \leq i \leq k-1$ (dvs. så snart två intilliggande vektorer är lika).

I fallet $k = 1$ är villkoret ovan tomt, så varje linjär form är per definition alternerande.

EXEMPEL 7.1.2 Den multilinjära formen $\phi(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ på $\mathbf{R}^2$ är alternerande, eftersom $\phi(x, x) = 0$. □

Om ϕ och ψ är två alternerande k-former på V och α, β är skalärer, så är uppenbarligen $\alpha\phi + \beta\psi$ också en alternerande k-form på V. Mängden av alla alternerande k-former på ett vektorrum V bildar med andra ord ett vektorrum.

Definition 7.1.3 Vektorrummet av alla alternerande k-former på V betecknas $A_k(V)$. Vi sätter vidare $A_0(V) = \mathbf{K}$; en alternerande *0-form* är således en skalär.

Elementen i $A_k(V)$ säges också vara alternerande former av *grad* k.

Definitionen av alternerande former har följande konsekvenser.

Sats 7.1.4 *Låt $\phi \in A_k(V)$, och låt $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vara vektorer i V.*

(a) *Antag att $i \neq j$ och $v_i = v_j$. Då är*
$$\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0.$$
En alternerande multilinjär form är med andra ord 0 när två variabler är lika.

(b) *Antag att $i \neq j$ och låt $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ vara den k-tipel som fås ur k-tipeln $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ genom att låta vektorerna nr i och nr j byta plats med varandra, dvs. $w_i = v_j$ och $w_j = v_i$ medan $w_\ell = v_\ell$ för alla övriga index ℓ. Då är*
$$\phi(w_1, w_2, \ldots, w_k) = -\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$
En alternerande form byter med andra ord tecken när två variabler byter plats med varandra.

(c) *Om σ är en permutation av $\{1, 2, \ldots, k\}$ så är*

$$\phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\,\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

där $\operatorname{sgn}(\sigma)$ *är* $+1$ *om permutationen är jämn och* -1 *om den är udda.*

(d) *Om* $j \neq i$ *så är*

$$\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

I en alternerande form kan således en multipel av en variabel adderas till en annan variabel utan att formens värde ändras.

Bevis. (a) och (b). Vi visar först (b) i fallet $j = i+1$, dvs. då två intilliggande vektorer byter plats. Sätt $f(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, dvs. låt f vara den funktion som fås av ϕ genom att fixera samtliga variabler utom variablerna nr i och $i+1$. Funktionen f är uppenbarligen bilinjär och alternerande, och vi har att visa att $f(x, y) = -f(y, x)$ för alla x, $y \in V$. Detta följer emellertid av att

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) + f(y, x).$$

Vi övergår nu till (a). Om två vektorer i $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ är lika, så kan vi successivt byta två intilliggande vektorer till dess att vi erhållit en k-tipel i vilken två intilliggande vektorer är lika. Vid varje sådant byte ändrar formen ϕ tecken, och när två intilliggande vektorer är lika är formens värde lika med 0. Följaktligen är $\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \pm 0 = 0$.

På exakt samma sätt som vi visade att (b) följer ur definition 7.1.2 när två intilliggande vektorer byter plats med varandra, kan vi nu visa att det allmänna fallet (b) följer ur (a).

(c) Vi kan överföra k-tipeln $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k))$ i k-tipeln $(1, 2, \ldots, k)$ genom att successivt byta två element i taget. Antalet sådana byten är udda om permutationen σ är udda och jämnt om permutationen är jämn (se Appendix). Påstående (c) är därför en konsekvens av påstående (b).

(d) Multilinearitet ger

$$\begin{aligned}&\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \\ &\qquad \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) + \alpha\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k),\end{aligned}$$

där $\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k) = 0$ beroende på att vektorerna på plats i och j är lika. □

Korollarium 7.1.5 *Antag att* $\phi \in A_k(V)$ *och att vektorerna* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *är linjärt beroende. Då är* $\phi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$.

Bevis. På grund av det linjära beroendet kan någon av vektorerna v_i skrivas som en linjärkombination av de föregående vektorerna, $v_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j v_j$ säg.

Upprepad användning av påstående (d) i satsen ovan ger

$$\begin{aligned}\phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k) &= \phi(v_1,\dots,v_i-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j v_j,\dots,v_k)\\ &= \phi(v_1,\dots,0,\dots,v_k)=0.\end{aligned}$$

□

Vektorrummet $A_k(V)$ innehåller förstås alltid nollformen 0, som definieras av att $0(v_1,v_2,\dots,v_k)=0$ för alla $v_1,v_2,\dots,v_k$. Om rummet V är ändligt-dimensionellt och $k>\dim V$, så är nollformen den enda alternerande k-formen.

Korollarium 7.1.6 *Om $k>\dim V$, så är $A_k(V)=\{0\}$.*

Bevis. Antag att $\phi\in A_k(V)$, där $k>\dim V$. Då är varje uppsättning av k stycken vektorer i V linjärt beroende. Enligt föregående korollarium är därför $\phi(v_1,v_2,\dots,v_k)=0$ för alla $v_1,v_2,\dots,v_k$. □

Kilprodukten

Vi kommer att behöva bilda summor av typen $\sum a_{IJ}$, där summan skall tas över alla I och J som tillhör speciella delmängder av en given indexmängd $\{1,2,3,\dots,m\}$. För att erhålla hanterbara och lättlästa formler behöver vi därför först några definitioner och beteckningar.

Antalet element i en ändlig mängd A betecknas $|A|$.

Låt nu $\{v_i \mid i\in M\}$ vara en familj av vektorer, som vi indexerat med hjälp av någon ändlig mängd M av positiva heltal. Med v_M menar vi i så fall den $|M|$-tipel av vektorer som fås genom att ordna elementen i M i växande ordning $i_1<i_2<\dots<i_{|M|}$ och sätta $v_M=(v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_{|M|}})$.

En *2-partition* av mängden M är ett *ordnat par* (I_1,I_2) av disjunkta delmängder I_1 och I_2 vars union är lika med M, dvs. $I_1\cap I_2=\emptyset$ och $I_1\cup I_2=M$.

Låt k_1 och k_2 vara två icke-negativa heltal med $k_1+k_2=|M|$; mängden av alla 2-partitioner (I_1,I_2) av M med $|I_1|=k_1$ och $|I_2|=k_2$ kommer att betecknas $\mathrm{Part}_{k_1,k_2}(M)$.

Antalet partitioner i $\mathrm{Part}_{k_1,k_2}(M)$ är förstås lika med binomialkoefficienten $\binom{|M|}{k_1}$.

Ett talpar $(i_1,i_2)\in I_1\times I_2$ kallas en *inversion* i partitionen (I_1,I_2) om $i_1>i_2$. Låt $N(I_1,I_2)$ vara antalet inversioner i partitionen (I_1,I_2) av M och sätt

$$\mathrm{sgn}(I_1,I_2)=(-1)^{N(I_1,I_2)}.$$

Talet $\mathrm{sgn}(I_1,I_2)$ kallas partitionens *signum.*

Partitionens signum är således lika med $+1$ om antalet inversioner är jämnt, och lika med -1 om antalet inversioner är udda.

EXEMPEL 7.1.3 $\mathrm{Part}_{2,2}(\{1,2,3,4\})$ består av sex stycken 2-partitioner: $(\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1,3\},\{2,4\})$, $(\{1,4\},\{2,3\})$, $(\{2,3\},\{1,4\})$, $(\{2,4\},\{1,3\})$ och $(\{3,4\},\{1,2\})$.

Partitionen $(\{2,4\},\{1,3\})$ har 3 stycken inversioner, nämligen $(2,1)$, $(4,1)$ och $(4,3)$. Dess signum är därför -1. □

De båda mängderna $\mathrm{Part}_{k_1,k_2}(M)$ och $\mathrm{Part}_{k_2,k_1}(M)$ innehåller lika många partitioner. Vi får en bijektion mellan mängderna genom att avbilda partitionen $(I_1,I_2) \in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(M)$ på partitionen $(I_2,I_1) \in \mathrm{Part}_{k_2,k_1}(M)$. Sambandet mellan dessa båda partitioners signum ges av följande lemma.

Lemma 7.1.7 *För de båda duala partitionerna* $(I_1,I_2) \in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(M)$ *och* $(I_2,I_1) \in \mathrm{Part}_{k_2,k_1}(M)$ *gäller att*

$$\mathrm{sgn}(I_1,I_2) = (-1)^{k_1k_2}\,\mathrm{sgn}(I_2,I_1).$$

Bevis. För varje par $(i_1,i_2) \in I_1 \times I_2$ är antingen (i_1,i_2) en inversion i (I_1,I_2) (om $i_1 > i_2$) eller (i_2,i_1) en inversion i (I_2,I_1) (om $i_2 > i_1$). För antalet inversioner $N(I_1,I_2)$ och $N(I_2,I_1)$ i respektive partition gäller därför sambandet $N(I_1,I_2)+N(I_2,I_1) = |I_1|\cdot|I_2| = k_1k_2$. De båda talen $N(I_1,I_2)$ och $N(I_2,I_1)$ har därför samma paritet om k_1k_2 är jämnt, och olika paritet om k_1k_2 är udda. Det följer att $\mathrm{sgn}(I_1,I_2) = (-1)^{k_1k_2}\,\mathrm{sgn}(I_2,I_1)$. □

De införda begreppen för 2-partitioner låter sig enkelt generaliseras till partitioner av en mängd i fler än två delar. En *p-partition* av mängden M är en ordnad p-tipel $(I_1,I_2,\dots,I_p)$ av parvis disjunkta delmängder $I_1,I_2,\dots,I_p$ till M vars union är lika med hela M. Om $k_1,k_2,\dots,k_p$ är icke-negativa heltal vars summa är lika med $|M|$, så låter vi $\mathrm{Part}_{k_1,\dots,k_p}(M)$ beteckna mängden av alla p-partitioner av M som uppfyller $|I_j| = k_j$ för $j = 1,\,2,\,\dots,\,p$.

Ett talpar (i,j) kallas en *inversion* för p-partitionen $(I_1,I_2,\dots,I_p)$ om $i > j$, $i \in I_k$, $j \in I_\ell$ och $k < \ell$. Partitionens *signum* $\mathrm{sgn}(I_1,I_2,\dots,I_p)$ definieras som $+1$ om det totala antalet inversioner är jämnt, och som -1 om det totala antalet inversioner är udda.

En $|M|$-partition av M är detsamma som en permutation. Om M är mängden $\{1,2,3,\dots,m\}$ och σ är en godtycklig permutation av M så är m-tipeln $(\{\sigma(1)\},\,\{\sigma(2)\},\dots,\{\sigma(m)\})$ en m-partition av M, och (i,j) är en inversion för partitionen om och endast om paret är en inversion i permutationen σ enligt definitionen av begreppet inversion i Appendix. Signum för partitionen överenstämmer därför med signum för permutationen.

Förutom permutationer kommer vi fortsättningsvis bara att behöva använda oss av 2- och 3-partitioner.

Lemma 7.1.8 *Antag att* $(I_1, I_2, I_3) \in \operatorname{Part}_{k_1,k_2,k_3}(M)$*, och sätt* $L = I_1 \cup I_2$*. Då är paret* (I_1, I_2) *en 2-partition i* $\operatorname{Part}_{k_1,k_2}(L)$ *och paret* (L, I_3) *en 2-partition i* $\operatorname{Part}_{k_1+k_2,k_3}(M)$*, och dessa båda partitioners signum uppfyller sambandet*

$$\operatorname{sgn}(I_1, I_2) \cdot \operatorname{sgn}(L, I_3) = \operatorname{sgn}(I_1, I_2, I_3).$$

Bevis. Låt $N(I_1, I_2, I_3)$ beteckna det totala antalet inversioner i 3-partitionen (I_1, I_2, I_3); då är uppenbarligen

$$\begin{aligned} N(I_1, I_2, I_3) &= N(I_1, I_2) + N(I_1, I_3) + N(I_2, I_3) = N(I_1, I_2) + N(I_1 \cup I_2, I_3) \\ &= N(I_1, I_2) + N(L, I_3). \end{aligned}$$

Det följer att $\operatorname{sgn}(I_1, I_2, I_3) = (-1)^{N(I_1,I_2)+N(L,I_3)} = \operatorname{sgn}(I_1, I_2) \cdot \operatorname{sgn}(L, I_3)$. □

Vi har nu infört de beteckningar och begrepp som behövs för att på ett någorlunda enkelt sätt beskriva den konstruktion som, givet en alternerande k_1-form ϕ och en alternerande k_2-form ψ, resulterar i en alternerande (k_1+k_2)-form $\phi \wedge \psi$.

Sats 7.1.9 *Låt* k_1 *och* k_2 *vara två positiva heltal, och sätt* $k = k_1 + k_2$ *samt* $K = \{1, 2, \dots, k\}$*. Antag att* $\phi \in A_{k_1}(V)$ *och* $\psi \in A_{k_2}(V)$*, och definiera funktionen* $\phi \wedge \psi \colon V^k \to \mathbf{K}$ *genom formeln*

$$(1) \qquad (\phi \wedge \psi)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \sum_{(I_1,I_2) \in \operatorname{Part}_{k_1,k_2}(K)} \operatorname{sgn}(I_1, I_2)\, \phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2}).$$

Då är $\phi \wedge \psi$ *multilinjär och alternerande, dvs. ett element i* $A_k(V)$*.*

Man kallar $\phi \wedge \psi$ för *kilprodukten* eller *yttre produkten* av ϕ och ψ och utläser det som ϕ *kil* ψ.

För tydlighets skull skriver vi ut definitionen av $\phi \wedge \psi$ explicit i fallen $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ och $k_1 = k_2 = 2$. I det förstnämnda fallet är

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi)(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \phi(v_1)\psi(v_2, v_3, v_4) - \phi(v_2)\psi(v_1, v_3, v_4) \\ &\quad + \phi(v_3)\psi(v_1, v_2, v_4) - \phi(v_4)\psi(v_1, v_2, v_3), \end{aligned}$$

och i det andra fallet är

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi)(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \phi(v_1, v_2)\psi(v_3, v_4) - \phi(v_1, v_3)\psi(v_2, v_4) \\ &\quad + \phi(v_1, v_4)\psi(v_2, v_3) + \phi(v_2, v_3)\psi(v_1, v_4) - \phi(v_2, v_4)\psi(v_1, v_3) \\ &\quad + \phi(v_3, v_4)\psi(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Bevis. Sätt $\omega = \phi \wedge \psi$; för att visa att ω är multilinjär räcker det att visa att varje term i summan (1) är multilinjär, dvs. linjär i varje variabel v_i för sig då övriga variabler hålls fixa. Men detta är uppenbart, ty om $i \in I_1$ så är uttrycket $\phi(v_{I_1})$ linjärt i variabeln v_i, medan uttrycket $\psi(v_{I_2})$ är konstant eftersom det inte innehåller variablen v_i, och om $i \in I_2$ är i stället $\phi(v_{I_1})$ konstant och $\psi(v_{I_2})$ linjärt i v_i.

Vi skall nu visa att formen ω är alternerande. Antag därför att $v_i = v_{i+1}$, och betrakta en partition (I_1, I_2) av K.

Om i och $i+1$ båda tillhör I_1, så är två intilliggande vektorer i k_1-tipeln v_{I_1} lika och det följer att $\phi(v_{I_1}) = 0$, eftersom formen ϕ är alternerande.

På motsvarande sätt är $\psi(v_{I_2}) = 0$ om både i och $i+1$ tillhör I_2.

I summan som definierar $\omega(v_1, v_2, \dots, v_k)$ behöver vi därför bara betrakta termer som svarar mot partitioner (I_1, I_2) där i och $i+1$ tillhör olika delmängder I_1 och I_2, ty alla andra termer är 0. Vi kan gruppera dessa partitioner två och två på följande vis. Om (I_1, I_2) är en partition med $i \in I_1$, $i+1 \in I_2$, så låter vi (J_1, J_2) vara den partition som fås genom att byta plats på i och $i+1$, dvs. $J_1 = I_1 \cup \{i+1\} \setminus \{i\}$ och $J_2 = I_2 \cup \{i\} \setminus \{i+1\}$. Då blir förstås (J_1, J_2) en partition med $i+1 \in J_1$ och $i \in J_2$.

Betrakta nu de båda termerna i summan $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ som svarar mot partitionerna (I_1, I_2) och (J_1, J_2). Partitionen (J_1, J_2) innehåller exakt en inversion mer än partitionen (I_1, I_2), nämligen inversionen $(i+1, i)$. Därför är $\operatorname{sgn}(J_1, J_2) = -\operatorname{sgn}(I_1, I_2)$. Eftersom $v_i = v_{i+1}$, så är vidare $v_{I_1} = v_{J_1}$ och $v_{I_2} = v_{J_2}$, varför $\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2}) = \phi(v_{J_1})\psi(v_{J_2})$. Det följer att

$$\operatorname{sgn}(I_1, I_2)\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2}) + \operatorname{sgn}(J_1, J_2)\phi(v_{J_1})\psi(v_{J_2}) = 0.$$

Genom att gruppera partitionerna parvis på detta sätt och summera alla termer ser vi att $\omega(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$. □

Sats 7.1.9 definierar kilprodukten $\phi \wedge \psi$ då $\phi \in A_{k_1}(V)$ och $\psi \in A_{k_2}(V)$ för godtyckliga positiva heltal k_1 och k_2. Men vi har definierat $A_k(V)$ även för $k = 0$ genom att sätta $A_0(V) = \mathbf{K}$, och vi utvidgar nu därför kilprodukten genom att för $\alpha \in A_0(V)$ och $\phi \in A_k(V)$, $k \geq 0$, definiera

$$\alpha \wedge \phi = \phi \wedge \alpha = \alpha\phi.$$

Sats 7.1.10 *Kilprodukten har följande egenskaper:*

(a) *Om $\phi \in A_{k_1}(V)$, $\psi_1, \psi_2 \in A_{k_2}(V)$ och $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$, så är*

$$\phi \wedge (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1(\phi \wedge \psi_1) + \alpha_2(\phi \wedge \psi_2) \qquad \text{(distributivitet)}$$

(b) *Om $\phi \in A_{k_1}(V)$ och $\psi \in A_{k_2}(V)$, så är*

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{k_1 k_2}\psi \wedge \phi \qquad \text{(skevkommutativitet)}$$

(c) *Om* $\phi \in A_{k_1}(V)$ *och talet* k_1 *är udda, så är*

$$\phi \wedge \phi = 0 \qquad \text{(alternering)}$$

(d) *Om* $\phi \in A_{k_1}(V)$, $\psi \in A_{k_2}(V)$ *och* $\omega \in A_{k_3}(V)$, *så är*

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \omega = \phi \wedge (\psi \wedge \omega) \qquad \text{(associativitet)}$$

Bevis. Identiteterna är triviala i de fall då något av gradtalen k_i är lika med 0, så vi antar därför att alla dessa parametrar är positiva. De aktuella kilprodukterna definieras därför av sats 7.1.9.

(a) följer direkt ur definitionen av $\phi \wedge \psi$, ty högerledet i definitionen är uppenbarligen linjärt i ψ.

(b) Sätt $k = k_1 + k_2$ och $K = \{1, 2, \dots, k\}$. Genom att använda lemma 7.1.7 får vi

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi)(v_1, v_2, \dots, v_k) &= \sum_{(I_1,I_2)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(K)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2)\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2}) \\ &= \sum_{(I_2,I_1)\in \mathrm{Part}_{k_2,k_1}(K)} (-1)^{k_1k_2}\,\mathrm{sgn}(I_2, I_1))\,\psi(v_{I_2})\phi(v_{I_1}) \\ &= (-1)^{k_1k_2}(\psi \wedge \phi)(v_1, v_2, \dots, v_k).\end{aligned}$$

(c) Genom att sätta $\psi = \phi$ i (b) får vi likheten $\phi \wedge \phi = -\phi \wedge \phi$ för former av udda grad, och förutsatt att skalärkroppen $\mathbf{K}$ har karakteristik $\neq 2$ (dvs. att inte $2 = 0$) följer det att $\phi \wedge \phi = 0$.

Ett alternativt bevis, som fungerar för godtycklig karakteristik, fås om man noterar att för exakt hälften av alla partitioner (I_1, I_2) i $\mathrm{Part}_{k_1,k_1}(K)$ innehåller mängden I_1 talet 1. Om vi definierar $\mathcal{M}$, som mängden av alla sådana partitioner, är således

$$\mathrm{Part}_{k_1,k_1}(K) = \bigcup_{(I_1,I_2)\in\mathcal{M}} \{(I_1, I_2), (I_2, I_1)\},$$

och eftersom $\mathrm{sgn}(I_1, I_2) = (-1)^{k_1^2}\,\mathrm{sgn}(I_2, I_1) = -\,\mathrm{sgn}(I_2, I_1)$, blir

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \phi)(v_1, v_2, \dots, v_{2k_1}) &= \sum_{(I_1,I_2)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_1}(K)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2)\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2}) \\ &= \sum_{(I_1,I_2)\in\mathcal{M}} \big(\mathrm{sgn}(I_1, I_2)\,\phi(v_{I_1})\phi(v_{I_2}) + \mathrm{sgn}(I_2, I_1)\,\phi(v_{I_2})\phi(v_{I_1})\big) \\ &= \sum_{(I_1,I_2)\in\mathcal{M}} 0 = 0.\end{aligned}$$

(d) Sätt $k = k_1 + k_2 + k_3$ och $K = \{1, 2, \ldots, k\}$. Genom att använda definitionen av kilprodukt två gånger samt lemma 7.1.8 erhåller vi

$$
\begin{aligned}
((\phi \wedge \psi) \wedge \omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) &= \sum_{(L,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1+k_2,k_3}(K)} \mathrm{sgn}(L, I_3)(\phi \wedge \psi)(v_L)\,\omega(v_{I_3}) \\
&= \sum_{(L,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1+k_2,k_3}(K)} \mathrm{sgn}(L, I_3)\Big(\sum_{(I_1,I_2)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(L)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2)\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2})\Big)\,\omega(v_{I_3}) \\
&= \sum_{(L,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1+k_2,k_3}(K)} \sum_{(I_1,I_2)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(L)} \mathrm{sgn}(L, I_3)\,\mathrm{sgn}(I_1, I_2)\,\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2})\omega(v_{I_3}) \\
&= \sum_{(L,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1+k_2,k_3}(K)} \sum_{(I_1,I_2)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(L)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2, I_3)\,\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2})\omega(v_{I_3}) \\
&= \sum_{(I_1,I_2,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2,k_3}(K)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2, I_3)\,\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2})\omega(v_{I_3}),
\end{aligned}
$$

där den sista likheten beror på att

$$\mathrm{Part}_{k_1,k_2,k_3}(K) = \bigcup_{L\subseteq K,\,|L|=k_1+k_2} \{(I_1, I_2, I_3) \mid I_3 = K\setminus L \text{ och } \quad (I_1, I_2) \in \mathrm{Part}_{k_1,k_2}(L)\}.$$

Helt analoga räkningar ger att också

$$(\phi \wedge (\psi \wedge \omega))(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \sum_{(I_1,I_2,I_3)\in \mathrm{Part}_{k_1,k_2,k_3}(K)} \mathrm{sgn}(I_1, I_2, I_3)\phi(v_{I_1})\psi(v_{I_2})\omega(v_{I_3}).$$

Det följer att $((\phi \wedge \psi) \wedge \omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (\phi \wedge (\psi \wedge \omega))(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. □

Associativiteten medför att vi kan utelämna parenteser i kilprodukter. I forsättningen skriver vi således $\phi\wedge\psi\wedge\omega$ istället för $(\phi\wedge\psi)\wedge\omega$ eller $\phi\wedge(\psi\wedge\omega)$.

Korollarium 7.1.11 *Antag att $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k \in A_1(V)$.*

(a) *Om σ är en permutation av $\{1, 2, \ldots, k\}$, så är*

$$\phi_{\sigma(1)} \wedge \phi_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \phi_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k.$$

(b) *Om $i \neq j$ och $\phi_i = \phi_j$, så är $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k = 0$.*

Bevis. Skevkommutativiteten ger i det här fallet att $\phi_i \wedge \phi_j = -\phi_j \wedge \phi_i$ för alla index i och j. Påstående (a) följer genom upprepad användning av detta. Påstående (b) kan nu reduceras till fallet $\phi_{k-1} = \phi_k$; då är $\phi_{k-1} \wedge \phi_k = 0$, och eftersom $\psi \wedge 0 = 0$ för alla former ψ, är saken klar. □

Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. I avsnitt 4.2 definierade vi transponatet T^t till T som den linjära avbildning $T^t\colon W' \to V'$ mellan dualrummen som ges av att $(T^t\phi)(v) = \phi(Tv)$ för alla $v \in V$ och alla $\phi \in W'$.

Eftersom $V' = A_1(V)$ och $W' = A_1(W)$, kan vi uppfatta transponatet T^t som en linjär avbildning $A_1(W) \to A_1(V)$.

Det är enkelt att generalisera konstruktionen så att den ger avbildningar $A_k(W) \to A_k(V)$. För varje $\phi \in A_k(W)$ är nämligen avbildningen

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \mapsto \phi(Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_k)$$

från V^k till $\mathbf{K}$ multilinjär och alternerande, dvs. ett element i $A_k(V)$.

Definition 7.1.12 För linjära avbildningar $T\colon V \to W$ och alternerande former $\phi \in A_k(W)$ $(k > 0)$ är $T^t\phi$ det element i $A_k(V)$ som fås genom att sätta

$$(T^t\phi)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \phi(Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_k).$$

Avbildningen $T^t\colon A_k(W) \to A_k(V)$ kallas *transponatet* till T, och formen $T^t\phi$ kallas *pullbacken* av ϕ under T.

Sats 7.1.13 *Låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Transponaten*

$$T^t\colon A_k(W) \to A_k(V)$$

är linjära avbildningar som uppfyller

$$T^t(\phi \wedge \psi) = T^t\phi \wedge T^t\psi \tag{2}$$

för alla $\phi \in A_{k_1}(W)$ och $\psi \in A_{k_2}(W)$.

Bevis. Lineariteten är uppenbar, och egenskapen (2) följer enkelt ur kilproduktens definition. □

Sats 7.1.14 *För transponaten till två linjära avbildningar $S\colon U \to V$ och $T\colon V \to W$ gäller*

$$(TS)^t = S^tT^t.$$

Bevis. Antag att $\phi \in A_k(W)$ och $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Då är

$$\begin{aligned}((TS)^t\phi)(u_1, u_2, \ldots, u_k) &= \phi(TSu_1, TSu_2, \ldots, TSu_k)\\ &= (T^t\phi)(Su_1, Su_2, \ldots, Su_k)\\ &= (S^t(T^t\phi))(u_1, u_2, \ldots, u_k)\\ &= ((S^tT^t)\phi)(u_1, u_2, \ldots, u_k).\end{aligned}$$

□

Övningar

I uppgifterna nedan betecknar χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^4$.

7.1 Sätt $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 1)$ och $v_3 = (1, 0, 3, 2)$. Beräkna

a) $(\chi_1 \wedge \chi_2)(v_1, v_2)$ b) $(\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_4)(v_1, v_2, v_3)$

7.2 Sätt $\omega = (2\chi_1 + \chi_2) \wedge (3\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3)$.

a) Skriv 2-formen ω på enklast möjliga form som en linjärkombination av formerna $\chi_i \wedge \chi_j$.
b) Beräkna $\omega(v, w)$ för vektorerna $v = (2, 1, 3, 2)$ och $w = (0, 4, -1, 5)$.
c) Skriv 3-formen $\omega \wedge (\chi_1 + \chi_2 + \chi_4)$ på enklast möjliga form som en linjärkombination av formerna $\chi_i \wedge \chi_j \wedge \chi_k$.

7.3 Sätt $\phi = \chi_1 \wedge \chi_2 + \chi_3 \wedge \chi_4$ och $\psi = \chi_1 + \chi_3$. Skriv $\phi \wedge \phi$, $\psi \wedge \psi$ och $\phi \wedge \psi$ på så enkel form som möjligt.

7.4 Jämför $\chi_3 \wedge \chi_1 \wedge \chi_4 \wedge \chi_2$ med $\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4$.

7.5 Låt ξ_1, ξ_2, ξ_3 och η_1, η_2 beteckna standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^3$ resp. $\mathbf{K}^2$. Låt vidare $S\colon \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^2$ vara avbildningen med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(med avseende på standardbaserna), och låt $T\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^3$ vara avbildningen med matrisen A^t. Bestäm pullbackerna

a) $S^t(\eta_1 \wedge \eta_2)$ b) $T^t(\xi_1 \wedge \xi_3)$ c) $T^t(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3)$

7.2 Rummen $\mathbf{A}_k(\mathbf{V})$

I det här avsnittet antas vektorrummet V vara ändligtdimensionellt.

Sätt $n = \dim V$, och låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en bas för V. Den duala basen i V' betecknas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, vilket innebär att

$$\xi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Varje vektor $v \in V$ kan nu skrivas på formen $v = \sum_{j=1}^n \xi_j(v) e_j$.

Låt N vara mängden $\{1, 2, \dots, n\}$; mängden av alla delmängder till N med exakt k stycken element kommer att betecknas $\mathcal{P}_k(N)$.

För varje $I \in \mathcal{P}_k(N)$ låter vi som tidigare e_I beteckna den k-tipel av vektorer som fås genom att ordna elementen i I i växande ordning $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ och sätta

$$e_I = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}),$$

medan ξ^I får beteckna den alternerande k-formen

$$\xi^I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}.$$

Vi skall i det här avsnittet karakterisera rummen $A_k(V)$ av alternerande k-former. Per definition är $A_0(V) = \mathbf{K}$, och $A_1(V) = V' =$ dualrummet till V. Vi har vidare redan konstaterat att $A_k(V) = \{0\}$ ifall $k > n$. Detta innebär att $\dim A_0(V) = 1$, $\dim A_1(V) = \dim V$ och $\dim A_k(V) = 0$ om $k > n$. Följande lemma utgör första steget i en karakterisering av $A_k(V)$ för övriga gradtal k.

Lemma 7.2.1 *Låt ϕ, $\psi \in A_k(V)$. Om $\phi(e_I) = \psi(e_I)$ för alla $I \in \mathcal{P}_k(N)$, så är $\phi = \psi$. Speciellt är $\phi = 0$ om $\phi(e_I) = 0$ för alla I.*

Bevis. Genom att betrakta differensen $\phi - \psi$ ser vi att det räcker att bevisa specialfallet.

Antag därför att $\phi(e_I) = 0$ för alla $I \in \mathcal{P}_k(N)$. På grund av sats 7.1.4 (a) och (c) är då $\phi(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = 0$ för alla k-tipler $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, så det följer av multilineariteten att $\phi = 0$. □

Lemma 7.2.2 *För alla delmängder I, $J \in \mathcal{P}_k(N)$ är*

$$\xi^I(e_J) = \begin{cases} 1 & \text{om } I = J \\ 0 & \text{om } I \neq J. \end{cases}$$

Bevis. Vi visar först att $\xi^I(e_I) = 1$. Detta gäller per definition av dual bas om $|I| = 1$. Antag induktivt att det gäller för delmängder med $k-1$ element, och låt I vara en mängd med k element. Låt i_k beteckna det största elementet i I, och sätt $I' = I \setminus \{i_k\}$. Då är

$$\xi^I(e_I) = (\xi^{I'} \wedge \xi_{i_k})(e_I) = \sum_{(I_1, \{i\}) \in \mathrm{Part}_{k-1,1}(I)} \mathrm{sgn}(I_1, \{i\})\, \xi^{I'}(e_{I_1}) \xi_{i_k}(e_i).$$

Eftersom $\xi_{i_k}(e_i) = 0$ för $i \neq i_k$ reduceras ovanstående summa till en term, nämligen den som svarar mot att $i = i_k$, dvs. partitionen $(I', \{i_k\})$. Denna partition innehåller inga inversioner och här därför signum $+1$. Det följer att

$\xi^I(e_I) = \xi^{I'}(e_{I'}) = 1$, där den sista likheten gäller på grund av induktionsantagandet. Därmed är induktionssteget genomfört.

Antag därefter att $I \neq J$. Då finns det ett element $i_p \in I$ som inte förekommer i J. Sätt $I' = I \setminus \{i_p\}$. Associativitet och skevkommutativitet ger att $\xi^I = \pm\, \xi^{I'} \wedge \xi_{i_p}$, så påståendet i satsen följer om vi visar att $(\xi^{I'} \wedge \xi_{i_p})(e_J) = 0$. Definitionen av kilprodukt ger

$$(\xi^{I'} \wedge \xi_{i_p})(e_J) = \sum_{(I_1,\{i\}) \in \mathrm{Part}_{k-1,1}(J)} \mathrm{sgn}(I_1, \{i\})\, \xi^{I'}(e_{I_1})\xi_{i_p}(e_i).$$

Här är $\xi_{i_p}(e_i) = 0$ för alla $i \in J$eftersom $i_p \notin J$. Alla termer i summan är därför noll, varför $(\xi^{I'} \wedge \xi_{i_p})(e_J) = 0$. □

Sats 7.2.3 (a) $\dim A_k(V) = \binom{n}{k}$, *där* $n = \dim V$.
(b) *Mängden* $\{\xi^I \mid I \in \mathcal{P}_k(N)\}$ *är en bas för vektorrummet* $A_k(V)$.
(c) *För varje* $\phi \in A_k(V)$ *är* $\displaystyle\phi = \sum_{I \in \mathcal{P}_k(N)} \phi(e_I)\, \xi^I.$

Bevis. Sätt $p = \binom{n}{k}$ = antalet element i $\mathcal{P}_k(N)$, och definiera en avbildning

$$F\colon A_k(V) \to \prod_{I \in \mathcal{P}_k(N)} \mathbf{K} = \mathbf{K}^p$$

genom att sätta

$$F(\phi) = (\phi(e_I))_{I \in \mathcal{P}_k(N)}.$$

Avbildningen F är uppenbarligen linjär. Lemma 7.2.1 visar att den är injektiv, och lemma 7.2.2 innebär att F avbildar familjen $\{\xi^I \mid I \in \mathcal{P}_k(N)\}$ på standardbasvektorerna i $\mathbf{K}^p$. Avbildningen är därför också surjektiv, dvs. en isomorfi. Det följer att $\dim A_k(V) = p$ och att $\{\xi^I \mid I \in \mathcal{P}_k(N)\}$ är en bas för $A_k(V)$. Påstående (c) är en omedelbar konsekvens av att F är den till basen hörande koordinatavbildningen och att $F_I(\phi) = \phi(e_I)$ är den I:te koordinaten. □

Det endimensionella vektorrummet $A_n(V)$ av alternerande n-former på V spelar en speciellt viktig roll i fortsättningen.

Sats 7.2.4 *Antag att* $\omega \in A_n(V)$ *är skild från nollformen, och låt* v_1, v_2, …, v_n *vara vektorer i* V. *Då bildar mängden* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *en bas för* V *om och endast om* $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$.

Bevis. Om $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, så är vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_n$ enligt korollarium 7.1.5 linjärt oberoende, och eftersom de är lika många som rummets dimension bildar de en bas.

Antag omvänt att vektorerna bildar en bas. Låt $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ vara motsvarande duala bas och bilda n-formen $\omega_0 = \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_n$. Då är $\omega = c\omega_0$ för någon konstant $c \neq 0$, och enligt lemma 7.2.2 är

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = c\omega_0(v_1, v_2, \dots, v_n) = c \neq 0. \qquad \square$$

Sats 7.2.5 *Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara en bas för V, och låt $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ vara motsvarande duala bas. Antag att $\omega \in A_n(V)$, och sätt $c = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$. För varje uppsättning $v_1, v_2, \dots, v_n$ av vektorer i V är då*

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = c \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \xi_1(v_{\sigma(1)})\, \xi_2(v_{\sigma(2)}) \cdots \xi_n(v_{\sigma(n)}),$$

där summan tas över alla permutationer σ av $\{1, 2, \dots, n\}$.

Bevis. Enligt sats 7.2.3 (c) är $\omega = c\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$. Av kilproduktsdefinitionen följer med hjälp av induktion (jämför beviset för sats 7.1.10 (d)) att

$$\begin{aligned}
&(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n)(v_1, v_2, \dots, v_n) \\
&\quad = \sum_{(\{i_1\},\dots,\{i_n\}) \in \operatorname{Part}_{1,\dots,1}(N)} \operatorname{sgn}(\{i_1\}, \dots, \{i_n\})\, \xi_1(v_{i_1}) \xi_2(v_{i_2}) \cdots \xi_n(v_{i_n}) \\
&\quad = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \xi_1(v_{\sigma(1)})\, \xi_2(v_{\sigma(2)}) \cdots \xi_n(v_{\sigma(n)}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Vi kommer senare att behöva följande utvidgningssats.

Sats 7.2.6 *Låt W vara ett linjärt delrum till vektorrummet V. Då kan varje alternerande k-form på W utvidgas till en alternerande k-form på V, dvs. om $\phi \in A_k(W)$ så finns det ett $\Phi \in A_k(V)$ så att $\Phi(w_1, \dots, w_k) = \phi(w_1, \dots, w_k)$ för alla vektorer $w_1, w_2, \dots, w_k$ i W.*

Bevis. Påståendet är trivialt om $k > \dim W$, eftersom ϕ i så fall är nollformen. Så antag att $k \leq \dim W = m$, välj en bas $e_1, e_2, \dots, e_m$ för W och utvidga den med vektorer till en bas för hela V. Låt $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ vara motsvarande duala bas för V'. Den duala basen i W' till basen $e_1, e_2, \dots, e_m$ består då av restriktionerna av formerna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ till delrummet W. Om vi sätter $\eta_i = \xi_i|_W$, så följer det således av sats 7.2.3 att

$$\phi = \sum_{I \in \mathcal{P}_k(M)} \phi(e_I) \eta^I,$$

där $\mathcal{P}_k(M)$ betecknar mängden av alla delmängder till $M = \{1, 2, \dots, m\}$ med exakt k stycken element, och vi får en utvidgning Φ av ϕ till hela V genom att helt enkelt definiera

$$\Phi = \sum_{I \in \mathcal{P}_k(M)} \phi(e_I) \xi^I. \qquad \square$$

Övningar

I uppgifterna nedan är χ_1, χ_2, χ_3 standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^3$. Vi kallar formerna $\chi_1 \wedge \chi_2$, $\chi_1 \wedge \chi_3$, $\chi_2 \wedge \chi_3$ för standardbasen i $A_2(\mathbf{K}^3)$.

7.6 Bestäm koordinaterna för 2-formen $(\chi_1 + 2\chi_2) \wedge (\chi_1 + \chi_3)$ med avseende på standardbasen i $A_2(\mathbf{K}^3)$.

7.7 Låt T vara den operator på $\mathbf{K}^3$ vars matris med avseende på standardbasen är

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm koordinaterna för $T^t(\chi_1 \wedge \chi_2)$, $T^t(\chi_1 \wedge \chi_3)$ och $T^t(\chi_2 \wedge \chi_3)$ samt matrisen för avbildningen $T^t\colon A_2(\mathbf{K}^3) \to A_2(\mathbf{K}^3)$ med avseende på standardbasen i $A_2(\mathbf{K}^3)$.

b) Bestäm $T^t(\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3)$.

7.8 Låt V beteckna delrummet $\{x \in \mathbf{K}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$. Låt ϕ och ψ beteckna restriktionen av $\chi_1 \wedge \chi_2$ resp. $\chi_1 \wedge \chi_3$ till delrummet V. Visa att $\phi = 2\psi$.

7.3 Determinanten av en linjär operator

I det här avsnittet betecknar V ett n-dimensionellt vektorrum över $\mathbf{K}$. Vi fixerar en bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ för V, låter $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara motsvarande duala bas samt sätter

$$\omega_0 = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n.$$

Den alternerande n-formen ω_0 är en bas för det endimensionella rummet $A_n(V)$; den beror givetvis av valet av bas för V. Vi erinrar om att

$$\omega_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$$

Sats 7.3.1 *Låt $T\colon V \to V$ vara en linjär operator. Då finns det en entydigt bestämd skalär* $\det T$ *så att*

$$T^t\omega = (\det T)\,\omega$$

för alla $\omega \in A_n(V)$.

Vi kallar $\det T$ för *determinanten* till T.

Bevis. De enda linjära operatorerna på ett endimensionellt vektorrum är multiplikation med en konstant skalär. Eftersom rummet $A_n(V)$ är endimensionellt, och T^t är en linjär operator på detta rum, finns det en entydigt bestämd skalär, som vi kallar $\det T$, så att $T^t\omega = (\det T)\omega$ för alla alternerande n-former ω. □

Korollarium 7.3.2 $\det T = (T^t\omega_0)(e_1, e_2, \dots, e_n) = \omega_0(Te_1, Te_2, \dots, Te_n)$.

Bevis. Följer av att $\omega_0(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. □

Sats 7.3.3 *Nödvändigt och tillräckligt för att en linjär operator T på V skall vara inverterbar är att* $\det T \neq 0$.

Bevis. Operatorn T är inverterbar om och endast om vektorerna Te_1, Te_2, …, Te_n bildar en bas för V, och enligt sats 7.2.4 är detta fallet om och endast om $\det T = \omega_0(Te_1, Te_2, \dots, Te_n) \neq 0$. □

Sats 7.3.4 *Om S och T är linjära operatorer på vektorrummet V och I betecknar den identiska operatorn, så är*

(a) $\det ST = \det S \cdot \det T$

(b) $\det I = 1$

(c) $\det T^{-1} = 1/\det T$, *förutsatt att T^{-1} existerar.*

Bevis. För transponatet av en produkt gäller $(ST)^t = T^tS^t$. Sats 7.3.1 ger därför

$$(\det ST)\,\omega = (ST)^t\omega = T^tS^t\omega = (\det T)(S^t\omega) = (\det T)(\det S)\,\omega,$$

vilket medför (a).

Eftersom transponatet I^t till den identiska operatorn på V är den identiska operatorn på $A_n(V)$, är vidare $(\det I)\,\omega = I^t\omega = \omega$, vilket medför (b).

Egenskapen (c) följer av (a) och (b), ty $TT^{-1} = I$ medför att $\det T \cdot \det T^{-1} = \det TT^{-1} = \det I = 1$. □

Sats 7.3.5 *Antag att W är ett vektorrum med samma dimension som vektorrummet V.*

(a) *Om $S\colon V \to W$ och $R\colon W \to V$ är linjära avbildningar, så är*

$$\det SR = \det RS.$$

(b) *Antag att $T\colon V \to V$ är linjär och att $S\colon V \to W$ är en isomorfi. Då är*

$$\det STS^{-1} = \det T.$$

Bevis. (a) Antag först att S är en isomorfi så att $S^{-1}\colon W \to V$ existerar. Låt ω vara en godtycklig alternerande n-form på V och sätt

$$\phi = (S^{-1})^t\omega = (S^t)^{-1}\omega.$$

Observera att pullbacken ϕ tillhör $A_n(W)$, att RS är en operator på V och att SR är en operator på W. Determinantdefinitionen ger därför

$$\begin{aligned}(\det RS)\omega &= (RS)^t\omega = S^tR^t\omega = S^tR^t(S^t\phi) = S^t(SR)^t\phi \\ &= S^t\big((\det SR)\phi\big) = (\det SR)S^t\phi = (\det SR)\omega,\end{aligned}$$

varav följer att $\det RS = \det SR$.

Om S inte är en isomorfi, så är S varken surjektiv eller injektiv. Ingen av de båda operatorerna SR och RS på W resp. V är därför inverterbar. Det följer nu av Sats 7.3.3 att $\det SR = \det RS = 0$.

(b) Genom att tillämpa (a) på avbildningarna $R = TS^{-1}\colon W \to V$ och $S\colon V \to W$ erhåller vi $\det STS^{-1} = \det SR = \det RS = \det T$. □

Sats 7.3.6 *För transponatet $T^t\colon V' \to V'$ till en linjär operator T på V gäller att*

$$\det T^t = \det T.$$

Bevis. Definiera avbildningen $\Omega\colon V' \times V' \times \cdots \times V' \to \mathbf{K}$ genom att sätta

$$\Omega(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Det följer då av sats 7.1.10 att avbildningen Ω är en alternerande n-form på V', dvs. ett element i $A_n(V')$, och enligt definitionen av $\det T^t$ är därför

$$(T^t)^t\Omega = (\det T^t)\,\Omega.$$

Men vi kan beräkna $(T^t)^t\Omega$ på följande sätt:

$$\begin{aligned}(T^t)^t\Omega(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) &= \Omega(T^t\phi_1, T^t\phi_2, \ldots, T^t\phi_n) \\ &= (T^t\phi_1 \wedge T^t\phi_2 \wedge \cdots \wedge T^t\phi_n)(e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &= T^t(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &= (\det T)(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &= (\det T)\,\Omega(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n),\end{aligned}$$

där vi i den näst sista likheten utnyttjat definitionen av $\det T$. Följaktligen är $(T^t)^t\Omega = (\det T)\,\Omega$, och vi har därför likheten

$$(\det T^t)\,\Omega = (\det T)\,\Omega.$$

Eftersom Ω inte är nollformen, drar vi nu slutsatsen att $\det T^t = \det T$. □

Antag att $V = W_1 \oplus W_2$, dvs. att varje $v \in V$ har en unik uppdelning $v = w_1 + w_2$ med $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, och låt T vara en linjär operator på V. Vi säger att T är en *direkt summa av operatorerna* T_1 och T_2 på W_1 resp. W_2, och skriver $T = T_1 \oplus T_2$, om $T(w_1 + w_2) = T_1w_1 + T_2w_2$ för alla $w_1 \in W_1$ och $w_2 \in W_2$.

Sats 7.3.7 *Låt T vara en linjär operator på V och antag att $T = T_1 \oplus T_2$. Då är*

$$\det T = \det T_1 \cdot \det T_2.$$

Bevis. Låt T_i vara operatorer på delrummen W_i, sätt $n_i = \dim W_i$ och $n = n_1 + n_2 = \dim V$. Låt vidare $P_i \colon V \to W_i$ vara de naturliga projektionerna $P_i(w_1 + w_2) = w_i$, och välj nollskilda former $\omega_i \in A_{n_i}(W_i)$. Pullbackerna $\tilde{\omega}_i = P_i{}^t\omega_i$ är då alternerande n_i-former på V, och kilprodukten $\omega = \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2$ är en form i $A_n(V)$.

Eftersom $P_1 v = 0$ om $v \in W_2$, är $\tilde{\omega}_1(u_1, u_2, \dots, u_{n_1}) = 0$ så snart någon av vektorerna $u_1, u_2, \dots, u_{n_1}$ ligger i W_2, och formen $\tilde{\omega}_2$ har förstås motsvarande egenskap. Det följer därför av kilproduktens definition att

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega_1(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}) \cdot \omega_2(v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_n)$$

om vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_{n_1}$ ligger i W_1 och vektorerna v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, $\dots$, v_n ligger i W_2. Om vi dessutom väljer dessa vektorer så att

$$\omega_1(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}) = \omega_2(v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_n) = 1,$$

så följer det att

$$\begin{aligned}
\det T &= \omega(Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n)\\
&= \omega_1(Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_{n_1}) \cdot \omega_2(Tv_{n_1+1}, Tv_{n_1+2}, \dots, Tv_n)\\
&= \omega_1(T_1v_1, T_1v_2, \dots, T_1v_{n_1}) \cdot \omega_2(T_2v_{n_1+1}, T_2v_{n_1+2}, \dots, T_2v_n)\\
&= \det T_1 \cdot \det T_2.
\end{aligned}$$

□

Sats 7.3.8 *Låt T vara en linjär operator på V och antag att W är ett invariant delrum. För determinanterna till restriktionen $T|_W \colon W \to W$ och till den inducerade operatorn $T_{V/W} \colon V/W \to V/W$ gäller sambandet*

$$\det T = \det T|_W \cdot \det T_{V/W}.$$

Bevis. Sätt $n = \dim V$ och $m = \dim W$; då är $n - m = \dim V/W$. Välj former $\phi \in A_m(W)$ och $\psi \in A_{n-m}(V/W)$ skilda från nollformerna. Enligt sats 7.2.6 har formen ϕ en utvidgning till en alternerande form $\Phi \in A_m(V)$.

Låt $\pi \colon V \to V/W$ vara den kanoniska projektionen på kvotrummet. Pullbacken $\Psi = \pi^t\psi$ av formen ψ är en alternerande $(n-m)$-form på V, dvs. ett element i $A_{n-m}(V)$.

Sätt $\omega = \Phi \wedge \Psi$. Den alternerande formen ω ligger i $A_n(V)$, och eftersom $\Psi(u_1, u_2, \dots, u_{n-m}) = 0$ så snart $u_i \in W$ för något i, följer det av definitionen av kilprodukt att

$$\omega(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \phi(w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot \Psi(v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n),$$

om vektorerna $w_1, w_2, \dots, w_m$ alla ligger i W.

Välj nu vektorerna $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ och v_{m+1}, v_{m+2}, $\dots$, $v_n \in V$ så att $\phi(w_1, w_2, \dots, w_m) = 1$ och $\psi(\pi v_{m+1}, \pi v_{m+2}, \dots, \pi v_n) = 1$, och följaktligen

$$\omega(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = 1.$$

Då är $\phi(Tw_1, Tw_2, \dots, Tw_m) = \det T|_W$ och

$$\begin{aligned}\Psi(Tv_{m+1}, Tv_{m+2}, \dots, Tv_n) &= \psi(\pi Tv_{m+1}, \pi Tv_{m+2}, \dots, \pi Tv_n)\\ &= \psi(T_{V/W}\pi v_{m+1}, T_{V/W}\pi v_{m+2}, \dots, T_{V/W}\pi v_n)\\ &= \det T_{V/W},\end{aligned}$$

varför det följer att

$$\begin{aligned}\det T &= \omega(Tw_1, \dots, Tw_m, Tv_{m+1}, \dots, Tv_n)\\ &= \phi(Tw_1, Tw_2, \dots, Tw_m) \cdot \Psi(Tv_{m+1}, Tv_{m+2}, \dots, Tv_n)\\ &= \det T|_W \cdot \det T_{V/W}.\end{aligned}$$

□

Övningar

7.9 Bestäm $\det T$ för operatorn T i uppgift 7.6.

7.10 Visa att för operatorer T på ett n-dimensionellt rum är $\det \lambda T = \lambda^n \det T$.

7.4 Determinanten av en matris

Definition 7.4.1 En $n \times n$-matris A kan uppfattas som en linjär avbildning $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$. Determinanten för denna linjära avbildning kallas för *determinanten av matrisen* A och betecknas $\det A$.

Om matrisen är given som

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

använder vi vanligen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

som beteckning på matrisens determinant.

En linjär operators matris beror på valet av koordinatavbildning, men alla matriser har samma determinant, och denna determinant är enligt nästa sats lika med operatorns determinant.

Sats 7.4.2 *Låt $T\colon V \to V$ vara en linjär avbildning och låt $\widetilde{T}$ vara avbildningens matris med avseende på någon koordinatavbildning. Då är*

$$\det T = \det \widetilde{T}.$$

Bevis. Låt $\xi\colon V \to \mathbf{K}^n$ vara koordinatavbildningen. Avbildningens matris $\widetilde{T}$ är per definition matrisen för den linjära avbildningen $\xi T \xi^{-1}\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$, och determinanten för matrisen $\widetilde{T}$ är per definition lika med determinanten för avbildningen $\xi T \xi^{-1}$. Det följer därför av sats 7.3.5 att $\det \tilde{T} = \det \xi T \xi^{-1} = \det T$. □

Sats 7.4.3 *För varje kvadratisk matris A är*

$$\det A^t = \det A.$$

Bevis. Låt T vara en linjär operator vars matris med avseende på en given bas är lika med A. Med avseende på den duala basen har då den transponerade operatorn T^t matrisen A^t. Enligt sats 7.3.6 är $\det T^t = \det T$, så det följer av sats 7.4.2 att $\det A^t = \det A$. □

Låt $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ beteckna standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^n$, dvs.

$$\chi_k(x) = x_k \text{ för alla } x \in \mathbf{K}^n,$$

och sätt

$$\omega_0 = \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \dots \wedge \chi_n.$$

Formen $\omega_0 \in A_n(\mathbf{K}^n)$ är entydigt bestämd av villkoret

$$\omega_0(E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*n}) = 1,$$

där $E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*n}$ betecknar kolonnerna i enhetsmatrisen E.

Vi har nu följande resultat, som gör att vi kan uppfatta determinanten som en multilinjär alternerande form.

Sats 7.4.4 *Låt $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$. Då är*

$$\det A = \omega_0(A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}).$$

Determinanten av en matris är med andra ord en funktion från $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{K})$ till $\mathbf{K}$ som, betraktad som en funktion av de n stycken matriskolonnerna, är multilinjär och alternerande, och som uppfyller $\det E = 1$*, och dessa tre egenskaper bestämmer determinanten entydigt.*

Bevis. Enligt determinantdefinitionen är

$$\det A = \det A \cdot \omega_0(E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*n}) = \omega_0(AE_{*1}, AE_{*2}, \dots, AE_{*n}).$$

Nu är $AE_{*k} = (AE)_{*k} = A_{*k}$, den k:te kolonnen i A, så det följer att

$$\det A = \omega_0(A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}).$$

□

Som korollarium till satserna 7.4.4 och 7.4.3 följer nu ett antal determinantegenskaper.

Korollarium 7.4.5 *Determinanten av en matris har följande egenskaper:*

(a) *Determinanten är linjär med avseende på varje kolonn (rad) i matrisen.*

(b) *Determinanten byter tecken när två kolonner (rader) byter plats med varandra.*

(c) *Determinanten är 0 om två kolonner (rader) är lika.*

(d) *Determinantens värde ändras inte om en multipel av en kolonn (rad) adderas till en annan kolonn (rad).*

(e) *Om* $A = [a_{ij}]$, *så är*

$$\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{1}$$

där summeringen sker över alla permutationer σ *av* $\{1, 2, \dots, n\}$.

(f) *Om matrisen* A *är triangulär, dvs. om alla element ovanför diagonalen eller alla element under diagonalen är lika med 0, så är determinanten för* A *lika med produkten av diagonalelementen:*

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Bevis. Påståendena (a) – (d) för kolonner är omedelbara konsekvenser av satserna 7.4.4 och 7.1.4. Eftersom raderna i matrisen A är kolonner i den transponerade matrisen A^t och $\det A = \det A^t$, gäller (a) – (d) också för rader.

Egenskap (e) är en direkt översättning av sats 7.2.5, eftersom $\chi_i(A_{*j}) = a_{ij}$ och $\omega_0(E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*n}) = 1$.

Om matrisen A är övertriangulär, säg, så att alla element under diagonalen är 0, så är $a_{ij} = 0$ för $i > j$, och det följer att de i (1) ingående produkterna är 0 om $\sigma(i) < i$ för något i. Den enda permutation som inte uppfyller detta är den identiska permutationen, vars signum är $+1$. För triangulära matriser reduceras summan i (1) således till en enda term, vilket som resultat ger (f). □

Sats 7.4.6 *Antag att A och B är matriser av samma ordning. Då gäller:*

(a) $\det AB = \det A \cdot \det B$.

(b) $\det E = 1$.

(c) *Inversen A^{-1} existerar om och endast om $\det A \neq 0$, och i så fall är*
$$\det A^{-1} = 1/\det A.$$

Bevis. Satsen är en direkt översättning av satserna 7.3.3 och 7.3.4 till matrisfallet. □

Vi har nu härlett tillräckligt många egenskaper för att kunna beräkna determinanter på ett praktiskt sätt. Varje kvadratisk matris kan ju medelst elementära rad- eller kolonnoperationer transformeras till en undertriangulär matris, och egenskaperna (a), (b) och (d) visar hur determinanten påverkas av varje sådan operation. Slutligen visar (f) hur den undertriangulära matrisens determinant beräknas.

Exempel 7.4.1 Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösning: Genom att subtrahera 2 gånger första kolonnen från den andra, första kolonnen från den tredje samt 3 gånger första kolonnen från den fjärde kolonnen erhåller vi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Låt sedan andra och fjärde kolonnen byta plats, samt subtrahera sedan två gånger den nya andra kolonnen från den tredje:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Platsbyte mellan tredje och fjärde kolonnen ger slutligen
$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36.$$

Determinantens värde är således 36. □

Nästa sats visar att k-former på $\mathbf{K}^n$ kan uppfattas som determinanter. Vi använder därvid följande beteckningar. Sätt $N = \{1, 2, \dots, n\}$, och låt $A = [a_{ij}]$ vara en $n \times n$-matris. För indexmängder I, $J \in \mathcal{P}_k(N)$, dvs. för delmängder $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ och $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ av N med elementen ordnade i växande ordning $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ och $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, betecknar A_{IJ} den $k \times k$-matris som fås från A genom att stryka alla rader som inte har ett radindex i I och alla kolonner som inte har ett kolonnindex i J. Elementet på plats (p, q) i matrisen A_{IJ} är med andra ord lika med a_{i_p, j_q}.

Sats 7.4.7 *Låt som tidigare $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ beteckna standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^n$, och låt A vara en kvadratisk matris av ordning n. För alla indexmängder $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ och $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ i $\mathcal{P}_k(N)$ är*

$$\begin{aligned}\chi^I(A_{*j_1}, A_{*j_2}, \dots, A_{*j_k}) &= (\chi_{i_1} \wedge \chi_{i_2} \wedge \dots \wedge \chi_{i_k})(A_{*j_1}, A_{*j_2}, \dots, A_{*j_k}) \\ &= \det A_{IJ}.\end{aligned}$$

Bevis. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vara standardbasen i $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ vara standardbasen i $\mathbf{K}^k$ och $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ vara standardkoordinatfunktionerna på $\mathbf{K}^k$. Betrakta formen

$$\omega = \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k \in A_k(\mathbf{K}^k);$$

enligt sats 7.4.4 är

$$\det C = \omega(C_{*1}, C_{*2}, \dots, C_{*k})$$

för alla $k \times k$-matriser C, där som vanligt C_{*j} är den j:te kolonnen i matrisen.

Låt $\pi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^k$ vara projektionen $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, och betrakta pullbacken $\pi^t\omega$. Eftersom $\pi\mathbf{e}_{i_\ell} = \mathbf{f}_\ell$ för $\ell = 1, 2, \dots, k$, medan $\pi\mathbf{e}_i = 0$ för alla övriga basvektorer $\mathbf{e}_i$, följer det av lemma 7.2.2 att för alla indexdelmängder $I' = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ av N är

$$(\pi^t\omega)(\mathbf{e}_{r_1}, \mathbf{e}_{r_2}, \dots, \mathbf{e}_{r_k}) = \omega(\pi\mathbf{e}_{r_1}, \pi\mathbf{e}_{r_2}, \dots, \pi\mathbf{e}_{r_k}) = \begin{cases} 1 & \text{om } I' = I, \\ 0 & \text{om } I' \neq I. \end{cases}$$

Enligt sats 7.2.3 är därför $\pi^t\omega = \chi^I = \chi_{i_1} \wedge \chi_{i_2} \wedge \dots \wedge \chi_{i_k}$.

Eftersom $k \times k$-matrisen A_{IJ} har kolonnerna πA_{*j_1}, πA_{*j_2}, …, πA_{*j_k}, får vi därför

$$\begin{aligned}\det A_{IJ} &= \omega(\pi A_{*j_1}, \pi A_{*j_2}, \dots, \pi A_{*j_k}) \\ &= (\pi^t\omega)(A_{*j_1}, A_{*j_2} \dots, A_{*j_k}) = \chi^I(A_{*j_1}, A_{*j_2} \dots, A_{*j_k}).\end{aligned}$$

□

Vi kommer huvudsakligen att använda oss av satsen ovan i det fall då indexmängderna I och J består av $n-1$ stycken element. För det specialfallet inför vi följande beteckning.

Definition 7.4.8 Om A är en kvadratisk matris av ordning n, låter vi $\widehat{A}_{ij}$ beteckna den kvadratiska matris av ordning $(n-1)$ som fås genom att stryka den i:te raden och den j:te kolonnen i A.

Sats 7.4.7 innebär alltså speciellt att

$$\det \widehat{A}_{ij} = (\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_{i-1} \wedge \chi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \chi_n)(A_{*1}, \ldots, A_{*j-1}, A_{*j+1}, \ldots, A_{*n}).$$

Nästa sats visar hur man kan beräkna determinanter rekursivt.

Sats 7.4.9 *Låt $A = [a_{ij}]$ vara en $n \times n$-matris. För varje radindex i är*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \widehat{A}_{ij} \qquad \text{(utveckling efter rad nr } i\text{)},$$

och för varje kolonnindex j är

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \widehat{A}_{ij} \qquad \text{(utveckling efter kolonn nr } j\text{)}.$$

Bevis. Att utveckla $\det A$ efter en kolonn är ekvivalent med att utveckla $\det A^t$ efter en rad, så därför räcker det att bevisa formeln för radutveckling. Sätt för den skull $\omega_0 = \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \cdots \wedge \chi_n$ och $\phi_i = \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_{i-1} \wedge \chi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \chi_n$. Då är

$$\omega_0 = (-1)^{i-1} \chi_i \wedge \phi_i.$$

Satserna 7.4.4 och 7.4.7 innebär att

$$\det A = \omega_0(A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}) \qquad \text{och}$$
$$\det \widehat{A}_{ij} = \phi_i(A_{*1}, \ldots, A_{*j-1}, A_{*j+1}, \ldots, A_{*n}).$$

Definitionen av kilprodukt ger därför

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \chi_i(A_{*j})\, \phi_i(A_{*1}, \ldots, A_{*j-1}, A_{*j+1}, \ldots, A_{*n}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \phi_i(A_{*1}, \ldots, A_{*j-1}, A_{*j+1}, \ldots, A_{*n}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \widehat{A}_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Exempel 7.4.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Subtrahera 2 gånger första kolonnen från den tredje kolonnen}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Utveckla utefter den andra raden}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Subtrahera andra kolonnen från den första}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Utveckla utefter den tredje raden}$$

$$= -3 \left(0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = 9(-8) = -72.$$

□

Sats 7.4.10 *Om A är en ortogonal reell matris eller en unitär komplex matris, så är*

$$|\det A| = 1.$$

Bevis. I det reella fallet har vi $A^t A = E$, varav följer att

$$1 = \det E = \det A^t \cdot \det A = (\det A)^2.$$

För en godtycklig komplex kvadratisk matris B är förstås $\det \overline{B} = \overline{\det B}$, varför $\det B^* = \det \overline{B}^t = \overline{\det B}$. Om A är unitär, så är $A^* A = E$, och det följer att

$$1 = \det A^* \cdot \det A = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2.$$

□

Med hjälp av determinanter kan vi erhålla en sluten formel för lösningarna till ett kvadratiskt ekvationssystem med entydig lösning.

Sats 7.4.11 (Cramers regel) *Låt A vara en $n \times n$-matris. Ekvationssystemet $Ax = b$ är entydigt lösbart om och endast om $\det A \neq 0$, i vilket fall*

$$x_i = \frac{\det [A_{*1} \dots A_{*i-1}\, b\, A_{*i+1} \dots A_{*n}]}{\det A}.$$

Bevis. Vi vet från kapitel 2 att systemet är entydigt lösbart om och endast om matrisen A^{-1} existerar, och enligt sats 7.4.6 är detta ekvivalent med att $\det A \neq 0$. För att bevisa formeln för lösningarna i det entydigt lösbara fallet, skriver vi ekvationssystemet på formen

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j} = b.$$

Subtraktion av multipler av en kolonn från en annan kolonn ändrar inte determinantens värde, så därför får vi

$$\begin{aligned}
&\det [A_{*1} \dots A_{*i-1}\, b\, A_{*i+1} \dots A_{*n}] \\
&\quad = \det [A_{*1} \dots A_{*i-1}\ (b - \textstyle\sum_{j\neq i} x_j A_{*j})\ A_{*i+1} \dots A_{*n}] \\
&\quad = \det [A_{*1} \dots A_{*i-1}\ x_i A_{*i}\ A_{*i+1} \dots A_{*n}] \\
&\quad = x_i \det [A_{*1} \dots A_{*i-1}\, A_{*i}\, A_{*i+1} \dots A_{*n}] = x_i \det A.
\end{aligned}$$ □

Eftersom inversen till en matris A av ordning n erhålles genom att simultant lösa n kvadratiska ekvationssystem, kan vi tillämpa Cramers regel för att få en formel för inversen.

Sats 7.4.12 *Om A är en kvadratisk matris med determinant skild från 0, så existerar inversen och $A^{-1} = [\tilde{a}_{ij}]$, där*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det \widehat{A}_{ji}}{\det A}.$$

Bevis. Den j:te kolonnen i A^{-1} består av lösningarna till ekvationssystemet $Ax = E_{*j}$. Detta system har enligt Cramers regel lösningen

$$x_i = \frac{\det [A_{*1} \dots A_{*i-1}, E_{*j}, A_{*i+1} \dots A_{*n}]}{\det A}.$$

Genom att utveckla determinanten i täljaren utefter den i:te kolonnen erhåller man nu $x_i = (-1)^{i+j} \det \widehat{A}_{ji} / \det A$, vilket är ekvivalent med påståendet i satsen. □

Övningar

7.11 Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

7.12 Beräkna determinanterna

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

7.13 Talen 3588, 14099, 20861, 59501 och 88895 är samtliga delbara med 23. Visa att determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 5 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

också är delbar med 23.

7.14 Beräkna följande determinanter av ordning n

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

7.15 Sätt $N = \{1, 2, \dots, n\}$ och låt A vara en $n \times n$-matris. Visa följande generalisering av radutveckling av en determinant:

Om $1 \le k \le n-1$ och (I, I') är en fix partitionering av N med $|I| = k$, så är

$$\det A = \sum_{(J,J')} \operatorname{sgn}(I, I') \cdot \operatorname{sgn}(J, J') \cdot \det A_{IJ} \cdot \det A_{I'J'},$$

där summeringen sker över alla partitioneringar $(J, J') \in \mathrm{Part}_{k,n-k}(N)$.

7.16 Antag att matrisen A kan partitioneras

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

där matriserna A_{11} och A_{22} är kvadratiska. Visa att

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

Ledning: Som alternativ till att använda föregående övning kan man börja med att betrakta specialfallen $A_{11} = E$ resp. $A_{22} = E$, och sedan reducera det allmänna fallet till dessa specialfall genom att notera att

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

7.17 Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$, där A är en kvadratisk inverterbar matris. Kalla lösningen x och låt $x(\epsilon)$ vara den lösning som fås genom att störa koefficienterna b i högerledet med ϵ, dvs. $Ax(\epsilon) = b(\epsilon)$, där $b_j(\epsilon) = b_j + \epsilon$. Visa att det finns en konstant C så att $|x_k(\epsilon) - x_k| \leq C\epsilon$. En störning av högerledet ger således upphov till en störning hos lösningen av samma storleksordning.

7.18 Låt T vara en operator på ett n-dimensionellt vektorrum V och betrakta den transponerade operatorn T^t på $A_k(V)$. Bevisa att

$$\det T^t = (\det T)^p, \quad \text{där } p = \tbinom{n-1}{k-1}.$$

Ledning: Välj en bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ för V och låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara motsvarande koordinatfunktioner. Sätt $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, och ordna delmängderna $I \in \mathcal{P}_k(N)$ lexikografiskt, dvs. om $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ och $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ med elementen i växande ordning, så är $I < J$ om och endast om det finns ett index ℓ så att $i_1 = j_1, \ldots, i_{\ell-1} = j_{\ell-1}$ och $i_\ell < j_\ell$. Använd denna lexikografiska ordning för att ordna basvektorerna $\{\xi^I \mid I \in \mathcal{P}_k(N)\}$ i $A_k(V)$.

Visa därefter påståendet om $\det T^t$ genom att genomföra följande steg.

a) Om påståendet är sant för operatorerna S och T, så är det också sant för produkten ST.

b) Om T:s matris med avseende på basen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är undertriangulär (övertriangulär) med diagonalelement $d_1, d_2, \ldots, d_n$, så är matrisen för T^t med avseende på den ordnade basen $\{\xi^I \mid I \in \mathcal{P}_k(N)\}$ övertriangulär (undertriangulär) och diagonalelementet på plats (I, I) är $d^I = d_{i_1} d_{i_2} \cdots d_{i_k}$. Det följer därför att $\det T^t = (\det T)^p$ i detta fall.

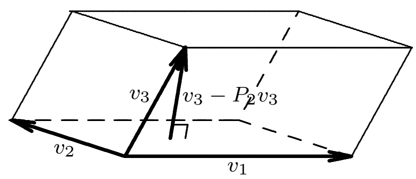
c) Om T:s matris är en elementär permutationsmatris $-$ vi kan utan inskränkning anta att $Te_1 = e_2$, $Te_2 = e_1$ och $Te_i = e_i$ för $i \geq 3$ $-$ så är T^t:s matris en produkt av $\binom{n-2}{k-1}$ elementära permutationsmatriser och en diagonalmatris i vilken $\binom{n-2}{k-2}$ diagonalelement är lika med -1 och övriga diagonalelement är lika med $+1$. Det följer att $\det T^t = (-1)^p = (\det T)^p$ även i detta fall.

d) Varje operator kan skrivas som en produkt av operatorer av typ b) och c) (eftersom varje kvadratisk matris är en produkt av elementära permutationsmatriser, en undertriangulär och en övertriangulär matris).

7.5 Determinanten som volym

Arean av en parallellogram är lika med basen gånger höjden. Om parallellogrammen spänns upp av vektorerna v_1 och v_2, kan vi som bas välja längden av vektorn v_1 och som höjd längden av vektorn $v_2 - P_1 v_2$, där P_1 betecknar den ortogonala projektionen på det endimensionella delrum som spänns upp av vektorn v_1.

Volymen av en parallellepiped som spänns upp av vektorerna v_1, v_2 och v_3 är på motsvarande sätt produkten av basens area och motsvarande höjd. Som bas kan vi välja den parallellogram som spänns upp av vektorerna v_1 och v_2, och höjden blir då längden av vektorn $v_3 - P_2 v_3$, där P_2 betecknar den ortogonala projektionen på det tvådimensionella delrum som spänns upp av v_1 och v_2.



Figur 7.1. $\mathrm{Vol}_3(v_1, v_2, v_3) = \|v_3 - P_2 v_3\| \, \mathrm{Vol}_2(v_1, v_2)$.

Parallellepipeder och volymsbegreppet har förstås naturliga motsvarigheter i högre dimensioner.

Definition 7.5.1 Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ vara linjärt oberoende vektorer i ett euklidiskt rum. Med den av vektorerna uppspända n-dimensionella *hyperparallellepipeden* menas mängden av alla linjärkombinationer $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ med koefficienter som uppfyller $0 \le \lambda_i \le 1$ för alla index i.

Parallellepipedens n-dimensionella *volym* $\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n)$ definieras rekursivt av formlerna

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_1(v_1) &= \|v_1\|, \\ \mathrm{Vol}_k(v_1, v_2, \dots, v_k) &= \|v_k - P_{k-1} v_k\| \cdot \mathrm{Vol}_{k-1}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}), \qquad k \ge 2, \end{aligned}$$

där P_{k-1} betecknar den ortogonala projektionen på det linjära delrum som spänns upp av vektorerna $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$.

Om vi sätter $f_1 = v_1$, $f_2 = v_2 - P_1 v_2$, …, $f_n = v_n - P_{n-1} v_n$, så bildar vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_n$ per konstruktion en ortogonal följd (jmf Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod), och den induktiva definitionen ger

$$\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = \|f_1\| \, \|f_2\| \cdots \|f_n\|.$$

Volymen kan uttryckas med hjälp av alternerande former och determinanter, och för den skull behöver vi följande lemma.

Lemma 7.5.2 *Låt V vara ett n-dimensionellt euklidiskt rum med ON-bas $f_1, f_2, \dots, f_n$, och fixera formen $\omega \in A_n(V)$ genom normaliseringsvillkoret $\omega(f_1, f_2, \dots, f_n) = 1$. Då är $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = \pm 1$ för varje ON-bas $e_1, e_2, \dots, e_n$.*

Bevis. Sambandet mellan den givna ON-basen $f_1, f_2, \dots, f_n$ och en godtycklig ON-bas $e_1, e_2, \dots, e_n$ har formen $e_i = Tf_i$, där avbildningen T är en isometri. Determinanten för en isometri är på grund av sats 7.4.10 lika med ± 1. Det följer att

$$\begin{aligned}\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \omega(Tf_1, Tf_2, \dots, Tf_n) = (\det T) \cdot \omega(f_1, f_2, \dots, f_n)\\ &= \det T = \pm 1.\end{aligned}$$

□

Vi har nu följande resultat.

Sats 7.5.3 *Låt $v_1, v_2, \dots, v_n$ vara n stycken linjärt oberoende vektorer i ett n-dimensionellt euklidiskt rum V, och låt $\omega_0 \in A_n(V)$ vara en alternerande n-form som antar värdet 1 för vektorerna i någon ON-bas. Då är*

$$\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = |\omega_0(v_1, v_2, \dots, v_n)|.$$

Anmärkning. På grund av föregående lemma är formen ω_0 entydigt bestämd så när som på tecknet.

Bevis. Vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_n$, som definierades omedelbart före lemma 7.5.2, bildar en ortogonal bas för V, och om vi sätter $e_i = f_i/\|f_i\|$ får vi en ON-bas $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Betrakta nu $\omega_0(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Eftersom $v_j = f_j + P_{j-1}v_j$ och $P_{j-1}v_j$ är en linjärkombination av vektorerna v_1, v_2, $\dots$, v_{j-1}, följer det av räknereglerna för alternerande former att

$$\begin{aligned}\omega_0(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega_0(f_1, f_2, \dots, f_n) = \omega_0(\|f_1\|e_1, \|f_2\|e_2, \dots, \|f_n\|e_n)\\ &= \|f_1\|\,\|f_2\| \cdots \|f_n\|\,\omega_0(e_1, e_2, \dots, e_n)\\ &= \mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n)\,\omega_0(e_1, e_2, \dots, e_n)\\ &= \pm\,\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n),\end{aligned}$$

där den sista likheten gäller på grund av lemma 7.5.2. Eftersom volymen är positiv, blir därför $\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = |\omega_0(v_1, v_2, \dots, v_n)|$. □

Om $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är vektorer i ett n-dimensionellt euklidiskt rum V, låter vi $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$ beteckna den $n \times n$-matris som fås genom att som kolonn nr k välja koordinaterna för vektorn v_k med avseende på någon given ON-bas för V. Enligt sats 7.4.4 får vi en form $\omega_0 \in A_n(V)$ med värdet 1 på den givna ON-basen genom att sätta

$$\omega_0(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}.$$

Nästa resultat är därför ett omedelbart korollarium till sats 7.5.3.

Korollarium 7.5.4 *Antag att vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är linjärt oberoende. Då är*

$$\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left|\det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}\right|.$$

Att hyperparallellepipeden skall spännas upp av lika många vektorer som det euklidiska rummets dimension är inte någon större inskränkning, ty om en hyperparallellepiped spänns upp av färre vektorer än rummets dimension, så kan vi beräkna volymen genom att tillämpa sats 7.5.3 eller korollarium 7.5.4 på det minsta linjära delrum som innehåller hyperparallellepipeden. Vi skall utnyttja detta för att härleda ett nytt determinantuttryck för volymen.

Definition 7.5.5 Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara n vektorer i ett godtyckligt euklidiskt rum. Determinanten

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \ldots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \langle v_2, v_n \rangle & \ldots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix}$$

kallas *Grams determinant.*

Matrisen i Grams determinant verkar kanske bekant; den är koefficientmatris för det linjära ekvationssystem som ger den ortogonala projektionen av en vektor på det delrum som spänns upp av vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (se sats 6.3.7).

Sats 7.5.6 *Låt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara linjärt oberoende vektorer i ett euklidiskt rum. Då är*

$$\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sqrt{|G(v_1, v_2, \ldots, v_n)|}.$$

Anmärkning. Av satsen följer att volymen är oberoende av vektorernas ordning, en naturligtvis högst önskvärd egenskap som emellertid inte är uppenbar från den rekursiva definitionen.

Bevis. Vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ spänner upp ett n-dimensionellt euklidiskt delrum W, och enligt sats 7.5.4 är

$$\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left|\det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n\end{bmatrix}\right|,$$

där $n \times n$-matrisen $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n\end{bmatrix}$ är bildad av vektorernas koordinater med avseende på en godtycklig ON-bas i W. Som ON-bas väljer vi nu den ON-bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ som erhålls genom att tillämpa Gram-Schmidts metod på vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dvs. $e_i = f_i/\|f_i\|$, där $f_1 = v_1$, $f_2 = v_2 - P_1 v_2$, $\ldots$, $f_n = v_n - P_{n-1}v_n$. Detta ger följande uttryck för volymen:

$$\begin{aligned}
&\|f_1\|\,\|f_2\| \cdots \|f_n\| \cdot \mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) \\
&\quad = \pm\|f_1\|\,\|f_2\| \cdots \|f_n\| \begin{vmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \ldots & \langle v_n, e_1\rangle \\ \langle v_1, e_2\rangle & \langle v_2, e_2\rangle & \ldots & \langle v_n, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, e_n\rangle & \langle v_2, e_n\rangle & \ldots & \langle v_n, e_n\rangle \end{vmatrix} \\
&\quad = \pm \begin{vmatrix} \langle v_1, f_1\rangle & \langle v_2, f_1\rangle & \ldots & \langle v_n, f_1\rangle \\ \langle v_1, f_2\rangle & \langle v_2, f_2\rangle & \ldots & \langle v_n, f_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, f_n\rangle & \langle v_2, f_n\rangle & \ldots & \langle v_n, f_n\rangle \end{vmatrix} \\
&\quad = \pm \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_2, v_1\rangle & \ldots & \langle v_n, v_1\rangle \\ \langle v_1, v_2 - P_1v_2\rangle & \langle v_2, v_2 - P_1v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_2 - P_1v_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_n - P_{n-1}v_n\rangle & \langle v_2, v_n - P_{n-1}v_n\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n - P_{n-1}v_n\rangle \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Eftersom P_{k-1} är den ortogonala projektionen på det av vektorerna v_1, v_2, $\ldots$, v_{k-1} uppspända delrummet, har $P_{k-1}v_k$ formen

$$P_{k-1}v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1}v_{k-1}.$$

Om vi i den sistnämnda determinanten ovan adderar den första raden multiplicerad med λ_1, den andra multiplicerad med λ_2, …och rad nr $(k-1)$ multiplicerad med λ_{k-1} till den k:te raden, så blir resultatet raden

$$\begin{bmatrix} \langle v_1, v_k\rangle & \langle v_2, v_k\rangle & \ldots & \langle v_n, v_k\rangle \end{bmatrix}$$

som är lika med den k:te raden i Grams determinant. Av räknereglerna för determinanter följer därför att den sistnämnda determinanten ovan är lika med Grams determinant. Vi har med andra ord

$$\|f_1\|\,\|f_2\| \cdots \|f_n\| \cdot \mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \pm G(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Nu är också $\mathrm{Vol}_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \|f_1\|\,\|f_2\| \cdots \|f_n\|$, så det följer att

$$\mathrm{Vol}_n\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)^2 = \pm G(v_1, v_2, \ldots, v_n) = |G(v_1, v_2, \ldots, v_n)|. \qquad \square$$

Som korollarium till satsen följer förstås att Grams determinant är noll om och endast om de i determinanten ingående vektorerna är linjärt beroende.

Övningar

7.19 Bestäm arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(3, 1, 1)$ i $\mathbf{R}^3$.

7.20 Vektorerna $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$ och $(3, 2, 2, 5)$ spänner upp en hyperparallellepiped i $\mathbf{R}^4$. Bestäm volymen.

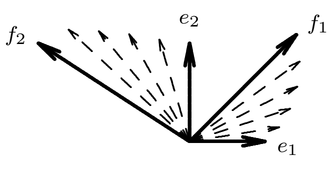
7.21 Bestäm volymen av parallellepipeden som spänns upp av de tre vektorerna $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$ och $(4, 3, 2, 1)$ i $\mathbf{R}^4$.

7.6 Orientering

I det här avsnittet är alla vektorrum och matriser reella.

Lika lite som man kan definiera begreppen höger och vänster matematiskt kan man ge en absolut matematisk innebörd åt begreppet positiv orientering. Men analogt med att man kan välja en sträcka som enhetssträcka och sedan mäta längden av alla andra sträckor relativt denna enhetssträcka, kan man välja en bas $\mathcal{A}$ som *referensbas* och ange orienteringen hos varje annan bas $\mathcal{B}$ *relativt* referensbasen. Man säger då att basen $\mathcal{B}$ är *positivt orienterad* om den har samma orientering som referensbasen, och att den är *negativt orienterad* om baserna har olika orientering.

Två baser har samma orientering om det är möjligt att kontinuerligt förändra den ena basen så att den – utan att upphöra att vara en bas – övergår i den andra basen. Exempelvis har baserna e_1, e_2 och f_1, f_2 i figur 7.2 samma orientering, ty genom att vrida och samtidigt krympa vektorerna f_1 och f_2 kan vi få dessa att sammanfalla med e_1 och e_2, och under hela förändringsförloppet bildar de modifierade vektorerna en bas.



Figur 7.2.

Uppenbarligen beror orienteringen på i vilken ordning som basvektorerna anges. Vi kommer därför att betrakta *ordnade baser*; med en ordnad bas i ett n-dimensionellt vektorrum menar vi en ordnad n-tipel av basvektorer.

För att göra den intuitiva definitionen av orientering precis behöver vi förstås definiera vad som menas med att förändra en bas kontinuerligt. Vi skall göra detta nedan, men det är enklare att definiera begreppet orientering med hjälp av alternerande former, så vi startar i den änden och visar sedan att de två definitionerna är ekvivalenta.

Definition 7.6.1 Låt V vara ett reellt n-dimensionellt vektorrum. Med en *orientering* av V menas valet av en nollskild form $\omega_0 \in A_n(V)$.

En ordnad bas $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ för V kallas *positivt orienterad* (relativt den valda orienteringen) om $\omega_0(f_1, f_2, \ldots, f_n) > 0$, och *negativt orienterad* om $\omega_0(f_1, f_2, \ldots, f_n) < 0$.

Två baser har *samma orientering* om båda är positivt orienterade eller båda är negativt orienterade relativt den givna orienteringen ω_0. Observera att begreppet samma orientering är oberoende av valet av orientering ω_0.

Ett alternativt sätt att ange en orientering består i att utgå från en ordnad bas $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, låta $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara motsvarande koordinatfunktioner och sätta $\omega_0 = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$. En ordnad bas $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ kallas sedan positivt orienterad *relativt den ursprungliga basen* om den är positivt orienterad relativt orienteringen ω_0. De båda sätten att ange orientering är förstås ekvivalenta.

Exempel 7.6.1 Låt (e_1, e_2) vara en bas för ett tvådimensionellt vektorrum, och definiera en ny bas (f_1, f_2) genom att sätta $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$. Då är den sistnämnda basen negativt orienterad relativt den förstnämnda. Låt nämligen ξ_1, ξ_2 vara koordinatfunktionerna med avseende på basen (e_1, e_2) och sätt $\omega_0 = \xi_1 \wedge \xi_2$; då är

$$\omega_0(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

□

Definition 7.6.2 Låt $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ och $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vara två ordnade baser för det reella vektorrummet V. Baserna säges vara *homotopa* om det finns en funktion $\mathcal{F}\colon I \to V^n$, som är definierad på intervallet $I = [0, 1]$ och har följande egenskaper:

(i) $\mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ är en ordnad bas för varje $t \in I$;

(ii) vektorerna $f_i(t)$ varierar kontinuerligt med t, dvs. deras koordinater (med avseende på en godtycklig bas) är kontinuerliga funktioner;

(iii) $\mathcal{F}(0) = \mathcal{E}$ och $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}$.

Funktionen $\mathcal{F}$ kallas en *homotopi* mellan baserna.

Exempel 7.6.2 Låt $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ vara en ON-bas för vektorer i planet och låt $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ vara den bas som fås genom att vrida vektorerna i $\mathcal{E}$ 45°, dvs.

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \\ f_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Dessa baser är homotopa, ty avbildningen

$$\mathcal{F}(t) = (\cos\frac{\pi t}{4}\, e_1 + \sin\frac{\pi t}{4}\, e_2,\ -\sin\frac{\pi t}{4}\, e_1 + \cos\frac{\pi t}{4}\, e_2), \quad 0 \le t \le 1,$$

är en homotopi mellan $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$. Transformationsmatrisen

$$\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi t}{4} & -\sin\dfrac{\pi t}{4} \\ \sin\dfrac{\pi t}{4} & \cos\dfrac{\pi t}{4} \end{bmatrix}$$

mellan $\mathcal{F}(t)$ och $\mathcal{E}$ är nämligen inverterbar, så $\mathcal{F}(t)$ är en bas för varje t, och basvektorerna varierar kontinuerligt eftersom funktionerna sin och cos är kontinuerliga. Slutligen är $\mathcal{F}(0) = \mathcal{E}$ och $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}$. □

Vi skall visa att två baser är homotopa om och endast om de har samma orientering. För att kunna göra detta behöver vi först studera motsvarande homotopibegrepp för inverterbara matriser.

Definition 7.6.3 Två inverterbara reella matriser A och B av ordning n kallas *homotopa* om det finns en funktion $F\colon [0,1] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ med följande egenskaper:

(i) matrisen $F(t)$ är inverterbar för alla $t \in [0,1]$;

(ii) funktionen F är kontinuerlig (dvs. samtliga matriselement i $F(t)$ är kontinuerliga funktioner av t);

(iii) $F(0) = A$ och $F(1) = B$.

Exempel 7.6.3 Matrisavbildningen $F(t) = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi t}{2} & -\cos\frac{\pi t}{2} \\ \cos\frac{\pi t}{2} & \sin\frac{\pi t}{2} \end{bmatrix}$, $0 \le t \le 1$, är en homotopi mellan matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och enhetsmatrisen $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. □

Sats 7.6.4 *Homotopi är en ekvivalensrelation på mängden av alla inverterbara matriser av en given ordning.*

Bevis. Varje inverterbar matris A är homotop med sig själv, ty den konstanta avbildningen $F(t) = A$ är en homotopi. Relationen är symmetrisk, ty om F är en homotopi från A till B, så är avbildningen $\widetilde{F}$, definierad av att $\widetilde{F}(t) = F(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$, en homotopi i den andra riktningen. Slutligen är homotopirelationen transitiv, ty om homotopin F överför A i B och homotopin F' överför B i C, så får vi en homotopi F'' från A till C genom att definiera $F''(t) = F(2t)$ för $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ och $F''(t) = F'(2t-1)$ för $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. □

Homotopirelationen delar in mängden av alla inverterbara reella matriser av en given ordning i ekvivalensklasser; vi skall visa att det finns exakt två sådana *homotopiklasser*, och att de kan skiljas åt med hjälp av determinanten. För beviset behöver vi ett antal hjälpsatser.

Lemma 7.6.5 *Om matriserna A och B är homotopa, så har deras determinanter samma tecken.*

Bevis. Låt F vara en homotopi mellan A och B, och sätt $f(t) = \det F(t)$. Den reella funktionen f är kontinuerlig, eftersom determinanten är en kontinuerlig funktion av matriselementen. Vidare är $f(t) \neq 0$ för $0 \leq t \leq 1$, eftersom matriserna $F(t)$ är inverterbara. Enligt satsen om mellanliggande värden måste därför $f(t)$ ha samma tecken för $t = 0$ och för $t = 1$, dvs. $\det A$ och $\det B$ har samma tecken. □

Lemma 7.6.6 *Om matrisen A_1 är homotop med matrisen B_1 och matrisen A_2 är homotop med matrisen B_2, så är produkten A_1A_2 homotop med B_1B_2.*

Bevis. Om F_i är en homotopi mellan A_i och B_i, så är produktavbildningen F_1F_2 en homotopi mellan A_1A_2 och B_1B_2. □

Lemma 7.6.7 *Om k stycken av matriserna $A_1, A_2, \ldots, A_m$ är homotopa med diagonalmatrisen $S = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)$ och resten av matriserna är homotopa med enhetsmatrisen E, så är produkten $A_1A_2 \cdots A_m$ homotop med S ifall k är udda och med E ifall k är jämn.*

Bevis. Upprepad användning av lemma 7.6.6 ger att produkten är homotop med S^k, och $S^k = S$ om k är udda, medan $S^k = E$ om k är jämnt. □

Sats 7.6.8 *En inverterbar reell matris är antingen homotop med enhetsmatrisen E eller med diagonalmatrisen $S = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$, och dessa två matriser är inte homotopa med varandra.*

Bevis. Att matriserna E och S inte är homotopa följer av lemma 7.6.5, ty $\det E = 1$ och $\det S = -1$. Beviset för att varje inverterbar matris är homotop med antingen E eller S delar vi upp i ett antal steg.

1. *Om D är en diagonalmatris och samtliga diagonalelement är lika med 1 utom ett element som är lika med -1, så är D homotop med S.*

Antag att elementet på plats (i,i) är lika med -1. Om $i = 1$ finns det ingenting att visa eftersom i så fall $D = S$, så antag att $i \neq 1$. Definiera $F(t)$ som matrisen med elementen $f_{11}(t) = \cos \pi t$, $f_{ii}(t) = -\cos \pi t$, $f_{1i} = f_{i1}(t) = \sin \pi t$, $f_{jj} = 1$ för $j \neq 1$, i och $f_{k\ell} = 0$ för alla övriga index. Matriserna $F(t)$ är inverterbara eftersom de är ortogonalmatriser, och matriselementen är uppenbarligen kontinuerliga funktioner. Avbildningen F är därför en homotopi mellan $F(0) = D$ och $F(1) = S$.

2. *Om D är en diagonalmatris och k stycken av diagonalelementen är lika med -1 medan de resterande är lika med 1, så är D homotop med E eller S beroende på om k är jämnt eller udda.*

Vi kan uppenbarligen skriva D som en produkt av k diagonalmatriser, som var och en bara har ett diagonalelement lika med -1 medan resten av elementen är lika med 1. Påståendet följer därför av föregående steg och lemma 7.6.7.

3. *En inverterbar diagonalmatris D är antingen homotop med E eller S.*

Antag att $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ och sätt

$$F(t) = \operatorname{diag}(\frac{d_1}{|d_1|^t}, \frac{d_2}{|d_2|^t}, \ldots, \frac{d_n}{|d_n|^t}).$$

Diagonalmatriserna $F(t)$ är inverterbara, matriselementen är kontinuerliga funktioner av t och $F(0) = D$, så matrisen D är homotop med diagonalmatrisen $F(1)$, vars diagonalelement är 1 (för $d_i > 0$) och -1 (för $d_i < 0$). Enligt steg 2 är matrisen $F(1)$ homotop med E eller S, och eftersom homotopi är en ekvivalensrelation är därför också D homotop med någon av dessa två matriser.

4. *Om P är en elementär permutationsmatris, så är P homotop med S.*

En elementär permutationsmatris fås genom att permutera två kolonner i enhetsmatrisen; antag att P bildats genom att permutera kolonnerna nummer i och j. Detta innebär att $p_{ij} = p_{ji} = 1$, $p_{ii} = p_{jj} = 0$, $p_{kk} = 1$ för $k \neq i$, j, samt att övriga matriselement i P är lika med 0. Definiera nu för $0 \le t \le 1$ matriserna $F(t)$ genom att sätta $f_{ij}(t) = f_{ji}(t) = \cos\frac{\pi t}{2}$, $f_{ii}(t) = \sin\frac{\pi t}{2}$, $f_{jj}(t) = -\sin\frac{\pi t}{2}$, $f_{kk}(t) = 1$ för $k \neq i$, j, och $f_{k\ell}(t) = 0$ för alla övriga index (k, ℓ). Matriserna $F(t)$ är inverterbara eftersom de är ortogonala, och matriselementen är kontinuerliga funktioner av t. Avbildningen F är därför en homotopi mellan $F(0) = P$ och matrisen $F(1)$, som är en diagonalmatris vars samtliga diagonalelement är lika med 1 utom elementet $f_{jj}(1)$ som är lika med -1. Enligt steg 1 är matrisen $F(1)$ homotop med S, så P är också homotop med S.

5. *En permutationsmatris P är antingen homotop med E eller med S.*

En godtycklig permutationsmatris kan skrivas som en produkt av elementära permutationsmatriser. Påståendet följer därför av steg 4 och lemma 7.6.7.

6. *En inverterbar triangulär matris T är antingen homotop med E eller med S.*

Eftersom T är inverterbar är diagonalelementen nollskilda. Låt D vara den diagonalmatris som bildas av diagonalelementen i T; vi skall visa att T är homotop med D. Steg 3 medför sedan att T är homotop med E eller S. Sätt $F(t) = tD + (1-t)T$; för varje t är $F(t)$ en triangulär matris med samma diagonalelement som D, så matriserna $F(t)$ är inverterbara. Avbildningen F är uppenbarligen kontinuerlig, och eftersom $F(0) = T$ och $F(1) = D$ är påståendet bevisat.

7. *Varje inverterbar matris A är homotop med E eller med S.*

Matrisen A har enligt korollarium 2.5.2 faktoriseringen $A = PLU$, där P är en permutationsmatris, L är en inverterbar undertriangulär matris och U är en inverterbar övertriangulär matris. Påståendet följer därför av stegen 5 och 6 samt lemma 7.6.7.

I och med detta är satsen fullständigt bevisad. □

Korollarium 7.6.9 *Mängden av inverterbara matriser av en given ordning består av precis två homotopiklasser. Två inverterbara matriser är homotopa om och endast om deras determinanter har samma tecken.*

Bevis. Den ena klassen består av alla matriser som är homotopa med enhetsmatrisen E och alla sådana har positiv determinant; den andra klassen består av alla matriser som är homotopa med matrisen S och alla sådana har negativ determinant. □

Sats 7.6.10 *Två ordnade baser i ett ändligdimensionellt vektorrum V är homotopa om och endast om de har samma orientering.*

Bevis. Fixera en orientering $\omega_0 \in A_n(V)$. Låt $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ och $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vara två baser.

Om baserna är homotopa, så finns det en homotopi $\mathcal{F}\colon I \to V^n$ mellan $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$, dvs. en funktion som uppfyller villkoren i definition 7.6.2. Betrakta funktionen $g : I \to \mathbf{R}$ som definieras av att

$$g(t) = \omega_0(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t));$$

den är kontinuerlig och skild från 0 för alla t eftersom

$$\mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

är en bas för alla t. Det följer att

$$g(0) = \omega_0(e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ och } g(1) = \omega_0(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

har samma tecken, dvs. baserna $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$ har samma orientering.

Antag omvänt att baserna har samma orientering. Låt T vara den linjära avbildning som definieras av att $Te_i = f_i$ för alla i, och låt A vara avbildningens matris med avseende på basen $\mathcal{E}$. Eftersom

$$\omega_0(f_1, f_2, \dots, f_n) = (\det A) \cdot \omega_0(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

är $\det A > 0$. Matrisen A är därför på grund av korollarium 7.6.9 homotop med enhetsmatrisen E. Det finns därför en matrishomotopi

$$F\colon I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$$

med $F(0) = E$ och $F(1) = A$.

Låt $T(t)$ vara den linjära avbildning som har matrisen $F(t)$ med avseende på basen $\mathcal{E}$, och definiera vektorerna $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ genom att sätta $f_i(t) = T(t)e_i$. Då är avbildningen

$$\mathcal{F}\colon I \to V^n, \quad \mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

en homotopi mellan baserna $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$, som därför är homotopa. □

I de praktiska och fysikaliska tillämpningar där ”verkligheten” modelleras av det konkreta tredimensionella geometriska vektorrummet, brukar man som referensbas välja den ordnade bas e_1, e_2, e_3 som fås genom att hålla högra handens tumme, pekfinger och långfinger utsträckta med långfingret pekande upp från handflatan; vektorerna e_1, e_2, e_3 är då respektive tummen, pekfingret och långfingret (och pekar i fingrarnas riktning). En bas som är positivt orienterad relativt denna bas kallas ett *högersystem.*

Övningar

7.22 Bestäm orienteringen hos basen $(e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ relativt basen (e_1, e_2, e_3).

7.23 Bestäm orienteringen för varje permutation av basvektorerna i referensbasen (e_1, e_2, e_3).

7.24 Visa att om två matriser är homotopa så är deras inverser homotopa.

7.7 Positivt definita matriser

Vi erinrar om att en reell symmetrisk (resp. komplex hermitesk) matris Q kallas positivt definit om $x^*Qx > 0$ för alla reella (komplexa) kolonnmatriser x utom nollmatrisen. Man kan karakterisera positivt definita matriser med hjälp av villkor på vissa deldeterminanter. Först formulerar vi ett nödvändigt villkor.

Lemma 7.7.1 *Om matrisen Q är en positivt definit, så är* $\det Q > 0$.

Bevis. På grund av sats 5.5.4 finns det en inverterbar matris C och en diagonalmatris D så $C^*QC = D$, där samtliga diagonalelement i diagonalmatrisen D är positiva. Produktregeln för determinanter ger nu

$$0 < \det D = \det C^*QC = \det C^* \cdot \det Q \cdot \det C = |\det C|^2 \cdot \det Q,$$

varav följer att $\det Q > 0$. □

För att få ett villkor som också är nödvändigt måste vi betrakta vissa deldeterminanter.

Låt

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

vara en reell symmetrisk eller komplex hermitesk matris, dvs. $q_{ij} = \overline{q}_{ji}$, och sätt för $j = 1, 2, \ldots, n$

$$Q_j = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1j} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{j1} & q_{j2} & \cdots & q_{jj} \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \delta_j = \det Q_j.$$

Vi kallar determinanterna $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ för Q:s *principaldeldeterminanter.*

Om de $n-1$ första principaldeldeterminanterna är nollskilda kan vi förbättra resultatet i sats 5.5.4; matrisen Q kan i så fall diagonaliseras med hjälp av triangulära matriser och diagonalelementen i den erhållna diagonalmatrisen blir kvoter av principaldeldeterminanterna. Mer precist har vi:

Sats 7.7.2 *Låt Q vara en reell symmetrisk eller komplex hermitesk $n \times n$-matris, och antag att de $n-1$ första principaldeldeterminanterna δ_1, δ_2, …,*

δ_{n-1} är skilda från noll. Sätt $d_i = \delta_i/\delta_{i-1}$ för $i = 1, 2, \ldots, n$, där $\delta_0 = 1$. Då finns det en övertriangulär matris U med ettor i diagonalen så att

$$U^*QU = D,$$

där D är diagonalmatrisen $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Bevis. Antagandet om principaldeldeterminanterna är ekvivalent med att de symmetriska matriserna Q_j är inverterbara för $j \leq n-1$. Vi skall induktivt visa att det för $j = 1, 2, \ldots, n$ finns övertriangulära matriser U_j med ettor i diagonalen så att $U_j^* Q_j U_j = D_j$, där $D_j = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_j)$. För $j = n$ får vi då påståendet i satsen.

För $j = 1$ är saken klar, eftersom $Q_1 = q_{11} = \delta_1 = d_1$. Så antag att vi har visat vårt påstående för j. Matrisen Q_{j+1} kan som partitionerad matris skrivas

$$Q_{j+1} = \begin{bmatrix} Q_j & q^* \\ q & \alpha \end{bmatrix},$$

där $q = \begin{bmatrix} q_{j+1\,1} & \ldots & q_{j+1\,j} \end{bmatrix}$ och $\alpha = q_{j+1\,j+1}$. Bilda den övertriangulära matrisen

$$U_{j+1} = \begin{bmatrix} U_j & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

där kolonnmatrisen u strax skall bestämmas. Vi får då efter multiplikation

$$U_{j+1}^* Q_{j+1} U_{j+1} = \begin{bmatrix} U_j^* Q_j U_j & U_j^* Q_j u + U_j^* q^* \\ u^* Q_j U_j + q U_j & u^* Q_j u + q u + u^* q^* + \alpha \end{bmatrix}.$$

Enligt induktionsantagandet är $U_j^* Q_j U_j = D_j$, och om vi väljer $u = -Q_j^{-1} q^*$, vilket går eftersom Q_j är inverterbar, får vi

$$U_{j+1}^* Q_{j+1} U_{j+1} = \begin{bmatrix} D_j & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_j, \beta), \tag{1}$$

där $\beta = qu + \alpha$.

Det återstår nu endast att visa att $\beta = d_{j+1}$. Eftersom matrisen U_{j+1} är övertriangulär med ettor i diagonalen, är $\det U_{j+1} = \det U_{j+1}^* = 1$. Genom att ta determinanten av båda sidorna i (1) och utnyttja produktregeln för determinanter får vi därför att $\delta_{j+1} = \det Q_{j+1} = d_1 d_2 \cdots d_j \cdot \beta = \delta_j \beta$. Detta innebär att $\beta = \delta_{j+1}/\delta_j = d_{j+1}$, och därmed är induktionssteget klart. □

Som korollarium får vi följande resultat.

Sats 7.7.3 *Matrisen Q är positivt definit om och endast om alla principaldeldeterminanterna är positiva.*

Bevis. Om alla deldeterminanterna är positiva, så är alla diagonalelementen i diagonalmatrisen D positiva, och det följer att Q är positivt definit. Antag omvänt att Q är positivt definit. Då är också delmatriserna Q_j positivt definita, ty om x är en godtycklig nollskild kolonnvektor i $\mathbf{C}^j$ och $\widetilde{x}$ är den kolonnvektor i $\mathbf{C}^n$ som fås genom att tillfoga $n-j$ stycken nollor på slutet, dvs. $\widetilde{x}^t = \begin{bmatrix} x^t & 0 \end{bmatrix}$, så är $x^* Q_j x = \widetilde{x}^* Q \widetilde{x} > 0$. Av lemma 7.7.1 följer därför att $\delta_j = \det Q_j > 0$. □

Övningar

7.25 För vilka värden på parametern a är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 5 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

positivt definit?

7.26 Låt Q vara en reell symmetrisk eller komplex hermitesk $n \times n$-matris med principaldeldeterminanter δ_1, δ_2, …, $\delta_n = \det Q$. Visa att matrisen Q är

a) negativt definit om och endast om $(-1)^k \delta_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) indefinit om $\det Q \neq 0$ och ingen av följderna $(\delta_k)_1^n$ och $((-1)^k \delta_k)_1^n$ är strikt positiva.

Kapitel 8

Invarianta delrum

I det här kapitlet skall vi undersöka när en linjär operator kan skrivas som en summa av ”enklare” operatorer. I det ändligdimensionella fallet betyder detta att det skall finnas en en bas så att operatorns matris är blockdiagonal, dvs. har formen

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

där alla A_{ii} är kvadratiska delmatriser. Det bästa man kan hoppas på är förstås att matrisen skall vara en ren diagonalmatris. I så fall säger man, med en terminologi lånad från optiken, att operatorn har spektraluppdelats, och diagonalelementen kallas operatorns spektrum. En operator, som i någon bas har en diagonalmatris, kallas diagonaliserbar, och att undersöka villkor för diagonaliserbarhet är ett av temana för det här kapitlet.

Betrakta som ett enkelt exempel spegling i ett plan genom origo i det tredimensionella rummet, som vi identifierar med $\mathbf{R}^3$. Speglingen S är en linjär operator på $\mathbf{R}^3$, spegelplanet är ett tvådimensionellt delrum W_1 och normallinjen till planet genom origo är ett endimensionellt delrum W_2, och $\mathbf{R}^3$ är en (ortogonal) direkt summa av W_1 och W_2. Under spegling avbildas per definition varje vektor i spegelplanet på sig själv, så restriktionen $S|_{W_1}$ är lika med den identiska operatorn I_1 på W_1. Vidare avbildar spegling varje vektor v som är vinkelrät mot spegelplanet på vektorn $-v$, vilket innebär att restriktionen $S|_{W_2}$ är är lika med minus identiteten I_2 på W_2. För varje vektor $v = w_1 + w_2$ är slutligen $Sv = w_1 - w_2 = I_1w_1 - I_2w_2$, så S är en direkt summa av de enkla operatorerna I_1 och $-I_2$. Med avseende på en bas e_1, e_2, e_3 med de två första vektorerna i W_1 och den tredje i W_2 är matrisen för S lika med diagonalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Spegling är med andra ord ett exempel på en diagonaliserbar operator.

Alla operatorer T är inte diagonaliserbara – ett tillräckligt och nödvändigt villkor för diagonaliserbarhet ges av sats 8.2.14. Bland annat av det skälet studerar vi i avsnitt 8.3 det s. k. minimalpolynomet $\phi_T(t)$, som är ett polynom av lägst möjliga gradtal med egenskapen att $\phi_T(T) = 0$. Genom att faktorisera minimalpolynomet erhåller man en uppdelning av T i ”enklare delar” (sats 8.3.8). För operatorer på komplexa vektorrum fås som slutresultat Jordans normalform.

8.1 Invarianta delrum

Definition 8.1.1 Låt T vara en linjär operator på ett vektorrum V över en godtycklig kropp. Ett linjärt delrum W av V kallas ett *invariant delrum* till T om $Tw \in W$ för alla vektorer $w \in W$.

Om W är ett invariant delrum till operatorn T, så är naturligtvis restriktionen $T|_W$ av T till W en linjär operator på W.

Exempel 8.1.1 Låt D vara deriveringsoperatorn på rummet $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ av alla oändligt deriverbara funktioner på $\mathbf{R}$. Delrummet $\mathcal{P}$ av alla polynom är ett invariant delrum till D. Delrummen $\mathcal{P}_d$ av alla polynom av grad högst lika med d är också invariant delrum. □

Varje linjär operator på ett vektorrum V har två triviala invarianta delrum, nämligen nollrummet $\{0\}$ och rummet V självt. Dessa delrum kan också vara de enda invarianta delrummen, som följande exempel visar.

Exempel 8.1.2 Låt R vara operatorn rotation $90°$ kring origo i planet. Eftersom rotationen vrider varje linje genom origo $90°$ och det inte finns några andra icke-triviala linjära delrum, saknar R icke-triviala invarianta delrum. □

Definition 8.1.2 Låt T vara en linjär operator på V. Om $W_1, W_2, \dots, W_m$ är linjärt oberoende invarianta delrum till T och $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$, så säger man att operatorn T är *fullständigt reducerad* av $W_1, W_2, \dots, W_m$.

Varje vektor $v \in V$ har i så fall en entydig framställning

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_m,$$

där $w_i \in W_i$, och om vi låter T_i beteckna restriktionen $T|_{W_i}$, uppfattad som operator från W_i till W_i, så är

$$Tv = T_1 w_1 + T_2 w_2 + \cdots + T_m w_m.$$

Vi uttrycker detta genom att säga att operatorn T är en *direkt summa* av restriktionerna T_i och skriver

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_m.$$

Eftersom delrummen W_i är "mindre" än V bör operatorerna T_i vara enklare än T. En uppdelning av en operator som en direkt summa leder därför förhoppningsvis till en bättre förståelse av operatorn.

För operatorer på ändligdimensionella vektorrum V kan vi utnyttja invarianta delrum för att erhålla speciellt enkla matrisrepresentationer. Antag att T är en linjär operator på V och att W är ett delrum till V. Välj en bas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ för V så att de m första vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_m$ utgör en bas för W. Uppenbarligen är W ett invariant delrum till T om och endast om vektorerna Tv_1, Tv_2, $\ldots$, Tv_m samtliga är linjärkombinationer av vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_m$, och detta är i sin tur ekvivalent med att T:s matris med avseende på den givna basen har en partitionering i delmatriser av typen

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

med A_{11} av ordning m.

Om operatorn T är fullständigt reducerad av delrummen $W_1, W_2, \ldots, W_m$, och om basen för V väljs så att den är kompatibel med uppdelningen av rummet V som direkt summa av delrum, dvs. så att basvektorerna i tur och ordning ligger i $W_1, W_2, \ldots, W_m$, så blir T:s matris blockdiagonal, dvs. den har formen

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

där varje delmatris A_{ii} är kvadratisk av ordning $\dim W_i$.

Den största förenklingen erhåller vi om T är fullständigt reducerad av en familj av endimensionella delrum, dvs. om $\dim W_i = 1$ för alla i. I så fall är operatorns matris diagonal. Att bestämma de endimensionella invarianta delrummen till en linjär operator T och att undersöka om V kan skrivas som en direkt summa av sådana är alltså av stort intresse. Vi skall behandla detta problem i nästa avsnitt.

Exempel 8.1.3 Låt R vara rotation vinkeln θ kring en linje ℓ genom origo i det vanliga tredimensionella rummet. Rotationsaxeln ℓ är uppenbarligen ett invariant delrum till R liksom det mot rotationsaxeln ortogonala planet π genom origo, och hela rummet är en ortogonal direkt summa av ℓ och π. Restriktionen av R till ℓ är den identiska avbildningen, medan restriktionen till π är en plan rotation. Det följer att R har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

med avseende på en ortonormal bas med första basvektorn utefter ℓ. □

Nollrummet $\mathcal{N}(T)$ och bildrummet $\mathcal{V}(T)$ till en operator T är invarianta delrum till T. Detta följer som specialfall av följande sats.

Sats 8.1.3 *Låt S och T vara två operatorer på V och antag att de kommuterar med varandra, dvs. att $ST = TS$. Då är nollrummet $\mathcal{N}(S)$ och bildrummet $\mathcal{V}(S)$ invarianta delrum till T.*

Bevis. Antag $v \in \mathcal{N}(S)$; då är $S(Tv) = T(Sv) = T0 = 0$, så det följer att $Tv \in \mathcal{N}(S)$. Detta visar att $\mathcal{N}(S)$ är T-invariant.

Antag $v \in \mathcal{V}(S)$; då finns det en vektor u så att $v = Su$, och det följer att $Tv = T(Su) = S(Tu)$, dvs. $Tv \in \mathcal{V}(S)$. Bildrummet $\mathcal{V}(S)$ är således också T-invariant. □

En viktig klass av operatorer som kommuterar med en given operator T är polynomen i T, som definieras på följande vis.

Definition 8.1.4 För linjära operatorer T på ett vektorrum V över en kropp $\mathbf{K}$ och polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ med koefficienter i samma kropp sätter vi

$$p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

och kallar $p(T)$ ett *polynom i T*. Naturligtvis är $p(T)$ en linjär operator på V.

För det konstanta polynomet $p(t) = 1$ är förstås $p(T)$ lika med identitetsoperatorn. Om $p_1(t)$ och $p_2(t)$ är två polynom och $p(t) = p_1(t)p_2(t)$, så är $p(T) = p_1(T)p_2(T)$. Det följer speciellt att $p_1(T)p_2(T) = p_2(T)p_1(T)$.

Som korollarium till sats 8.1.3 får vi nu omedelbart:

Korollarium 8.1.5 *För varje polynom $p(T)$ i en operator T är nollrummet $\mathcal{N}(p(T))$ och bildrummet $\mathcal{V}(p(T))$ T-invarianta delrum.*

Faktoriseringar av polynomet $p(t)$ ger upphov till uppdelningar av nollrummet $\mathcal{N}(p(T))$ i direkta summor av T-invarianta delrum; följande resultat kommer att vara grundläggande för avsnitt 8.3.

Sats 8.1.6 *Låt $p(t)$ vara ett polynom med faktoriseringen*

$$p(t) = p_1(t)p_2(t)\cdots p_k(t),$$

där polynomen $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_k(t)$ är parvis relativt prima, dvs. parvis saknar gemensamma faktorer. Då är nollrummen $\mathcal{N}(p_i(T))$, $1 \le i \le k$, linjärt oberoende, och

$$\mathcal{N}(p(T)) = \mathcal{N}(p_1(T)) \oplus \mathcal{N}(p_2(T)) \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}(p_k(T)).$$

Bevis. Sätt $W_i = \mathcal{N}(p_i(T))$ och $W = \mathcal{N}(p(T))$.

Antag först att $k = 2$. Eftersom största gemensamma delaren till de två polynomen $p_1(t)$ och $p_2(t)$ är lika med 1, följer det av Euklides' algoritm att det finns två polynom $q_1(t)$ och $q_2(t)$ så att

$$q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t) = 1$$

för alla t. Detta medför att $q_1(T)p_1(T) + q_2(T)p_2(T) = I$. För varje vektor $v \in V$ är därför

$$q_1(T)p_1(T)v + q_2(T)p_2(T)v = v. \tag{1}$$

Om vektorn v tillhör snittet $W_1 \cap W_2$, så är $p_1(T)v = p_2(T)v = 0$, och det följer av (1) att $v = 0$. Snittet består således av enbart nollvektorn, så delrummen W_1 och W_2 är linjärt oberoende, och summan $W_1 \oplus W_2$ är direkt. Uppenbarligen gäller att $W_i \subseteq W$, så den direkta summan är en delmängd av W. För att visa omvändningen antar vi att $v \in W$, dvs. att $p(T)v = 0$. Då är $p_2(T)(q_1(T)p_1(T)v) = q_1(T)p(T)v = q_1(T)0 = 0$, så $q_1(T)p_1(T)v$ är en vektor i W_2, och på motsvarande sätt fås att $q_2(T)p_2(T)v$ ligger i W_1. Uppdelningen (1) visar därför att $v \in W_1 \oplus W_2$.

Det allmänna fallet bevisas med hjälp av induktion. Antag att påståendet i satsen är sant för produkter av $k-1$ polynom, och sätt $q(t) = p_2(t)\cdots p_k(t)$

och $Y = \mathcal{N}(q(T))$. Enligt induktionsantagandet är då $Y = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, och det bevisade fallet $k = 2$ ger att $W = W_1 \oplus Y = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, så satsens påstående gäller också för produkter av k polynom. □

Exempel 8.1.4 I det här exemplet skall vi använda sats 8.1.6 för att karakterisera lösningsrummet W till en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Låt D vara deriveringsoperatorn på $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, som i det här fallet betecknar alla komplexvärda oändligt deriverbara funktioner på reella axeln, och låt $p(t)$ vara polynomet $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Differentialekvationen kan då skrivas på formen

$$p(D)y = 0,$$

så lösningsrummet W är lika med nollrummet till operatorn $p(D)$.

Låt nu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ vara de olika komplexa nollställena till polynomet $p(t)$, och antag att nollställenas multipliciteter i tur och ordning är n_1, n_2, …, n_k. Detta innebär att vi har följande faktorisering av polynomet $p(t)$ i faktorer som är parvis relativt prima:

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}.$$

Enligt satsen ovan är därför lösningsrummet W en direkt summa av nollrummen $W_j = \mathcal{N}((D - \lambda_j I)^{n_j})$, $1 \le j \le k$. Det återstår därför endast att bestämma W_j.

Betrakta därför en differentialekvation av typen $(D-\lambda I)^m y = 0$, och sätt $y = e^{\lambda t}z$; då är $Dy = \lambda y + e^{\lambda t}Dz$, dvs. $(D - \lambda I)y = e^{\lambda t}Dz$. Med induktion följer att $(D - \lambda I)^m y = e^{\lambda t}D^m z$. Följaktligen är $(D - \lambda I)^m y = 0$ om och endast om $D^m z = 0$, och den sistnämnda likheten gäller förstås om och endast om z är ett polynom av grad $\le m - 1$.

Detta innebär $W_j = \{e^{\lambda_j t}z \mid z \in \mathcal{P}_{n_j-1}\}$, och naturligtvis är de n_j stycken funktionerna $e^{\lambda_j t}$, $te^{\lambda_j t}$, …, $t^{n_j-1}e^{\lambda_j t}$ en bas för W_j. Sammanfattningsvis har vi därför visat att de n stycken funktionerna

$$t^i\, e^{\lambda_j t}, \quad 0 \le i \le n_j - 1,\ \ 1 \le j \le k$$

är en bas för lösningsrummet till den givna differentialekvationen. □

Övningar

8.1 T är en linjär operator på V och v är en vektor i V. Visa att vektorerna v, Tv, T^2v, T^3v, …spänner upp ett invariant delrum till T.

8.2 Låt S vara operatorn spegling i ett plan genom origo i rummet. Bestäm de invarianta delrummen till S.

8.3 T är en operator på ett n-dimensionellt rum V. Visa att det finns en bas så att T:s matris är övertriangulär om och endast om det finns T-invarianta delrum $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ så att $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1}$ och $\dim V_i = i$ för alla i.

8.4 Låt W vara ett invariant delrum till operatorn T på V.

a) Visa att om X är ett $T_{V/W}$-invariant delrum av V/W, så är delrummet $\{v \in V \mid [v] \in X\}$ ett T-invariant delrum.

b) Visa att om $T_{V/W}$ har ett icke-trivialt invariant delrum, så finns det ett T-invariant delrum U med $W \subsetneqq U \subsetneqq V$.

8.2 Egenvärden

Låt T vara en linjär operator på vektorrummet V, låt v vara en nollskild vektor i V och sätt $W = \text{spn}\{v\}$. Om W är ett invariant delrum till T, så ligger Tv i W, varför det finns en skalär λ så att $Tv = \lambda v$. Antag omvänt att $Tv = \lambda v$; då är W ett invariant delrum, ty $T(\alpha v) = \alpha\lambda v$ tillhör W för alla α. Att bestämma de endimensionella invarianta delrummen till operatorn T är således ekvivalent med att bestämma de icke-triviala lösningarna till ekvationen $Tv = \lambda v$. Detta motiverar följande begrepp.

Definition 8.2.1 En skalär λ kallas ett *egenvärde* till den linjära operatorn $T\colon V \to V$ om det finns en nollskild vektor v i V så att $Tv = \lambda v$. Varje sådan vektor v kallas en *egenvektor* till egenvärdet λ.

Om I som vanligt betecknar identitetsoperatorn på V, så är villkoret i definitionen ekvivalent med att $(T - \lambda I)v = 0$ för någon vektor $v \neq 0$. Skalären λ är med andra ord ett egenvärde till T om och endast om nollrummet

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\},$$

dvs. om och endast om operatorn $T - \lambda I$ inte är injektiv.

Definition 8.2.2 Låt λ vara ett egenvärde till T. Nollrummet $\mathcal{N}(T - \lambda I)$, som består av motsvarande egenvektorer och nollvektorn, kallas det till egenvärdet λ hörande *egenrummet* och betecknas $\mathcal{E}_\lambda(T)$.

Det följer av korollarium 8.1.5 att egenrummet $\mathcal{E}_\lambda(T)$ är ett invariant delrum till T. Restriktionen av T till $\mathcal{E}_\lambda(T)$ är förstås lika med λ gånger identitetsoperatorn.

Exempel 8.2.1 Låt D vara deriveringsoperatorn på vektorrummet $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Eftersom $De^{\lambda t} = \lambda\, e^{\lambda t}$, är varje reellt tal λ ett egenvärde till D med funktionen $e^{\lambda t}$ som egenvektor. Motsvarande egenrum består av lösningarna till differentialekvationen $y' = \lambda y$ och spänns upp av funktionen $e^{\lambda t}$. □

Exempel 8.2.2 Egenvärden och egenvektorer till operatorn D^2 får vi genom att lösa andra ordningens linjära differentialekvation $y'' = \lambda y$. Åter är varje reellt tal λ ett egenvärde, men egenrummen är nu tvådimensionella. Med $\beta = \sqrt{|\lambda|}$ får vi

$$\mathcal{E}_\lambda(D^2) = \begin{cases} \operatorname{spn}\{e^{\beta t}, e^{-\beta t}\} & \text{om } \lambda > 0, \\ \operatorname{spn}\{1, t\} & \text{om } \lambda = 0, \\ \operatorname{spn}\{\sin\beta t, \cos\beta t\} & \text{om } \lambda < 0. \end{cases}$$

□

Exempel 8.2.3 Definiera operatorn T på rummet $\mathcal{P}$ av alla polynom genom att sätta $Tp(t) = tp'(t)$.

Differentialekvationen $ty' = \lambda y$ har lösningarna $y = Ct^\lambda$, som är polynom om och endast om λ är ett naturligt tal. Varje naturligt tal n är således ett egenvärde till T, och motsvarande egenrum är endimensionellt och spänns upp av polynomet t^n. □

Exempel 8.2.4 Operatorn $Tf(t) = tf(t)$ på rummet $\mathcal{P}$ saknar egenvärden. □

Exempel 8.2.5 Låt T vara operatorn på $\mathbf{R}^2$ som har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

med avseende på standardbasen. Eftersom

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

är 2 och 3 egenvärden till T med $v = (1, 1)$ resp. $w = (1, 2)$ som motsvarande egenvektorer. Den geometriska innebörden är att avbildningen sträcker vektorer i riktningen v med faktorn 2 och vektorer i riktningen w med faktorn 3. I basen v, w har T en diagonal matris, nämligen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Egenrummen har följande fundamentala egenskap.

Sats 8.2.3 *De olika egenrummen $\mathcal{E}_\lambda(T)$ till en linjär operator T är linjärt oberoende.*

Bevis. Vi skall visa påståendet med induktion och antar att vi redan har visat att $m-1$ stycken olika egenrum till en operator är linjärt oberoende. Låt $\mathcal{E}_{\lambda_i}(T)$, $i = 1, 2, \dots, m$, vara m stycken egenrum som hör till olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Vi skall visa att de m egenrummen är linjärt oberoende. Antag därför att

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = 0, \tag{1}$$

där $v_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}(T)$ för $1 \le i \le m$. Vi måste visa att $v_i = 0$ för alla i.

Applicera operatorn T på vänsterledet i (1); eftersom $T(v_i) = \lambda_i v_i$ får man ekvationen

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = T(0) = 0. \tag{2}$$

Multiplicera (1) med λ_1 och subtrahera resultatet från (2); detta resulterar i

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0.$$

Enligt induktionsantagandet är de $m-1$ egenrummen $\mathcal{E}_{\lambda_i}(T)$, $2 \le i \le m$, linjärt oberoende, så det följer av ekvationen ovan att $(\lambda_i - \lambda_1)v_i = 0$ för $i = 2, \dots, m$, och eftersom $\lambda_i \ne \lambda_1$ är $v_i = 0$ för $i = 2, \dots, m$. Ekvation (1) reduceras därför till $v_1 = 0$, så $v_i = 0$ för alla i, och därmed är induktionssteget komplett. $\square$

Korollarium 8.2.4 *Egenvektorer $v_1, v_2, \dots, v_m$, som hör till olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ av en linjär operator, är linjärt oberoende.*

I ett n-dimensionellt vektorrum är varje uppsättning av fler än n vektorer linjärt beroende. Följande sats är därför en omedelbar följd av korollarium 8.2.4.

Sats 8.2.5 *En linjär operator på ett n-dimensionellt vektorrum har högst n stycken olika egenvärden.*

I fortsättningen av det här avsnittet antar vi att V ***är ett ändligt-dimensionellt vektorrum*** över en kropp $\mathbf{K}$ och sätter $n = \dim V$. För att undvika trivialiteter förutsätter vi också att vektorrummet inte är trivialt, dvs. att $n > 0$.

Låt T vara en linjär operator på V och betrakta för $t \in \mathbf{K}$ determinanten $\det(tI - T)$, där I som vanligt betecknar den identiska operatorn på V. Om $A = [a_{ij}]$ är matrisen för T med avseende på någon godtycklig bas, så är

$$\det(tI - T) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Utveckling av den sistnämnda determinanten visar att $\det(tI - T)$ är ett polynom av grad n och med ledande koefficient 1. Polynomets konstantterm fås genom att sätta $t = 0$ och är $\det(-T) = (-1)^n \det T$.

Polynomet $\det(tI - T)$ är så viktigt att det förtjänar en egen beteckning och ett särskilt namn:

Definition 8.2.6 Polynomet

$$\chi_T(t) = \det(tI - T)$$

kallas det *karakteristiska polynomet* till operatorn T.

Nästa sats förklarar det karakteristiska polynomets betydelse.

Sats 8.2.7 *En skalär $\lambda \in \mathbf{K}$ är ett egenvärde till operatorn T om och endast om λ är ett nollställe till det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$.*

Bevis. Skalären λ är ett egenvärde till T om och endast om operatorn $T - \lambda I$ inte är injektiv. För operatorer på ändligdimensionella rum är injektivitet ekvivalent med att operatorns determinant är skild från noll, så det följer att λ är ett egenvärde om och endast om $\chi_T(\lambda) = \det(\lambda I - T) = 0$. $\square$

Enligt algebrans fundamentalsats har varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter minst ett komplext nollställe. Sats 8.2.7 har därför följande korollarium.

Korollarium 8.2.8 *En linjär operator på ett ändligdimensionellt komplext vektorrum ($\neq \{0\}$) har minst ett egenvärde.*

En operator på ett reellt vektorrum kan däremot sakna egenvärden, eftersom ett reellt polynom inte behöver ha några reella nollställen; se exempel 8.2.7 nedan.

Exempel 8.2.6 Låt T vara den mot matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

svarande linjära operatorn på $\mathbf{R}^2$. Det karakteristiska polynomet är

$$\det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 4$$

med nollställena 1 och 4, som alltså är T:s egenvärden.

De till 1 hörande egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(I-T)v = 0$, som är är ett homogent ekvationssystem med $E - A$ som koefficientmatris. Systemet är

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

och har lösningarna $(x_1, x_2) = (-2t, t) = t(-2, 1)$. De till egenvärdet 1 hörande egenvektorerna är alltså vektorerna $t(-2, 1)$, där $t \neq 0$.

Egenvektorerna till 4 fås analogt som lösningar till $(4I - T)v = 0$, dvs. till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Lösningarna är $(x_1, x_2) = (t, t) = t(1, 1)$, så egenrummet $\mathcal{E}_4(T)$ består av alla multipler av vektorn $(1, 1)$. □

Varje kvadratisk matris A av ordning n med element i $\mathbf{K}$ kan som i exemplet ovan uppfattas som en linjär operator på $\mathbf{K}^n$. Vi kan därför definiera *matrisens* egenvärden, egenvektorer och karakteristiska polynom som motsvarande linjära operators egenvärden, egenvektorer och karakteristiska polynom.

Exempel 8.2.7 Betrakta den reella matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisens karakteristiska polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

saknar reella nollställen. Som reell matris saknar därför A egenvärden.

Men A kan också uppfattas som en komplex matris även om alla element råkar vara reella. Karakteristiska polynomet är fortfarande $\chi_A(t) = t^2 + 1$, men med den skillnaden att t nu är en komplex variabel. Som komplex matris har därför A två egenvärden, nämligen $\pm\mathrm{i}$. Motsvarande egenrum spänns upp av vektorerna $(1, \mathrm{i})$ resp. $(1, -\mathrm{i})$. □

Det karakteristiska polynomet till en operator på ett n-dimensionellt rum är som vi redan konstaterat ett polynom av grad n med ledande koefficient 1. En naturlig fråga är om omvändningen gäller, dvs. om varje polynom med ledande koefficient 1 är karakteristiskt polynom till någon operator. Svaret är jakande, och nästa sats visar hur man konstruerar en operator med ett föreskrivet karakteristiskt polynom.

Sats 8.2.9 *Låt V vara vektorrum av dimension n och med bas $v_1, v_2, \dots, v_n$, och låt $p(t) = t^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j$ vara ett godtyckligt polynom av grad n med ledande koefficient 1. Definiera operatorn T på V genom att sätta*

$$Tv_k = \begin{cases} v_{k+1} & \text{för } k = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{j-1} v_j & \text{för } k = n. \end{cases}$$

Då är $p(t)$ operatorns karakteristiska polynom.

Anmärkning. Operatorn T och vektorn $v = v_1$ har egenskapen att vektorerna $v, Tv, \dots, T^{n-1}v$ spänner upp rummet V. En sådan vektor v kallas en *cyklisk* vektor till operatorn T.

Bevis. Operatorn T har med avseende på den givna basen matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Det karakteristiska polynomet är därför

$$\chi_T(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

För att beräkna denna determinant kan man exempelvis för $i = 2,\, 3,\, \dots,\, n$ addera rad i multiplicerad med t^{i-1} till den första raden; detta resulterar i determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p(t) \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Utveckling efter första raden ger nu $\chi_T(t) = (-1)^{n+1}p(t)\cdot(-1)^{n-1} = p(t)$. $\square$

Nästa sats visar vad som händer med det karakteristiska polynomet vid kvot- och direkt-summabildningar.

Sats 8.2.10 *Låt T vara en linjär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V.*

(a) *Antag att W är ett invariant delrum. Då är*

$$\chi_T(t) = \chi_{T|_W}(t)\cdot\chi_{T_{V/W}}(t).$$

(b) *Antag att operatorn T är fullständigt reducerad av de två delrummen W_1, W_2 och sätt $T_i = T|_{W_i}$ så att $T = T_1 \oplus T_2$. Då är*

$$\chi_T(t) = \chi_{T_1}(t)\cdot\chi_{T_2}(t).$$

Bevis. (a) W är ett invariant delrum till operatorn $tI - T$, och för restriktionen av operatorn till delrummet W respektive den inducerade operatorn på kvotrummet V/W gäller sambanden

$$(tI-T)|_W = tI - T|_W \text{ och } (tI-T)_{V/W} = tI - T_{V/W},$$

där vi som vanligt använder samma beteckning I för identitetsoperatorerna på V, W och V/W. Det följer därför av sats 7.3.8 att $\chi_T(t) = \det(tI-T) = \chi_{T|_W}(t)\cdot\chi_{T_{V/W}}(t)$.

(b) följer analogt ur sats 7.3.7. $\square$

Definition 8.2.11 Om λ är ett nollställe av multiplicitet m till det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$ säges egenvärdet ha *algebraisk multiplicitet m.* Dimensionen hos motsvarande egenrum $\mathcal{E}_\lambda(T)$ kallas egenvärdets *geometriska multiplicitet.*

Exempel 8.2.8 Låt T vara operatorn på $\mathbf{R}^2$ som i standardbasen har matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet $\chi_T(t) = (t-3)^2$ har 3 som dubbelt nollställe. Egenvärdet 3 har således algebraisk multiplicitet 2. Egenrummet $\mathcal{E}_3(T)$ består av lösningarna till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0x_1 - 5x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

och har dimension 1, så egenvärdets geometriska multiplicitet är 1. □

Exempel 8.2.8 visar att den geometriska multipliciteten hos ett egenvärde kan vara lägre än den algebraiska. Nästa sats visar att den inte kan vara högre.

Sats 8.2.12 *Den geometriska multipliciteten hos ett egenvärde är mindre än eller lika med den algebraiska multipliciteten.*

Bevis. Låt λ vara ett egenvärde till T med geometrisk multiplicitet m. Detta innebär att egenrummet $W = \mathcal{E}_\lambda(T)$ har dimension m. Restriktionen $T|_W$ av operatorn T till egenrummet W är förstås lika med λI, där I är identitetsoperatorn på egenrummet, så det följer att $\chi_{T|_W}(t) = \det{(t-\lambda)I} = (t-\lambda)^m$. Enligt sats 8.2.10 är därför $\chi_T(t) = (t-\lambda)^m \chi_{T_{V/W}}(t)$, vilket visar att egenvärdets algebraiska multiplicitet är minst lika med m. □

För enkla egenvärden, dvs. egenvärden med algebraisk multiplicitet ett, är naturligtvis den algebraiska och geometriska multipliciteten lika, ty ett egenvärdes geometriska multiplicitet är ju alltid minst ett.

Definition 8.2.13 En linjär operator T på ett ändligdimensionellt rum V kallas *diagonaliserbar* om det finns en bas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ med avseende på vilken T:s matris är en diagonalmatris $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

I så fall är $Tv_i = d_i v_i$, så basvektorerna i en sådan bas är egenvektorer till operatorn med motsvarande diagonalelement som egenvärden. En operator är således diagonaliserbar om och endast om det finns en bas som består av egenvektorer till operatorn.

Vidare är $\chi_T(t) = \prod_{i=1}^n (t - d_i)$, så det karakteristiska polynomet har en fullständig faktorisering som en produkt av förstagradspolynom. Den algebraiska multipliciteten hos ett egenvärde λ är förstås lika med antalet gånger som λ förekommer som diagonalelement d_i i diagonalmatrisen D, och egenrummet $\mathcal{E}_\lambda(T)$ spänns upp av de mot dessa diagonalelement svarande basvektorerna, så de geometriska och algebraiska multipliciteterna sammanfaller för egenvärdena till diagonaliserbara operatorer T.

Vi har därmed visat ena halvan av följande sats.

Sats 8.2.14 *En linjär operator på ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp är diagonaliserbar om och endast om operatorns karakteristiska polynom kan faktoriseras som en produkt av förstagradspolynom med koeffici-*

enter i kroppen och varje nollställe har samma geometriska och algebraiska multiplicitet.

Bevis. Det återstår att visa att de angivna villkoren är tillräckliga för diagonaliserbarhet. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ vara de olika nollställena till det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$, och låt n_i beteckna den algebraiska multipliciteten hos egenvärdet λ_i så att $\chi_T(t) = \prod_{i=1}^p (t-\lambda_i)^{n_i}$. Då är $\sum_{i=1}^p n_i = \dim V$, och enligt förutsättningarna är n_i också lika med dimensionen för egenrummet $\mathcal{E}_{\lambda_i}(T)$.

Eftersom de olika egenrummen är linjärt oberoende är deras summa direkt, och eftersom $\sum_{i=1}^p \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}(T) = \sum_{i=1}^p n_i = \dim V$, är

$$V = \mathcal{E}_{\lambda_1}(T) \oplus \mathcal{E}_{\lambda_2}(T) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_p}(T).$$

Vi får förstås en bas för V av egenvektorer till T genom att välja baser i vart och ett av egenrummen. □

Korollarium 8.2.15 *Om T är en operator på ett n-dimensionellt vektorrum med n stycken olika egenvärden, så är T diagonaliserbar.*

Bevis. Förutsättningarna innebär att $\chi_T(t)$ har n stycken enkla nollställen, och för enkla nollställen sammanfaller den algebraiska och den geometriska multipliciteten. Korollariet följer därför omedelbart ur satsen ovan. □

Definition 8.2.16 En kvadratisk matris A av ordning n med element i $\mathbf{K}$ kallas *diagonaliserbar* om den är diagonaliserbar uppfattad som linjär operator på $\mathbf{K}^n$.

En matris diagonaliserbarhet tar sig följande konkreta uttryck.

Sats 8.2.17 *Antag att $n\times n$-matrisen A är diagonaliserbar med egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och en motsvarande bas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ av egenvektorer. Bilda matrisen C genom att skriva egenvektorerna som kolonnvektorer och diagonalmatrisen D genom att välja egenvärdena som diagonalelement i motsvarande ordning. Då är*

$$C^{-1}AC = D.$$

Bevis. Matrisen C är lika med transformationsmatrisen vid basbytet mellan basen av egenvektorer och standardbasen i $\mathbf{K}^n$. I basen av egenvektorer är matrisen för A, uppfattad som linjär operator, lika med diagonalmatrisen D. Sambandet mellan en linjär avbildnings matriser i olika baser innebär därför att att $C^{-1}AC = D$. □

Exempel 8.2.9 Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Matrisens karakteristiska polynom är

$$\begin{vmatrix} t-3 & -1 & 1 \\ -2 & t-4 & 2 \\ -4 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ 2-t & t-4 & 2 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ 0 & t-5 & 3 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix}$$
$$= (t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)^2$$

med egenvärdena 1 och 2.

Egenrummet till egenvärdet $\lambda_1 = 1$ är lika med nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Genom att lösa motsvarande homogena ekvationssystem ser vi att egenrummet spänns upp av kolonnvektorn $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t$, som således är en motsvarande egenvektor.

Egenvärdet $\lambda_2 = 2$ har algebraisk multiplicitet 2. Motsvarande egenrum är lika med nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Motsvarande homogena ekvationssystem är alltså $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, så egenrummet är tvådimensionellt och spänns upp av exempelvis kolonnvektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$

Matrisen A är därför diagonaliserbar, och för

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

är $C^{-1}AC = D$. □

Som tillämpning på diagonalisering visar vi hur man kan lösa ett system av linjära differentialekvationer.

Exempel 8.2.10 Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + \ x_2(t) - \ x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t). \end{cases}$$

Lösning: Med $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^t$ och matrisen A som i exempel 8.2.9 kan systemet skrivas på formen

$$x'(t) = Ax(t).$$

Låt matriserna C och D vara som i exempel 8.2.9, och inför nya funktioner

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \end{bmatrix}^t$$

genom att sätta

$$y(t) = C^{-1}x(t).$$

Då är $x(t) = Cy(t)$ och genom derivering får vi

$$y'(t) = C^{-1}x'(t) = C^{-1}Ax(t) = C^{-1}ACy(t) = Dy(t).$$

Eftersom matrisen D är diagonal, har differentialekvationen $y'(t) = Dy(t)$ följande enkla form

$$\begin{cases} y_1'(t) = \ y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

Genom att lösa dessa differentialekvationerna var för sig får vi $y_1(t) = c_1e^t$, $y_2(t) = c_2e^{2t}$ och $y_3(t) = c_3e^{2t}$, så $y(t) = \begin{bmatrix} c_1e^t & c_2e^{2t} & c_3e^{2t} \end{bmatrix}^t$. Det följer nu slutligen ur $x(t) = Cy(t)$ att

$$\begin{cases} x_1 = \ c_1e^t + c_2e^{2t} \\ x_2 = 2c_1e^t \qquad\qquad + c_3e^{2t} \\ x_3 = 4c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{2t} \end{cases}$$

vilket är den allmänna lösningen till det givna systemet av differentialekvationer. $\square$

Med hjälp av diagonalisering är det trivialt att beräkna potenser av diagonaliserbara matriser: Om $C^{-1}AC = D$, så är $A = CDC^{-1}$, och det följer att

$$A^n = (CDC^{-1})^n = CDC^{-1} \cdot CDC^{-1} \cdots CDC^{-1} = CD^nC^{-1}.$$

Exempel 8.2.11 Beräkna A^6 för matrisen A i exempel 8.2.9.
Lösning:

$$\begin{aligned} A^6 = CD^6C^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^6 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 & 63 & -63 \\ 126 & 190 & -126 \\ 252 & 255 & -188 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Komplexifiering

Spektralteorin är både enklare och rikare i komplexa vektorrum än i reella beroende på att karakteristiska polynom i det förstnämnda fallet har en fullständig faktorisering som en produkt av förstagradspolynom. Genom att utnyttja komplexifiering kan emellertid många resultat för operatorer på komplexa vektorrum översättas till resultat för operatorer på reella vektorrum.

I avsnitt 3.12 visade vi att varje reellt vektorrum V kan inbäddas i ett komplext vektorrum $V_{\mathbf{C}}$, vars element har formen $v' + \mathrm{i}v''$, där v', $v'' \in V$. En linjär operator T på V kan utvidgas till en linjär operator $T_{\mathbf{C}}$ på komplexifieringen $V_{\mathbf{C}}$; den komplexifierade operatorn definieras av att $T_{\mathbf{C}}(v' + \mathrm{i}v'') = Tv' + \mathrm{i}\,Tv''$. En bas för V är automatiskt en bas för $V_{\mathbf{C}}$, och med avseende på en sådan bas har T och $T_{\mathbf{C}}$ samma matris. Detta medför förstås följande resultat:

Påstående 8.2.18 *Om T är en operator på ett ändligdimensionellt reellt vektorrum, så har T och $T_{\mathbf{C}}$ samma karakteristiska polynom.*

Operatorerna T och $T_{\mathbf{C}}$ har därför samma reella egenvärden. Detta är också lätt att visa utan hjälp av det karakteristiska polynomet.

Sats 8.2.19 *Låt T vara en linjär operator på ett reellt vektorrum V, och låt λ vara ett reellt tal. Då är*

$$\mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}}) = \mathcal{E}_\lambda(T)_{\mathbf{C}},$$

dvs. λ är ett egenvärde till T om och endast om λ är ett egenvärde till $T_{\mathbf{C}}$, och den komplexifierade operatorns egenrum är lika med komplexifieringen av T:s egenrum. Speciellt är alltså $\dim \mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}}) = \dim \mathcal{E}_\lambda(T)$.

Bevis. För att visa inklusionen $\mathcal{E}_\lambda(T)_{\mathbf{C}} \subseteq \mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}})$ antar vi att $v' + \mathrm{i}v'' \in \mathcal{E}_\lambda(T)_{\mathbf{C}}$. Då är $Tv' = \lambda v'$ och $Tv'' = \lambda v''$. Det följer att $T_{\mathbf{C}}(v' + \mathrm{i}v'') = \lambda(v' + \mathrm{i}v'')$, vilket visar att $v' + \mathrm{i}v'' \in \mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}})$.

Omvänt medför förstås $T_{\mathbf{C}}(v' + \mathrm{i}v'') = \lambda(v' + \mathrm{i}v'')$ att $Tv' = \lambda v'$ och $Tv'' = \lambda v''$. Detta innebär att v' och v'' tillhör $\mathcal{E}_\lambda(T)$, så $v' + \mathrm{i}v''$ tillhör $\mathcal{E}_\lambda(T)_{\mathbf{C}}$. Därmed har vi också visat att $\mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}}) \subseteq \mathcal{E}_\lambda(T)_{\mathbf{C}}$. □

Operatorn $T_{\mathbf{C}}$ har naturligtvis i allmänhet också icke-reella egenvärden, som inte är egenvärden till T. Motsvarande egenvektorer till $T_{\mathbf{C}}$ ger som vi strax skall se upphov till tvådimensionella invarianta delrum till T.

Sats 8.2.20 *Låt T vara en linjär operator på ett reellt vektorrum V, och låt $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ vara ett komplext tal med $\beta \neq 0$. Då gäller:*

(a) *Om λ är ett egenvärde till $T_{\mathbf{C}}$ så är också $\overline{\lambda}$ ett egenvärde till $T_{\mathbf{C}}$ och*

$$\mathcal{E}_{\overline{\lambda}}(T_{\mathbf{C}}) = \overline{\mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}})} \quad (= \{\overline{v} \mid v \in \mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}})\}).$$

(b) *λ är ett egenvärde till $T_{\mathbf{C}}$ med egenvektor $v = v' + \mathrm{i}v''$ om och endast om*

$$\begin{cases} Tv' = \alpha v' - \beta v'' \\ Tv'' = \beta v' + \alpha v''. \end{cases}$$

Vektorerna v' och v'' är i så fall linjärt oberoende och spänner upp ett tvådimensionellt T-invariant delrum av V.

(c) *Om $v_1, v_2, \dots, v_m$ är en bas för egenrummet $\mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}})$, så är vektorerna $\operatorname{Re} v_1$, $\operatorname{Im} v_1$, $\dots$, $\operatorname{Re} v_m$, $\operatorname{Im} v_m$ bas för ett $2m$-dimensionellt T-invariant delrum U av V, och med avseende på denna bas har restriktionen $T|_U$ matrisen*

$$\begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}$$

där D är 2×2-matrisen

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Bevis. (a) Av $T_{\mathbf{C}}v = \lambda v$ följer $T_{\mathbf{C}}\overline{v} = \overline{T_{\mathbf{C}}v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Om v är en egenvektor till egenvärdet λ är alltså $\overline{v}$ en egenvektor till egenvärdet $\overline{\lambda}$ (och omvänt). Detta visar (a).

(b) Sätt $v = v' + \mathrm{i}v''$. Eftersom $T_{\mathbf{C}}v = Tv' + \mathrm{i}\,Tv''$ och

$$\lambda v = \alpha v' - \beta v'' + \mathrm{i}(\beta v' + \alpha v''),$$

är λ är ett egenvärde med v som egenvektor om och endast om (b) gäller. I så fall är också $\overline{v} = v' - \mathrm{i}v''$ en egenvektor till egenvärdet $\overline{\lambda}$, och vektorerna v och $\overline{v}$ är linjärt oberoende i $V_{\mathbf{C}}$, eftersom de hör till olika egenvärden. Det följer att vektorerna v' och v'' också är linjärt oberoende, ty de har samma spann i $V_{\mathbf{C}}$ som v och $\overline{v}$.

(c) Egenrum som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende. Under förutsättningarna i (c) är därför $v_1, \dots, v_m, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m$ en bas för den direkta summan $\mathcal{E}_\lambda(T_{\mathbf{C}}) \oplus \mathcal{E}_{\overline{\lambda}}(T_{\mathbf{C}})$. De lika många vektorerna $\operatorname{Re} v_1$, $\operatorname{Im} v_1, \dots, \operatorname{Re} v_m$, $\operatorname{Im} v_m$ har samma spann i $V_{\mathbf{C}}$ och utgör därför också en bas för den direkta summan. Eftersom de ligger i V spänner de i det reella vektorrummet V upp ett $2m$-dimensionellt delrum U. På grund av (b) är vidare

$$\begin{aligned} T(\operatorname{Re} v_j) &= \alpha \operatorname{Re} v_j - \beta \operatorname{Im} v_j \\ T(\operatorname{Im} v_j) &= \beta \operatorname{Re} v_j + \alpha \operatorname{Im} v_j \end{aligned}$$

vilket visar att delrummet U är T-invariant och att T:s restriktion till U har den angivna matrisen. □

Sats 8.2.20 medför speciellt att de icke-reella egenvärdena till $T_{\mathbf{C}}$ är parvis konjugerade. Detta följer för ändligdimensionella rum förstås också av att det karakteristiska polynomet har reella koefficienter.

Sats 8.2.21 *Låt T vara en linjär operator på ett reellt ändligdimensionellt vektorrum, och antag att komplexifieringen $T_{\mathbf{C}}$ är diagonaliserbar. Låt γ_1, γ_2, ..., γ_p vara de reella och $\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1$, $\alpha_1 - \mathrm{i}\beta_1$, ..., $\alpha_q + \mathrm{i}\beta_q$, $\alpha_q - \mathrm{i}\beta_q$ de icke-reella nollställena till det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$, där varje nollställe upprepas lika många gånger som multipliciteten anger. Då finns det en bas för V så att T:s matris har utseendet*

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & D_q \end{bmatrix}$$

där

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

Bevis. Eftersom $T_{\mathbf{C}}$ är diagonaliserbar är $V_{\mathbf{C}}$ en direkt summa av operatorns olika egenrum. Enligt föregående två satser kan vi därför välja en bas för

$V_{\mathbf{C}}$ bestående av egenvektorer till $T_{\mathbf{C}}$, så att egenvektorer som hör till reella egenvärden ligger i V och så att egenvektorer som hör till icke-reella egenvärden förekommer parvis på formen v, $\overline{v}$. Genom att byta ut vektorer av den sistnämnda typen mot $\operatorname{Re} v$ och $\operatorname{Im} v$ får vi en bas för V med avseende på vilken T:s matris har den den angivna formen. □

EXEMPEL 8.2.12 Låt T vara operatorn på $\mathbf{R}^3$ som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Operatorns karakteristiska polynom $\chi_T(t) = (t-1)(t^2-4t+13)$ har den reella roten 1 och de komplexa rötterna $2 \pm 3\mathrm{i}$. Detta innebär att operatorn T (och den reella matrisen A) inte är diagonaliserbar. Däremot är komplexifieringen $T_{\mathbf{C}}$, som är en operator på $\mathbf{C}^3$, diagonaliserbar. $T_{\mathbf{C}}$:s matris med avseende på standardbasen i $\mathbf{C}^3$ är förstås lika med A. En mot egenvärdet 1 svarande egenvektor är vektorn $v_1 = (0, 1, -1)$, och till det komplexa egenvärdet $\lambda = 2 + 3\mathrm{i}$ hör egenvektorn $v = (1 - \mathrm{i}, 1, -1 + \mathrm{i}) = (1, 1, -1) + \mathrm{i}(-1, 0, 1)$. Om vi sätter $v_2 = (1, 1, -1)$ och $v_3 = (-1, 0, 1)$, så spänner alltså v_2 och v_3 enligt sats 8.2.20 upp ett T-invariant delrum U. Vidare är $Tv_2 = 2v_2 - 3v_3$ och $Tv_3 = 3v_2 + 2v_3$, vilket man naturligtvis också lätt kan verifiera direkt.

Med avseende på basen v_1, v_2, v_3 för $\mathbf{R}^3$ har T matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

som som sina kolonner har vektorerna v_1, v_2 och v_3, är transformationsmatris mellan den ursprungliga basen och den nya basen, och vi har sambandet $C^{-1}AC = B$. □

Övningar

8.5 Antag att operatorn T har egenvärdet λ och motsvarande egenvektor v. Visa att v också är en egenvektor till T^2 och bestäm motsvarande egenvärde.

8.6 Generalisera föregående övning genom att visa att om λ är ett egenvärde till T, och $p(t)$ är ett godtyckligt polynom, så är $p(\lambda)$ ett egenvärde till operatorn $p(T)$.

8.7 Antag att λ är ett egenvärde till en inverterbar linjär operator T. Visa att λ^{-1} är ett egenvärde till inversen T^{-1}.

8.8 Låt T vara operatorn $Tf(t) = f(-t)$ på rummet $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenrum.

8.9 Låt $S\colon V \to W$ och $T\colon W \to V$ vara två linjära avbildningar. Visa följande påståenden:

a) Om v är en egenvektor till operatorn ST svarande mot ett nollskilt egenvärde λ, så är Tv en egenvektor till operatorn TS svarande mot samma egenvärde. Det följer alltså att ST och TS har samma nollskilda egenvärden.

b) Om $\dim V = \dim W < \infty$, så är 0 ett egenvärde till ST om och endast om 0 är ett egenvärde TS. I detta fall har således de båda operatorerna samma egenvärden.

c) Om $\dim W < \dim V$, så är 0 ett egenvärde till TS, men 0 behöver inte vara ett egenvärde till ST.

d) Det finns operatorer $S\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ och $T\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ så att 0 är ett egenvärde till ST men inte till TS.

8.10 Antag att S och T är operatorer på samma ändligdimensionella rum och att S^{-1} existerar. Visa att $\chi_{S^{-1}TS}(t) = \chi_T(t)$ och att $\chi_{ST}(t) = \chi_{TS}(t)$.

8.11 Låt v och w vara egenvektorer till en linjär operator T hörande till olika egenvärden. Visa att $v + w$ inte är en egenvektor till T.

8.12 Antag att varje nollskild vektor i V är en egenvektor till operatorn T på V. Visa att $T = \lambda I$ för någon skalär λ.

8.13 Diagonalisera om möjligt följande matriser

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & -10 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.14 För kvadratiska matriser A definieras matrisen e^A med hjälp av serieutveckling som

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

a) Beräkna e^D då D är diagonalmatrisen $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

b) Visa att $C^{-1}\mathrm{e}^A C = \mathrm{e}^{C^{-1}AC}$

c) Beräkna e^A, då A är matrisen i exempel 8.2.9.

8.15 Visa att om T är en linjär operator på ett ändligdimensionellt komplext vektorrum V, och W är ett invariant äkta delrum, så finns det ett invariant delrum U så att $W \subseteq U$ och $\dim U = \dim W + 1$.
[Ledning: Låt X vara ett endimensionellt invariant delrum till den inducerade operatorn $T|_{V/W}$ och utnyttja övning 8.4.]

8.16 Visa med hjälp av föregående övning att om T är en linjär operator på ett n-dimensionellt komplext vektorrum V, så finns det en kedja

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

av invarianta delrum med $\dim V_i = i$ för alla i, och drag härav slutsatsen att det finns en bas så att T:s matris är övertriangulär.

8.17 Betrakta matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ som en matris med koefficienter i kroppen $\mathbf{Z}_3$. Bestäm egenvärden och egenvektorer och diagonalisera matrisen.

8.3 Minimalpolynomet

Låt T vara en operator på V och antag att $p(t)$ är ett polynom med egenskapen att $p(T) = 0$. Då är förstås $\mathcal{N}(p(T)) = V$. En faktorisering av polynomet $p(t)$ i primfaktorer ger därför på grund av sats 8.1.6 upphov till en uppdelning av hela rummet V i en direkt summa av invarianta delrum W_j till T. Detta är ett viktigt skäl för att intressera sig för icke-triviala polynom $p(t)$ med egenskapen att $p(T) = 0$.

Definition 8.3.1 Polynomet $p(t)$ säges *annihilera* operatorn T om $p(T) = 0$.

Naturligtvis är $p(T) = 0$ om $p(t)$ är nollpolynomet, men detta är förstås ett ointressant fall. När vi i fortsättningen säger att $p(t)$ är ett annihilerande polynom underförstår vi därför att $p(t)$ inte är nollpolynomet.

Låt oss börja med att konstatera att på ändligdimensionellt rum har varje operator annihilerande polynom.

Sats 8.3.2 *Om T är en operator på ett ändligdimensionellt rum V, så finns det ett icke-trivialt annihilerande polynom.*

Bevis. Sätt $\dim V = n$; då har rummet av alla operatorer på V dimension n^2. Varje uppsättning av $n^2 + 1$ operatorer är därför linjärt beroende. Speciellt är operatorerna I, T, T^2, ..., T^{n^2} linjärt beroende, så det finns därför koefficienter c_j, som inte alla är 0, så att $\sum_{j=0}^{n^2} c_j T^j = 0$. Detta innebär att det icke-triviala polynomet $p(t) = \sum_{j=0}^{n^2} c_j t^j$ är ett annihilerande polynom till T. $\square$

Beviset ovan ger oss ett annihilerande polynom av grad högst lika med $(\dim V)^2$; vi skall förbättra denna gräns längre fram (sats 8.3.11) och visa att det finns ett annihilerande polynom vars grad är högst lika med $\dim V$. Först ger vi ett exempel som visar att den gränsen inte kan förbättras.

Exempel 8.3.1 Låt T vara en operator med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polynomet $p(t) = (t-1)^2$ annihilerar T eftersom $(A-E)^2 = 0$. Däremot finns det inte något annihilerande förstagradspolynom, ty för varje icke-trivialt polynom $q(t) = a_1 t + a_0$ är

$$q(A) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & 2a_1 \\ 0 & a_0 + a_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exempel 8.3.2 En operator kan ha annihilerande polynom som är av lägre grad än rummets dimension. Exempelvis annihileras identitetsoperatorn I (på varje vektorrum) av polynomet $t - 1$. □

Låt nu T vara en operator på ett godtyckligt vektorrum V, och antag att T har ett icke-trivialt annihilerande polynom. Av alla icke-triviala polynom som annihilerar T finns det förstås annihilerande polynom av lägst möjliga gradtal, och av alla annihilerande polynom av lägst möjliga gradtal måste det finnas ett unikt polynom med ledande koefficient lika med 1, ty om $p(t)$ och $q(t)$ är två annihilerande polynom av lägst möjliga gradtal och om båda polynomen har ledande koefficient 1, så är även polynomet $p(t) - q(t)$ ett annihilerande polynom till operatorn T. Men detta polynom har lägre grad än $p(t)$ och måste därför vara nollpolynomet, dvs. $p(t) = q(t)$.

Definition 8.3.3 Antag att operatorn T har annihilerande polynom. Det entydigt bestämda annihilerande polynomet med lägst gradtal och ledande koefficient lika med 1 kallas för *minimalpolynomet* till T och kommer att betecknas $\phi_T(t)$.

En operator på ett oändligdimensionellt rum behöver inte ha något annihilerande polynom; exempelvis saknar deriveringsoperatorn D på rummet $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ annihilerande polynom. Däremot har som vi redan konstaterat varje operator på ett ändligdimensionellt rum annihilerande polynom och därmed också minimalpolynom.

Sats 8.3.4 *Polynomet $p(t)$ annihilerar T om och endast om $p(t)$ en multipel av minimalpolynomet $\phi_T(t)$.*

Bevis. Att varje multipel $q(t)\phi_T(t)$ av minimalpolynomet annihilerar operatorn T är uppenbart.

Antag omvänt att $p(t)$ är ett annihilerande polynom. Genom att dividera $p(t)$ med minimalpolynomet $\phi_T(t)$ får vi

$$p(t) = q(t)\phi_T(t) + r(t),$$

där resten $r(t)$ är ett polynom som har lägre grad än minimalpolynomet $\phi_T(t)$. Insättning av operatorn T i relationen ovan ger att $r(T) = 0$, vilket endast är möjligt om $r(t)$ är nollpolynomet. Detta visar att $p(t) = q(t)\phi_T(t)$. □

Nästa sats ger oss en relation mellan en operators egenvärden och minimalpolynomet.

Sats 8.3.5 *Antag att T är en operator med minimalpolynom $\phi_T(t)$. Då är $\lambda \in \mathbf{K}$ ett egenvärde till T om och endast om $\phi_T(\lambda) = 0$.*

Bevis. Antag först att λ är ett egenvärde och låt v vara en motsvarande egenvektor. Då är $Tv = \lambda v$ och det följer med induktion att $T^j v = \lambda^j v$ för alla icke-negativa heltal j. Om $p(t) = \sum_{j=0}^k a_j t^j$ är ett godtyckligt polynom, så är därför $p(T)v = \sum_{j=0}^k a_j T^j v = \sum_{j=0}^k a_j \lambda^j v = p(\lambda)v$. Detta visar att $p(\lambda)$ är ett egenvärde till operatorn $p(T)$.

Om nu $p(t)$ är ett annihilerande polynom, så följer det att $p(\lambda)v = p(T)v = 0$, och eftersom $v \neq 0$ är $p(\lambda) = 0$. Speciellt är alltså $\phi_T(\lambda) = 0$.

Antag omvänt att $\phi_T(\lambda) = 0$. Enligt faktorsatsen är polynomet $\phi_T(t)$ delbart med polynomet $t - \lambda$, dvs. det finns ett polynom $q(t)$ så att

$$\phi_T(t) = (t - \lambda)q(t).$$

Eftersom $q(t)$ har lägre grad än $\phi_T(t)$ kan inte $q(t)$ vara ett annihilerande polynom, så det finns en vektor w så att $v = q(T)w \neq 0$, och eftersom

$$(T - \lambda I)v = (T - \lambda I)q(T)w = \phi_T(T)w = 0,$$

är λ ett egenvärde till T. □

Sats 8.3.5 antyder att det finns ett samband mellan minimalpolynomet $\phi_T(t)$ och det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$. Vi kommer längre fram visa att $\phi_T(t)$ är en delare till $\chi_T(t)$ (sats 8.3.13).

Sats 8.3.5 har som korollarium att operatorer på ändligdimensionella komplexa vektorrum har minst ett egenvärde; detta har vi förstås redan visat i avsnitt 8.2 (korollarium 8.2.8), men poängen är att nu kan vi visa detta resultat utan hjälp av det karakteristiska polynomet, och därmed utan hjälp av determinantkalkyl.

Korollarium 8.3.6 *En linjär operator på ett icke-trivialt ändligtdimensionellt komplext vektorrum har minst ett egenvärde.*

Bevis. Operatorns minimalpolynom $\phi_T(t)$ är ett icke-konstant polynom med minst ett komplext nollställe λ. Enligt föregående sats är λ ett egenvärde till T. □

För minimalpolynomen till inducerade operatorer, restriktioner och direkta summor av operatorer gäller följande sats, som bör jämföras med motsvarande resultat för det karakteristiska polynomet (sats 8.2.10).

Sats 8.3.7 (a) *Låt T vara en linjär operator på ett vektorrum V och antag att W är ett invariant delrum. Då är minimalpolynomet $\phi_{T|_W}(t)$ till restriktionen $T|_W : W \to W$ och minimalpolynomet $\phi_{T_{V/W}}$ till den inducerade operatorn $T_{V/W}$ båda delare till minimalpolynomet $\phi_T(t)$.*

(b) *Antag att operatorn T är fullständigt reducerad av de två delrummen W_1 och W_2, och sätt $T_j = T|_{W_j}$ så att $T = T_1 \oplus T_2$. Då är minimalpolynomet $\phi_T(t)$ lika med den minsta gemensamma multipeln till minimalpolynomen $\phi_{T_1}(t)$ och $\phi_{T_2}(t)$. Speciellt är alltså*

$$\phi_T(t) = \phi_{T_1}(t) \cdot \phi_{T_2}(t),$$

ifall de båda sistnämnda minimalpolynomen är relativt prima.

Bevis. (a) Varje polynom som annihilerar T annihilerar också den inducerade operatorn $T_{V/W}$, ty $p(T_{V/W})[v] = [p(T)v]$, så om $p(T) = 0$ är också $p(T_{V/W}) = 0$. Det följer därför av sats 8.3.4 att minimalpolynomet $\phi_{T_{V/W}}$ till $T_{V/W}$ är en delare till T:s minimalpolynom $\phi_T(t)$.

Uppenbarligen annihilerar $\phi_T(t)$ också restriktionen $T|_W$, så det följer analogt att $\phi_T(t)$ är en multipel av $\phi_{T|_W}(t)$.

(b) För varje polynom $p(t)$ är $p(T) = p(T_1) \oplus p(T_2) = 0$ om och endast om $p(T_1) = 0$ och $p(T_2) = 0$, och enligt sats 8.3.4 gäller detta i sin tur om och endast om polynomet $p(t)$ är en multipel av såväl $\phi_{T_1}(t)$ som $\phi_{T_2}(t)$, dvs. om och endast om $p(t)$ är en multipel av den minsta gemensamma multipeln till de båda minimalpolynomen. Av alla polynom som annihilerar operatorn T är därför minsta gemensamma multipeln till $\phi_{T_1}(t)$ och $\phi_{T_2}(t)$ det polynom som har lägst grad. □

I allmänhet kan naturligtvis inte minimalpolynomet $\phi_T(t)$ faktoriseras som en produkt av förstagradspolynom. Däremot kan vi alltid skriva minimalpolynomet som en produkt av polynom som inte kan faktoriseras ytterligare. Genom att kombinera sats 8.1.6 med en sådan faktorisering får vi omedelbart följande resultat som korollarium.

Sats 8.3.8 *Antag att T är en linjär operator på V med minimalpolynom $\phi_T(t)$, och låt*

$$\phi_T(t) = \psi_1(t)^{m_1}\psi_2(t)^{m_2}\cdots\psi_k(t)^{m_k}$$

vara en fullständig faktorisering av $\phi_T(t)$ i primpolynom, dvs. de k polynomen $\psi_j(t)$ är parvis relativt prima och kan inte faktoriseras ytterligare.

Sätt $W_j = \mathcal{N}(\psi_j(T)^{m_j})$. Då är

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

och operatorn T är fullständigt reducerad av $W_1, W_2, \ldots, W_k$.

Restriktionen $T_j = T|_{W_j}$ har polynomet $\psi_j(t)^{m_j}$ som minimalpolynom.

Bevis. Att operatorn T är fullständigt reducerad av $W_1, W_2, \ldots, W_k$ och att därför $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k$ följer direkt av sats 8.1.6. Vidare annihilerar per definition polynomet $\psi_j(t)^{m_j}$ operatorn T_j, så minimalpolynomet $\phi_{T_j}(t)$ är en delare till $\psi_j(t)^{m_j}$ och har därför formen $\phi_{T_j}(t) = \psi_j(t)^{n_j}$ med en exponent som uppfyller $1 \leq n_j \leq m_j$. Enligt sats 8.3.7 är emellertid $\phi_T(t) = \phi_{T_1}(t)\phi_{T_2}(t)\cdots\phi_{T_k}(t) = \psi_1(t)^{n_1}\psi_2(t)^{n_2}\cdots\psi_k(t)^{n_k}$, varför $n_j = m_j$ för alla j. □

Definitionen av minimalpolynom till en operator T innebär att operatorn $p(T)$ är skild från nolloperatorn för varje icke-trivialt polynom $p(t)$ som har lägre grad än $\phi_T(t)$. Detta innebär att det för varje polynom $p(t)$ av lägre grad finns en vektor v_p så att $p(T)v_p$ inte är nollvektorn. Nästa lemma visar att det alltid är möjligt att välja samma vektor v_p för alla polynom p av lägre grad än $\phi_T(t)$.

Lemma 8.3.9 *Antag att T är en operator på V med minimalpolynom $\phi_T(t)$. Då finns det en vektor $v \in V$ så att $p(T)v = 0$ om och endast om polynomet $p(t)$ är en multipel av minimalpolynomet $\phi_T(t)$.*

Bevis. (i) Antag först att $\phi_T(t) = \psi(t)^m$, där $\psi(t)$ är ett primpolynom. Eftersom polynomet $\psi(t)^{m-1}$ inte annihilerar T finns det en vektor $v \in V$ så att $\psi(T)^{m-1}v \neq 0$. Vi påstår att vektorn v duger.

Att $p(T)v = 0$ om $p(t)$ är en multipel av minimalpolynomet är uppenbart eftersom i så fall $p(T) = 0$. Svårigheten är att visa omvändningen, nämligen att $p(T)v = 0$ medför att $p(t)$ är en multipel av minimalpolynomet.

Antag därför motsatsen, dvs. att $p(T)v = 0$ men att $p(t)$ inte är en multipel av $\phi_T(t)$; vi skall visa att detta leder till en motsägelse. Genom att dividera $p(t)$ med $\phi_T(t)$ får vi $p(t) = q(t)\phi_T(t) + r(t)$ med en nollskild rest $r(t)$ av lägre grad än $\phi_T(t)$. Härav följer att $r(T)v = p(T)v - q(T)\phi_T(T)v = 0$.

Låt nu $p_0(t)$ vara ett nollskilt polynom av lägsta möjliga gradtal med egenskapen att $p_0(T)v = 0$; av vad vi har visat följer att detta polynom har strikt mindre gradtal än minimalpolynomet $\phi_T(t)$. Vi dividerar nu minimalpolynomet med $p_0(t)$; divisionsalgoritmen ger $\phi_T(t) = q_1(t)p_0(t) + r_1(t)$ med en rest $r_1(t)$ som har lägre gradtal än vad $p_0(t)$ har. Det följer att

$$r_1(T)v = \phi_T(T)v - q_1(T)p_0(T)v = 0,$$

vilket på grund av definitionen av $p_0(t)$ medför att $r_1(t)$ är nollpolynomet. Polynomet $p_0(t)$ är med andra ord en delare till $\phi_T(t)$, och eftersom gradtalet är lägre rör det sig om en äkta delare. Följaktligen är $p_0(t) = \psi(t)^k$ för något $k \le m-1$. Men då är förstås $\psi(T)^{m-1}v = \psi(T)^{m-1-k}p_0(T)v = 0$, vilket är en motsägelse. Därmed är påståendet bevisat.

(ii) I det allmänna fallet kan vi faktorisera $\phi_T(t)$ som i sats 8.3.8. Med satsens beteckningar är T_j då en operator på W_j med $\psi_j(t)^{m_j}$ som sitt minimalpolynom, och därför finns det enligt det redan bevisade specialfallet för varje j en vektor $v_j \in W_j$ med egenskapen att $p(T_j)v_j = 0$ om och endast om $p(t)$ är en multipel av $\psi_j(t)^{m_j}$.

Sätt $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Eftersom summan $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ är direkt, är $p(T)v = p(T_1)v_1 + p(T_2)v_2 + \cdots + p(T_k)v_k = 0$ om och endast om $p(T_j)v_j = 0$ för $j = 1, 2, \ldots, k$, vilket alltså gäller om och endast om $p(t)$ är en multipel av alla polynomen $\psi_j(t)^{m_j}$. Eftersom dessa polynom är relativt prima gäller detta om och endast om $p(t)$ är en multipel av deras produkt, dvs. av $\phi_T(t)$. □

Lemma 8.3.10 *Antag att T är en linjär operator med minimalpolynom $\phi_T(t)$ av grad m. Då finns det en vektor v så att vektorerna $v, Tv, \ldots, T^{m-1}v$ bildar en bas för ett m-dimensionellt T-invariant delrum W, och restriktionen $T|_W$ av T till delrummet W har $\phi_T(t)$ som karakteristiskt polynom.*

Bevis. Sätt $\phi_T(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$, där $a_m = 1$, låt v vara vektorn i lemma 8.3.9, samt sätt $v_j = T^{j-1}v$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Antag att vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_m$ är linjärt beroende. Då finns det skalärer $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$, som inte alla är noll så att

$$b_0 v + b_1 Tv + \cdots + b_{m-1}T^{m-1}v = 0.$$

Detta innebär att $p(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{m-1}t^{m-1}$ är ett icke-trivialt polynom med lägre grad än $\phi_T(t)$ som uppfyller $p(T)v = 0$, vilket strider mot lemma 8.3.9. Denna motsägelse visar att vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_m$ är linjärt oberoende och således spänner upp ett m-dimensionellt delrum W.

Eftersom $Tv_j = v_{j+1}$ för $1 \le j \le m-1$, medan

$$Tv_m = T^m v = \phi_T(T)v - \sum_{j=0}^{m-1} a_j T^j v = -\sum_{j=0}^{m-1} a_j T^j v = -\sum_{j=1}^{m} a_{j-1} v_j,$$

är delrummet W invariant.

Slutligen följer det av sats 8.2.9 att $\chi_{T|_W}(t) = \phi_T(t)$. □

Eftersom dimensionen hos ett delrum inte kan vara större än dimensionen hos det omgivande rummet, får vi följande resultat som korollarium till lemma 8.3.10.

Korollarium 8.3.11 *Låt T vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum V. Då är graden hos minimalpolynomet $\phi_T(t)$ högst lika med* $\dim V$.

Även nästa resultat, som ger ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att det karakteristiska polynomet skall vara lika med minimalpolynomet, följer så gott som omedelbart av lemma 8.3.10.

Sats 8.3.12 *Antag att T är en operator på ett n-dimensionellt rum V. Då har minimalpolynomet $\phi_T(t)$ grad n om och endast om det finns en vektor v med egenskapen att de n stycken vektorerna v, Tv, T^2v, …, $T^{n-1}v$ spänner upp V. I så fall är vidare $\chi_T(t) = \phi_T(t)$.*

En vektor v med egenskapen att vektorerna v, Tv, T^2v, …, $T^{n-1}v$ spänner upp rummet V kallas en *cyklisk vektor* till operatorn T.

Bevis. Antag först att att minimalpolynomet har grad n. Då har delrummet W i lemma 8.3.10 samma dimension som V, dvs. $W = V$, vilket innebär att vektorn v är cyklisk och att $\chi_T(t) = \phi_T(t)$.

Antag omvänt att det finns en cyklisk vektor v. Eftersom vektorerna v, Tv, T^2v, …, $T^{n-1}v$ i så fall automatiskt är linjärt oberoende, är $p(T)v \neq 0$ för alla icke-triviala polynom $p(t)$ med gradtal lägre än n. Minimalpolynomets gradtal måste därför vara lägst n, och på grund av korollarium 8.3.11 är gradtalet exakt n. □

Vi kan nu visa att minimalpolynomet alltid är en delare till det karakteristiska polynomet. Mer precist gäller följande sats.

Sats 8.3.13 *Låt T vara en operator på ett ändligdimensionellt rum V.*

(a) *Operatorns minimalpolynom $\phi_T(t)$ är en delare till dess karakteristiska polynom $\chi_T(t)$. Mera precist gäller att om*
$$\phi_T(t) = \psi_1(t)^{m_1}\psi_2(t)^{m_2}\cdots\psi_k(t)^{m_k}$$
är en faktorisering av minimalpolynomet i primpolynom, så är
$$\chi_T(t) = \psi_1(t)^{n_1}\psi_2(t)^{n_2}\cdots\psi_k(t)^{n_k},$$
där $m_j \leq n_j$ för alla j.

(b) *För dimensionen hos nollrummen $W_j = \mathcal{N}(\psi_j(T)^{m_j})$ gäller sambandet*
$$\dim W_j = n_j d_j,$$
där d_j är gradtalet hos primpolynomet $\psi_j(t)$.

Bevis. (a) Sätt $W_j = \mathcal{N}(\psi_j(T)^{m_j})$ och låt $T_j = T|_{W_j}$ beteckna restriktionen av T till det invarianta delrummet W_j. Enligt sats 8.3.8 gäller då att

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k$$

och att $\phi_{T_j}(t) = \psi_j(t)^{m_j}$. För att visa påståendet om det karakteristiska polynomet $\chi_T(t)$ räcker det därför på grund av sats 8.2.10 att visa de karakteristiska polynomen till operatorerna T_j har formen $\chi_{T_j}(t) = \psi_j(t)^{n_j}$ med $n_j \geq m_j$ för alla j.

Vi har därmed reducerat problemet till fallet att minimalpolynomet $\phi_T(t)$ är en potens av en enda primfaktor, säg att $\phi_T(t) = \psi(t)^m$.

Vi skall visa att det i detta fall finns ett tal $n \geq m$ så att $\chi_T(t) = \psi(t)^n$ genom induktion över dimensionen hos rummet V, och antar därför att påståendet är sant för operatorer på rum vars dimension är mindre än $\dim V$. För operatorer på endimensionella rum gäller trivialt $\chi_T(t) = \phi_T(t)$.

På grund av lemma 8.3.10 finns det ett invariant delrum W till V så att $\chi_{T|W}(t) = \phi_T(t)$.

Om $W = V$ är således $\chi_T(t) = \phi_T(t)$, och påståendet gäller då med $n = m$.

Om däremot W är ett äkta delrum av V, så har det icke-triviala kvotrummet V/W lägre dimension än V. Enligt sats 8.2.10 är

$$\chi_T(t) = \chi_{T|W}(t) \cdot \chi_{T_{V/W}}(t) = \phi_T(t) \cdot \chi_{T_{V/W}}(t) = \psi(t)^m \cdot \chi_{T_{V/W}}(t).$$

Enligt sats 8.3.7 är vidare minimalpolynomet till $T_{V/W}$ en delare till T:s minimalpolynom $\phi_T(t)$. Detta innebär att

$$\phi_{T_{V/W}}(t) = \psi(t)^p,$$

där $1 \leq p \leq m$. Induktionsantagandet medför därför att det finns ett $q \geq p$ så att

$$\chi_{T_{W/V}}(t) = \psi(t)^q.$$

Det följer att $\chi_T(t) = \psi(t)^{m+q}$, och därmed är induktionssteget klart.

(b) Påståendet om dimensionen hos det invarianta delrummet W_j följer av att $\psi_j(t)^{n_j}$ är karakteristiskt polynom till operatorn T_j; polynomets gradtal är å ena sidan lika med $n_j d_j$ och å andra sidan lika med rummets dimension $\dim W_j$. □

Sats 8.3.14 (Cayley–Hamiltons sats) *En linjär operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum annihileras av sitt karakteristiska polynom.*

Bevis. Påståendet följer omedelbart av satserna 8.3.13 och 8.3.4 . □

Definition 8.3.15 En linjär operator N på ett vektorrum V kallas *nilpotent* om det finns ett tal m så att $N^m = 0$. Om m är det minsta talet med denna egenskap, säger vi att N är nilpotent av *grad* m.

En operator är tydligen nilpotent av grad m om och endast om dess minimalpolynom är lika med t^m. I nästa avsnitt kommer vi att visa att nilpotenta operatorer på ändligdimensionella vektorrum har en mycket enkel struktur.

Exempel 8.3.3 Låt D vara deriveringsoperatorn på rummet $\mathcal{P}_d$. Då är D nilpotent av grad $d + 1$. □

Exempel 8.3.4 En operator med matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är nilpotent av grad 3. □

Sats 8.3.8 får en speciellt enkel form i de fall då minimalpolynomet (eller ekvivalent det karakteristiska polynomet) kan faktoriseras som en produkt av förstagradspolynom. Speciellt gäller detta för alla operatorer på ändligtdimensionella komplexa vektorrum.

Sats 8.3.16 *Låt T vara en linjär operator på V med minimalpolynom $\phi_T(t)$, och antag att minimalpolynomet kan faktoriseras som en produkt av förstagradspolynom:*

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k},$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ är de olika egenvärdena. Sätt $W_j = \mathcal{N}((T - \lambda_j I)^{m_j})$ och låt T_j vara restriktionen av operatorn T till det invarianta delrummet W_j. Då är

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k.$$

Varje operator T_j har vidare formen $T_j = \lambda_j I_j + N_j$, där I_j är identitetsoperatorn på W_j och operatorn N_j är nilpotent av grad m_j.

Bevis. Påståendet följer omedelbart av sats 8.3.8. Operatorn N_j är förstås lika med restriktionen av $T - \lambda_j I$ till rummet W_j. Det följer av sats 8.3.7 att operatorn T_j har $(t - \lambda_j)^{m_j}$ som sitt minimalpolynom. Operatorn N_j har därför t^{m_j} som minimalpolynom, så N_j är nilpotent av grad m_j. □

Övningar

8.18 Låt T vara operatorn på $\mathbf{R}^4$ som med avseende på standardbasen har matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm minimalpolynomet och det karakteristiska polynomet samt en familj av delrum som reducerar operatorn fullständigt.

8.19 Sätt $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_3$ och låt T vara operatorn på $\mathbf{K}^4$ som med avseende på standardbasen har matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm operatorns karakteristiska polynom och minimalpolynom, egenvärden och egenrum, samt en familj av delrum som reducerar operatorn fullständigt.

8.20 Visa att för operatorer på ändligdimensionella komplexa vektorrum är minimalpolynomet lika med det karakteristiska polynomet om och endast om att alla egenrum är endimensionella.

8.21 Ge exempel på en linjär operator på $\mathbf{R}^5$ med $(t^2+4t+5)(t-2)$ som minimalpolynom och $(t^2+4t+5)^2(t-2)$ som karakteristiskt polynom.

8.22 T är en linjär operator på ett vektorrum av dimension n. Visa att T har högst två egenvärden om $\mathcal{N}(T^{n-2}) \neq \mathcal{N}(T^{n-1})$.

8.23 Polynomet $(t-1)(t-3)^3$ är karakteristiskt polynom till en linjär operator T på ett fyrdimensionellt vektorrum V, och egenrummet $\mathcal{E}_2(T)$ till egenvärdet 3 är tvådimensionellt. Bestämmer dessa villkor minimalpolynomet?

8.24 Beräkna minimalpolynomen $\phi_{ST}(t)$ och $\phi_{TS}(t)$ samt de karakteristiska polynomen $\chi_{ST}(t)$ och $\chi_{TS}(t)$, och jämför resultaten då

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8.25 Låt $S\colon V \to W$ och $T\colon W \to V$ vara linjära avbildningar, och betrakta operatorerna ST på W och TS på V. Visa att deras minimalpolynom och karakteristiska polynom uppfyller följande samband

$$\phi_{ST}(t) = t^q \phi_{TS}(t), \quad \text{där } q = 0,\ 1 \text{ eller } -1$$
$$\chi_{ST}(t) = t^m \chi_{TS}(t), \quad \text{där } m = \dim W - \dim V$$

genom att genomföra följande steg:

a) $(ST)^k S = S(TS)^k$ för alla heltal $k \geq 0$.

b) För godtyckliga polynom $p(t)$ är

(i) $p(ST)S = Sp(TS)$;

(ii) $S\mathcal{N}(p(TS)) \subseteq \mathcal{N}(p(ST))$.

c) Om $p(t)$ annihilerar ST så annihilerar $tp(t)$ operatorn TS.

d) $t\phi_{ST}(t)$ är en multipel av minimalpolynomet $\phi_{TS}(t)$.

e) $\phi_{ST}(t) = t^q \phi_{TS}(t)$, där $q = 0$, 1 eller -1.

f) Om $p(t)$ är ett polynom med konstantterm $p(0) \neq 0$ så gäller:

(i) Restriktionen $S|_{\mathcal{N}(p(TS))}$ är injektiv;
[Ledning: $\mathcal{N}(S) \cap \mathcal{N}(p(TS)) \subseteq \mathcal{N}(TS) \cap \mathcal{N}(p(TS)) = \{0\}$, där den sista likheten följer på grund av sats 8.1.6 eftersom polynomen $p(t)$ och t saknar gemensam delare.]

(ii) $\dim \mathcal{N}(p(TS)) \leq \dim \mathcal{N}(p(ST))$;

(iii) $\dim \mathcal{N}(p(TS)) = \dim \mathcal{N}(p(ST))$;

g) $\chi_{ST}(t) = t^m \chi_{TS}(t)$.
[Ledning: Antag $\phi_{TS}(t) = t^{m_0}\psi_1(t)^{m_1} \cdots \psi_k(t)^{m_k}$, där $m_0 \geq 0$ och polynomen t, $\psi_1(t)$, …, $\psi_k(t)$ är relativt prima. Enligt resultatet i e) är då $\phi_{ST}(t) = t^{k_0}\psi_1(t)^{m_1} \cdots \psi_k(t)^{m_k}$, så sats 8.3.13 ger att $\chi_{TS}(t) = t^{n_0}\psi_1(t)^{n_1} \cdots \psi_k(t)^{n_k}$ och $\chi_{ST}(t) = t^{p_0}\psi_1(t)^{p_1} \cdots \psi_k(t)^{p_k}$. Visa med hjälp av (iii) i f) och påståendet om exponenterna n_j i sats 8.3.13 att $p_j = n_j$ för $j = 1, 2, \ldots, k$.]

8.26 Låt T vara en operator på ett n-dimensionellt vektorrum med karakteristiskt polynom $\chi_T(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$. *Spåret* $\operatorname{tr} T$ av operatorn definieras som $-a_{n-1}$. Visa följande påståenden om spåret:

a) Om T har matrisen A så är $\operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

b) Om $S\colon V \to W$ och $T\colon W \to V$ är två linjära avbildningar så är

$$\operatorname{tr} ST = \operatorname{tr} TS.$$

8.4 Jordans normalform

Vi har i avsnitt 8.2 sett exempel på linjära operatorer på ändligtdimensionella komplexa vektorrum som inte kan diagonaliseras. Vi har också noterat att varje sådan operator kan trianguleras, dvs. det är alltid möjligt att hitta en bas i vilken matrisen är övertriangulär (se övning 8.16). I det här avsnittet skall vi skärpa detta resultat och visa att man kan välja basen så att den övertriangulära matrisen får en extremt enkel form − alla element är noll utom elementen i diagonalen och elementen omedelbart ovanför diagonalen, som är 0 eller 1.

Definition 8.4.1 Låt T vara en linjär operator på ett vektorrum V. En följd $v_1, v_2, \ldots, v_k$ av vektorer i V kallas en T-*kedja* om $v_1 \neq 0$,

$$0 = Tv_1 \quad \text{och} \quad v_{j-1} = Tv_j \quad \text{för } 2 \leq j \leq k.$$

Vektorn v_1 kallas kedjans *förstavektor*, och kedjan kallas *maximal* om den inte kan förlängas, dvs. om $v_k \notin \mathcal{V}(T)$.

Om $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är en T-kedja och $j \leq k$ så är tydligen $T^{j-1}v_j = v_1$, medan $T^{j-1}v_i = 0$ om $i < j$.

Vi skall som i ett led i beviset för Jordans normalform visa att om T är en nilpotent operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, så har vektorrummet en bas bestående av T-invarianta kedjor. För det ändamålet behöver vi en serie av hjälpsatser.

Lemma 8.4.2 *Antag att $K_1, K_2, \ldots, K_m$ är T-kedjor med olika förstavektorer och att kedjornas förstavektorer bildar en linjärt oberoende mängd. Då är unionen $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ av alla vektorerna i kedjorna en linjärt oberoende mängd.*

Bevis. Låt $v_1^{(i)}$, $v_2^{(i)}$, ..., $v_{k_i}^{(i)}$ vara vektorerna i T-kedjan K_i. Enligt förutsättningarna är mängden $\{v_1^{(i)} \mid i = 1, 2, \ldots m\}$ av kedjornas förstavektorer linjärt oberoende. Vi skall visa att antagandet att unionen $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ är linjärt beroende leder till en motsägelse.

Om unionen är linjärt beroende, så finns det någon kedjevektor $v_j^{(i)}$ som är linjärt beroende av de övriga vektorerna i kedjorna. Vi kan vidare välja denna vektor så att den har största möjliga ordningsnummer j, och det är ingen inskränkning att anta att den ligger i kedjan K_1. (Numrera annars om kedjorna!) Detta innebär att det finns en vektor $v_\alpha^{(1)}$ i K_1 som är en linjärkombination av vektorerna i mängden

$$\{v_j^{(1)} \mid j < \alpha\} \cup \bigcup_{i=2}^{m} \{v_j^{(i)} \in K_i \mid j \leq \alpha\}.$$

Om en vektor v är en linjärkombination av vektorerna $w_1, w_2, \ldots, w_p$, så är $T^{\alpha-1}v$ en linjärkombination av vektorerna $T^{\alpha-1}w_1, T^{\alpha-1}w_2, \ldots, T^{\alpha-1}w_p$. För alla kedjenummer i är vidare $T^{\alpha-1}v_j^{(i)} = 0$ om $j < \alpha$, medan i förekommande fall $T^{\alpha-1}v_\alpha^{(i)} = v_1^{(i)}$. Följaktligen är förstavektorn $v_1^{(1)}$ $(= T^{\alpha-1}v_\alpha^{(1)})$ i kedjan K_1 en linjärkombination av förstavektorer $v_1^{(i)}$ från övriga kedjor. Detta är en motsägelse, eftersom kedjornas förstavektorer antogs vara linjärt oberoende. □

Lemma 8.4.3 *Låt T vara en linjär operator och antag att $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är en T-kedja. Då bildar kedjans vektorer än bas för ett k-dimensionellt T-invariant delrum W. Restriktionen $T|_W$ är nilpotent av grad k, och restriktionens matris med avseende på kedjebasen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ har formen*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

I denna matris är samtliga element 0 utom elementen på platserna omedelbart ovanför diagonalen, som är 1. (I fallet $k = 1$ skall matrisen (1) tolkas som nollmatrisen $[0]$.)

Bevis. Sätt $W = \operatorname{spn}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Att delrummet W är T-invariant är uppenbart, och att vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är en bas är ett specialfall av föregående lemma (fallet med en kedja). Restriktionen $T|_W \colon W \to W$ är nilpotent, eftersom $T^k v_j = 0$ för $j = 1, 2, \ldots, k$, och nilpotensgraden är lika med k, eftersom $T^{k-1} v_k = v_1 \neq 0$. Att slutligen matrisen har den angivna formen följer av definitionen av T-kedja. □

Lemma 8.4.4 *Låt T vara en godtycklig operator på ett ändligdimensionellt vektorrum V och låt k vara ett godtyckligt icke-negativt heltal. Då är*

(a) $T^k(\mathcal{N}(T^{k+1})) = \mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)$;

(b) $\dim(\mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)) = \dim \mathcal{N}(T^{k+1}) - \dim \mathcal{N}(T^k)$.

Bevis. (a) Om $w \in T^k(\mathcal{N}(T^{k+1}))$, så finns det en vektor $v \in \mathcal{N}(T^{k+1})$ så att $w = T^k v$, och då är $Tw = T^{k+1} v = 0$, vilket visar att w också tillhör snittet $\mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)$. Omvänt, om $w \in \mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)$, så finns det en vektor $v \in V$ så att $w = T^k v$, och vidare är $0 = Tw = T^{k+1} v$. Vektorn v ligger alltså i $\mathcal{N}(T^{k+1})$, och detta innebär att w ligger i bildmängden $T^k(\mathcal{N}(T^{k+1}))$.

(b) Betrakta restriktionen av operatorn T^k till delrummet $\mathcal{N}(T^{k+1})$ av V, dvs. uppfatta T^k som en operator $\mathcal{N}(T^{k+1}) \to V$. Enlig (a) är restriktionens värderum lika med $\mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)$. Dess nollrum är lika med $\mathcal{N}(T^k)$ (beroende på att $\mathcal{N}(T^k)$ är en delmängd till $\mathcal{N}(T^{k+1})$). Det följer därför av dimensionssatsen, tillämpad på operatorn T^k:s restriktion, att

$$\dim \mathcal{N}(T^k) + \dim\left(V(T^k) \cap \mathcal{N}(T)\right) = \dim \mathcal{N}(T^{k+1}),$$

vilket ger likheten i (b). □

Lemma 8.4.5 *Låt T vara en operator på ett godtyckligt vektorrum V. Varje nollskild vektor i mängden $(\mathcal{V}(T^{k-1}) \setminus \mathcal{V}(T^k)) \cap \mathcal{N}(T)$ är förstavektor i en maximal kedja av längd k.*

Bevis. Om v är ett sådan vektor, så är $Tv = 0$ och $v = T^{k-1}w$ för någon vektor $w \in V$. Följden $T^{k-1}w, T^{k-2}w, \dots, Tw, w$ är en T-kedja av längd k, och kedjan kan inte förlängas eftersom $v \notin \mathcal{V}(T^k)$. □

Lemma 8.4.6 *Antag att T är en nilpotent operator med nilpotensgrad m på ett ändligdimensionellt vektorrum V och sätt $d_k = \dim \mathcal{N}(T^k)$. Då är*

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{m-1} < d_m = \dim V.$$

Bevis. Den triviala inklusionen $\mathcal{N}(T^k) \subseteq \mathcal{N}(T^{k+1})$ medför att $d_k \leq d_{k+1}$. Vidare är $d_{m-1} < d_m = \dim V$ beroende på definitionen av nilpotensgrad, som innebär att att $\mathcal{N}(T^m) = V$ och $\mathcal{N}(T^{m-1}) \neq V$.

Att olikheterna $d_{k-1} < d_k$ är strikta också för $k \leq m - 1$ följer av allmänna resultat för en operators ascent (se övning 3.18), men det är också en konsekvens av (b) i lemma 8.4.4. På grund av den triviala inklusionen $\mathcal{V}(T^k) \subseteq \mathcal{V}(T^{k-1})$ är $\dim(\mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)) \leq \dim(\mathcal{V}(T^{k-1}) \cap \mathcal{N}(T))$, så det följer av lemmat att $0 \leq d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$ för alla k. Den icke-negativa följden $(d_k - d_{k-1})_{k=1}^{\infty}$ är med andra ord avtagande, och eftersom $d_m - d_{m-1} > 0$ är därför $d_k - d_{k-1} > 0$ för $k = 1, 2, \dots, m$. □

Vi är nu redo för följande struktursats för nilpotenta operatorer.

Sats 8.4.7 *Låt T vara en nilpotent operator med nilpotensgrad m på ett ändligtdimensionellt vektorrum V.*

(a) *Då är V en direkt summa*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_q$$

av T-invarianta delrum W_j, som vart och ett spänns upp av maximala T-kedjor.

(b) *Antalet invarianta k-dimensionella delrum W_j i denna direkta summa är lika med*

$$2d_k - d_{k+1} - d_{k-1},$$

där $d_k = \dim \mathcal{N}(T^k)$. Minst ett delrum är m-dimensionellt, och inget delrum har högre dimension.

Bevis. Eftersom $\mathcal{V}(T^k) \subseteq \mathcal{V}(T^{k-1})$ och $\mathcal{V}(T^m) = \{0\}$, har vi följande kedja av av inklusioner

$$\begin{aligned}\{0\} = \mathcal{V}(T^m) \cap \mathcal{N}(T) &\subseteq \mathcal{V}(T^{m-1}) \cap \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{V}(T^{m-2}) \cap \mathcal{N}(T) \subseteq \dots \\ &\subseteq \mathcal{V}(T^2) \cap \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{V}(T) \cap \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T).\end{aligned}$$

Skillnaden i dimension mellan två på varandra följande delrum $\mathcal{V}(T^k)\cap\mathcal{N}(T)$ och $\mathcal{V}(T^{k-1}) \cap \mathcal{N}(T)$ i denna kedja är enligt lemma 8.4.4 lika med

$$d_k - d_{k-1} - (d_{k+1} - d_k) = 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}.$$

Välj nu en bas B för nollrummet $\mathcal{N}(T)$ genom att först välja en bas B_m för delrummet $\mathcal{V}(T^{m-1}) \cap \mathcal{N}(T)$, och sedan utvidga med vektorer till en bas $B_m \cup B_{m-1}$ för delrummet $\mathcal{V}(T^{m-2})\cap\mathcal{N}(T)$, och sedan utvidga med ytterligare vektorer till en bas $B_m \cup B_{m-1} \cup B_{m-2}$ för delrummet $\mathcal{V}(T^{m-3}) \cap \mathcal{N}(T)$, osv. Detta ger oss en bas B på formen

$$B = B_m \cup B_{m-1} \cup \dots \cup B_1,$$

där B_k är en delmängd till $(\mathcal{V}(T^{k-1}) \setminus \mathcal{V}(T^k)) \cap \mathcal{N}(T)$ för varje k.

Antalet basvektorer i B_k är lika med skillnaden i dimension hos delrummen $\mathcal{V}(T^k) \cap \mathcal{N}(T)$ och $\mathcal{V}(T^{k-1}) \cap \mathcal{N}(T)$ och är därför $2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}$.

Enligt lemma 8.4.5 är varje basvektor i B förstavektor i en maximal T-kedja, och kedjans längd är lika med k om basvektorn ligger i delmängden B_k. Antalet kedjor av längd k är därför lika med antalet basvektorer i B_k, och varje sådan kedja spänner enligt lemma 8.4.3 upp ett T-invariant k-dimensionellt delrum. Låt $W_1, W_2, \dots, W_q$ beteckna samtliga på detta sätt erhållna invarianta delrum.

På grund av lemma 8.4.2 bildar vidare samtliga kedjors vektorer en linjärt oberoende mängd, så det följer att de invarianta delrummen $W_1, W_2, \dots, W_q$ är linjärt oberoende. Deras summa är därför direkt, och det återstår endast att visa att summan är lika med hela V. Detta följer av en enkel dimensionsräkning, som vi nu skall genomföra.

Sätt $S = \dim(W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_q)$. Antalet k-dimensionella delrum W_j i den direkta summan är lika med antalet element i B_k, som är $2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}$. Genom att utnyttja att $d_0 = 0$ och $d_m = d_{m+1} = \dim V$ får vi därför

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{m} k \cdot (\text{antalet } k\text{-dimensionella delrum } W_j) \\ &= \sum_{k=1}^{m} k(2d_k - d_{k+1} - d_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} 2kd_k - \sum_{k=1}^{m} kd_{k+1} - \sum_{k=1}^{m} kd_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m} 2kd_k - \sum_{k=1}^{m+1} (k-1)d_k - \sum_{k=1}^{m-1} (k+1)d_k\end{aligned}$$

$$= 2md_m - (m-1)d_m - md_{m+1} + \sum_{k=1}^{m-1} \big(2k - (k-1) - (k+1)\big) d_k$$

$$= d_m + \sum_{k=1}^{m-1} 0 \;=\; d_m = \dim V.$$

Den direkta summan $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_q$ har således samma dimension som V och är därför lika med V.

Antalet m-invarianta delrum är $2d_m - d_{m+1} - d_{m-1} = d_m - d_{m-1}$, så det finns minst ett sådant delrum eftersom $d_m > d_{m-1}$. För $k > m$ är däremot $2d_k - d_{k+1} - d_{k-1} = 0$, så det finns inga invariant delrum av högre dimension. □

Korollarium 8.4.8 *Om T är en nilpotent operator på ett ändligtdimensionellt rum, så finns det en bas så att T:s matris har formen*

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_q \end{bmatrix}$$

där $q \geq 1$ och varje delmatris B_j är en kvadratisk matris av samma typ som matrisen (1) i lemma 8.4.3.

Bevis. Välj en bas bestående av maximala T-kedjor för delrummen W_j i föregående sats. □

Sats 8.4.9 (Jordans normalform) *Låt T vara en operator på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum V med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Då finns det en bas så att T:s matris har formen*

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

där varje delmatris A_j är en kvadratisk matris på formen

$$\begin{bmatrix} B_1(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{q_j}(\lambda_j) \end{bmatrix} \tag{3}$$

med $q_j \geq 1$ *och varje delmatris* $B_i(\lambda_j)$ *är en matris av typen*

$$B_i(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(För delmatriser $B_i(\lambda_j)$ *av ordning 1 är* $B_i(\lambda_j) = \lambda_j$*.)*

En bas som uppfyller villkoret i satsen kallas en *Jordanbas* för T.

Bevis. Låt $\phi_T(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$ vara faktoriseringen av operatorns minimalpolynom. Enligt sats 8.3.16 är $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k$, där T_j är restriktionen av T till delrummet $W_j = \mathcal{N}((T-\lambda_j I)^{m_j})$. Vidare är $T_j = \lambda_j I_j + N_j$, där I_j är identitetsoperatorn på W_j och operatorn N_j är nilpotent av grad m_j. Välj en bas för rummet W_j så att matrisen för N_j blir som i korollarium 8.4.8. Matrisen för operatorn T_j, som är lika med λ_j gånger enhetsmatrisen plus matrisen för N_j, får då formen (3) med delmatriser $B_i(\lambda_j)$ av typen (4). Genom att slutligen slå ihop baserna i delrummen $W_1, W_2, \dots, W_k$ till en bas för V får vi en bas i vilken T:s matris ser ut som i (2). □

Exempel 8.4.1 Låt T vara operatorn på $\mathbf{C}^5$ som med avseende på standardbasen har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skall bestämma en Jordanbas för T.

Operatorns karakteristiska polynom är $\chi_T(t) = (t-3)(t-2)^4$. Minimalpolynomet har därför formen $\phi_T(t) = (t-3)(t-2)^m$, där exponenten m uppfyller olikheten $1 \leq m \leq 4$. Vi kan bestämma m genom att successivt beräkna $(A-3E)(A-2E)^j$ för $j \geq 1$; det första värde för vilket denna produkt är 0 är $j = 2$, vilket betyder att $m = 2$.

Sätt $W_1 = \mathcal{N}(T-3I)$ och $W_2 = \mathcal{N}((T-2I)^2)$; då är $\mathbf{C}^5 = W_1 \oplus W_2$, och operatorn T är fullständigt reducerad av paret W_1, W_2.

W_1 är lika med egenrummet till det enkla egenvärdet $\lambda = 3$ och det är därför ett endimensionellt delrum. Genom att lösa det homogena ekvationssystemet med koefficientmatrisen $A - 3E$ finner man att W_1 spänns upp av vektorn $u_1 = (-1, 1, 1, 0, 1)$.

Delrummet W_2 består av lösningarna till systemet $(A-2E)^2x = 0$, och en enkel räkning ger

$$W_2 = \{x \in \mathbf{C}^5 \mid x_1 = x_2 - x_5\}.$$

Restriktionen av operatorn $T-2I$ till delrummet W_2 är nilpotent av grad 2. Vi beräknar operatorns nollrum $\mathcal{N}(T-2I)$ genom att lösa ekvationssystemet $(A-2E)x = 0$ och finner att nollrummet är

$$\mathcal{N}(T-2I) = \operatorname{spn}\{(1,1,0,1,0),(0,1,-1,0,1)\}.$$

Eftersom $\dim \mathcal{N}((T-2I)^2) = 4$ och $\dim \mathcal{N}(T-2I) = 2$, följer det av (b) i sats 8.4.7 att det finns $2 \cdot 4 - 4 - 2 = 2$ Jordanblock av längd 2.

Låt oss beräkna snittet $\mathcal{V}(T-2I) \cap \mathcal{N}(T-2I)$; det består av de vektorer $y = s(1,1,0,1,0) + t(0,1,-1,0,1)$ i nollrummet som gör ekvationssystemet $(A-2E)x = y$ lösbart. Man finner lätt att systemet är lösbart för alla s och t, vilket betyder att $\mathcal{V}(T-2I) \cap \mathcal{N}(T-2I) = \mathcal{N}(T-2I)$.

Välj nu två linjärt oberoende vektorer i $\mathcal{V}(T-2I) \cap \mathcal{N}(T-2I)$, t. ex. $v_1 = (1,1,0,1,0)$ och $w_1 = (0,1,-1,0,1)$, samt bestäm därefter v_2 och w_2 så att $(T-2I)v_2 = v_1$ och $(T-2I)w_2 = w_1$; vi kan välja $v_2 = (0,0,1,0,0)$ och $w_2 = (1,1,-1,0,0)$. Då är v_1, v_2 och w_1, w_2 två maximala $(T-2I)$-kedjor och de utgör tillsammans en bas för rummet W_2.

Basen u_1, v_1, v_2, w_1, w_2 är en Jordanbas för T, och med avseende på den basen har operatorn matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sambandet mellan matriser vid basbyte ger att $B = C^{-1}AC$ för

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Övningar

8.27 Skriv operatorn i övning 8.18 på Jordans normalform.

Kapitel 9

Spektralsatsen

9.1 Adjunktens nollrum, bildrum och egenvärden

Låt T vara en linjär operator på ett reellt eller komplext inre produktrum V. Vi erinrar om att operatorn T^* är adjungerad till T om $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ för alla vektorer v, w i V.

Sambandet mellan en operators och dess adjunkts noll- och bildrum beskrivs av följande sats.

Sats 9.1.1 *Låt T vara en linjär operator på ett inre produktrum V med adjunkt T^*. Då är*

(i) $$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{V}(T^*)^\perp$$

(ii) $$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(TT^*) = \mathcal{V}(T)^\perp.$$

Om rummet V är ändligdimensionellt så är också

(iii) $$\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(TT^*) = \mathcal{N}(T^*)^\perp$$

(iv) $$\mathcal{V}(T^*) = \mathcal{V}(T^*T) = \mathcal{N}(T)^\perp.$$

Bevis. (i) Inklusionen $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^*T)$ är trivial, och den omvända inklusionen följer av implikationerna

$$T^*Tv = 0 \implies \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle = \langle v, 0\rangle = 0 \implies Tv = 0.$$

Likheten $\mathcal{V}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$ följer av ekvivalenserna

$$\begin{aligned} v \in \mathcal{V}(T^*)^\perp &\iff \langle v, T^*w\rangle = 0 \text{ för alla } w \in V \\ &\iff \langle Tv, w\rangle = 0 \text{ för alla } w \in V \\ &\iff Tv = 0 \iff v \in \mathcal{N}(T). \end{aligned}$$

(ii) Om man i (i) ersätter T med T^* får man (ii), eftersom $T^{**} = T$.

(iii) För varje delrum W av ett ändligdimensionellt rum är $W^{\perp\perp} = W$. Det följer därför av (ii) att

$$\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(T)^{\perp\perp} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp}.$$

Ersätter vi sedan T med TT^* i ovanstående likhet och noterar att $(TT^*)^* = TT^*$ får vi

$$\mathcal{V}(TT^*) = \mathcal{N}(TT^*)^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp} = \mathcal{V}(T).$$

(iv) följer ur (iii) om man ersätter T med T^*. □

De invarianta delrummen till en operator är fullständigt bestämda av de invarianta delrummen till operatorns adjunkt via ortogonal komplementbildning.

Sats 9.1.2 *Låt T vara en linjär operator på ett inre produktrum V, och antag att W är ett T^*-invariant delrum av V. Då är det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ ett T-invariant delrum.*

Bevis. Låt v vara en godtycklig vektor i $W^{\perp}$. Vi skall visa att Tv ligger i $W^{\perp}$. Låt därför w vara en godtycklig vektor i W. Eftersom T^*w ligger i W är $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle = 0$. Detta betyder att Tv är ortogonal mot W. □

För polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ med komplexa eller reella koefficienter sätter vi $\overline{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k t^k$. Om T är en linjär operator med adjunkt T^*, så är

$$p(T)^* = (\sum_{k=0}^{n} a_k T^k)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k (T^*)^k = \overline{p}(T^*). \tag{1}$$

Detta ger oss följande samband mellan en operators minimalpolynom och adjunktens minimalpolynom.

Sats 9.1.3 *Låt T vara en linjär operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum med minimalpolynom $\phi_T(t)$. Då är polynomet $\overline{\phi_T}(t)$ minimalpolynom till adjunkten T^*.*

Bevis. Det följer av (1) att polynomet $p(t)$ annihilerar T om och endast om polynomet $\overline{p}(t)$ annihilerar adjunkten T^*. Speciellt annihilerar alltså $\overline{\phi_T}(t)$ adjunkten T^*, vilket medför att minimalpolynomet $\phi_{T^*}(t)$ är en delare till $\overline{\phi_T}(t)$. Av motsvarande skäl är också $\phi_T(t)$ en delare till $\overline{\phi_{T^*}}(t)$. Följaktligen är $\phi_{T^*}(t) = \overline{\phi_T}(t)$. □

Korollarium 9.1.4 *Låt T vara en linjär operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum. Skalären λ är egenvärde till T om och endast om det konjugerade värdet $\overline{\lambda}$ är egenvärde till adjunkten T^*.*

Bevis. Eftersom $\phi_{T^*}(\overline{\lambda}) = \overline{\phi_T}(\overline{\lambda}) = \overline{\phi_T(\lambda)}$, är λ ett nollställe till T:s minimalpolynom $\phi_T(t)$ om och endast $\overline{\lambda}$ är ett nollställe till T^*:s minimalpolynom $\phi_{T^*}(t)$. Detta bevisar korollariet eftersom en operators egenvärden är just minimalpolynomets nollställen. □

9.2 Normala operatorers nollrum, egenvärden och egenrum

Definition 9.2.1 En operator T på ett (reellt eller komplext) inre produktrum med adjunkt T^* kallas *normal* om $T^*T = TT^*$.

På motsvarande sätt kallas en kvadratisk matris A *normal* om $A^*A = AA^*$.

Om T är en linjär operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum med matris A med avseende på en given ON-bas, så har adjunkten T^* matrisen A^* med avseende på samma ON-bas. Det följer därför omedelbart att operatorn T är normal om och endast om dess matris A är normal.

Klassen av normala operatorer på ett rum innehåller förstås alla självadjungerade operatorer (som definieras av att $T^* = T$) och alla unitära operatorer (som definieras av att $T^*T = TT^* = I$).

Sats 9.2.2 *En operator T på ett inre produktrum V är normal om och endast om $\|T^*v\| = \|Tv\|$ för alla $v \in V$.*

Bevis. Om operatorn är normal, så är

$$\begin{aligned}\|T^*v\|^2 &= \langle T^*v, T^*v\rangle = \langle TT^*v, v\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle \\ &= \langle Tv, T^{**}v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \|Tv\|^2\end{aligned}$$

för alla $v \in V$.

Antag omvänt att $\|T^*v\|^2 = \|Tv\|^2$ för alla $v \in V$. Genom att i det komplexa fallet utnyttja identiteten

$$4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 - \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2,$$

och i det reella fallet identiteten

$$4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2,$$

och därvid byta ut v och w mot T^*v resp. T^*w, erhåller vi som resultat att

$$\langle T^*v, T^*w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle$$

för alla vektorer $v, w \in V$. Härav följer i sin tur att

$$\langle TT^*v, w\rangle = \langle T^*v, T^*w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle Tv, T^{**}w\rangle = \langle T^*Tv, w\rangle$$

för alla $v, w \in V$, vilket innebär att $TT^*v = T^*Tv$ för alla $v \in V$. Operatorn T är följaktligen normal. □

Klassen av normala operatorer är inte sluten under addition. Däremot är den sluten under polynombildning; vi har nämligen följande resultat.

Påstående 9.2.3 *Om $p(t)$ är ett godtyckligt polynom och operatorn T är normal, så är också operatorn $p(T)$ normal.*

Bevis. För godtyckliga kommuterande operatorer S och T och godtyckliga polynom $p(t)$ och $q(t)$ är, som man lätt verifierar, $p(T)q(S) = q(S)p(T)$. Om operatorn T är normal, så är därför speciellt $p(T)p(T)^* = p(T)\overline{p}(T^*) = \overline{p}(T^*)p(T) = p(T)^*p(T)$, vilket visar att operatorn $p(T)$ är normal. □

För normala operatorer kan vi förbättra resultatet i sats 9.1.1 på följande vis.

Sats 9.2.4 *Antag att operatorn T är normal. Då är*

(i) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{V}(T)^\perp$;

(ii) $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T)$ *för alla heltal* $k \geq 2$.

Anmärkning. Egenskap (ii) innebär att en normal operators ascent är 0 eller 1; den är 0 om operatorn är inverterbar och 1 om den inte är inverterbar.

Bevis. (i) Egenskaperna (i) och (ii) i sats 9.1.1 ger

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(TT^*) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{V}(T)^\perp.$$

(ii) Vi börjar med att visa att $\mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T)$. Inklusionen $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^2)$ är trivial, så vi behöver på grund av (i) bara visa inklusionen $\mathcal{N}(T^2) \subseteq \mathcal{N}(T^*T)$.

Antag därför att $T^2v = 0$; då är

$$\|T^*Tv\|^2 = \langle T^*Tv, T^*Tv\rangle = \langle TT^*Tv, Tv\rangle = \langle T^*TTv, Tv\rangle = \langle 0, Tv\rangle = 0,$$

och det följer att $T^*Tv = 0$.

Att $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T)$ för alla $k \geq 2$ följer sedan med induktion. Startsteget $k = 2$ är redan klart. Antag därför att påståendet är sant för något $k \geq 2$; för att visa att det gäller för $k+1$ räcker det förstås att visa att $\mathcal{N}(T^{k+1}) \subseteq \mathcal{N}(T)$, ty den omvända inklusionen är trivial. Om $v \in \mathcal{N}(T^{k+1})$, så är $T^k(Tv) = 0$, vilket innebär att $Tv \in \mathcal{N}(T^k)$, och av induktionsantagandet följer därför att $Tv \in \mathcal{N}(T)$, vilket betyder att $T^2v = 0$. Vektorn v ligger således i $\mathcal{N}(T^2)$, och av startsteget följer därför att $v \in \mathcal{N}(T)$. Detta bevisar den påstådda inklusionen, och därmed är induktionen fullbordad. □

Vi vet redan att λ är ett egenvärde till en operator T om och endast om $\overline{\lambda}$ är ett egenvärde till adjunkten T^* (korollarium 9.1.4). För normala operatorer sammanfaller dessutom egenrummen. Detta följer som korollarium till föregående sats.

Sats 9.2.5 *Låt T vara en normal operator. Då är λ ett egenvärde till T om och endast om $\overline{\lambda}$ är ett egenvärde till T^*, och motsvarande egenrum är lika, dvs. $\mathcal{E}_\lambda(T) = \mathcal{E}_{\overline{\lambda}}(T^*)$.*

Bevis. Det följer som specialfall av påstående 9.2.3 att operatorn $T - \lambda I$ är normal för varje skalär λ, och enligt sats 9.2.4 är därför

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}((T - \lambda I)^*) = \mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda} I),$$

vilket bevisar att λ är ett egenvärde till T om och endast om $\overline{\lambda}$ är ett egenvärde till T^* samt att egenrummen sammanfaller. □

Föregående sats sätter begränsningar för hur egenvärdena till självadjungerade operatorer och till unitära operatorer kan se ut. Vi har följande resultat.

Sats 9.2.6 (a) *En självadjungerad operators egenvärden är reella.*
(b) *En unitär operators egenvärden är komplexa tal med absolutbelopp 1.*

Bevis. Låt λ vara ett egenvärde till den normala operatorn T och låt v vara en motsvarande egenvektor så att $Tv = \lambda v$. Då är $T^*v = \overline{\lambda} v$ enligt föregående sats.

I det självadjungerade fallet $T^* = T$ fås därför $\lambda v = \overline{\lambda} v$, och det följer att $\lambda = \overline{\lambda}$, dvs. egenvärdet λ är reellt.

I det unitära fallet fås istället $v = T^*Tv = T^*(\lambda v) = \overline{\lambda}\lambda v = |\lambda|^2 v$ med slutsatsen $|\lambda| = 1$. □

En godtycklig operators olika egenrum är linjärt oberoende. För normala operatorer kan vi säga mer; egenrummen är parvis ortogonala. Detta följer som specialfall av följande sats.

Sats 9.2.7 *Antag $p(t)$ och $q(t)$ är två relativt prima polynom, och låt T vara en normal operator. Då är nollrummen $\mathcal{N}(p(T))$ och $\mathcal{N}(q(T))$ ortogonala mot varandra.*

Bevis. Enligt sats 9.2.4 är $\mathcal{N}(p(T)) = \mathcal{V}(p(T))^\perp$, eftersom operatorn $p(T)$ är normal. För att bevisa satsen räcker det således att visa inklusionen $\mathcal{N}(q(T)) \subseteq \mathcal{V}(p(T))$. Låt därför $f(t)$ och $g(t)$ vara två polynom med egenskapen att

$$f(t)p(t) + g(t)q(t) = 1;$$

existensen av sådana polynom följer av Euklides algoritm eftersom $p(t)$ och $q(t)$ inte har några icke-triviala gemensamma delare. Nu är

$$f(T)p(T) + g(T)q(T) = I,$$

och för $v \in \mathcal{N}(q(T))$ är därför

$$v = f(T)p(T)v + g(T)q(T)v = f(T)p(T)v = p(T)f(T)v,$$

vilket visar att $v \in \mathcal{V}(p(T))$. Därmed är beviset klart. □

Korollarium 9.2.8 *De olika egenrummen till en normal operator T är parvis ortogonala, dvs. om λ och μ är skilda egenvärden så är $\mathcal{E}_\lambda(T) \perp \mathcal{E}_\mu(T)$.*

Bevis. Eftersom polynomen $t - \mu$ och $t - \lambda$ är relativt prima, är korollariet ett specialfall av föregående sats. □

Sats 9.2.9 *Låt T vara en normal operator på ett inre produktrum V och antag att W är ett ändligdimensionellt T-invariant delrum av V. Då gäller:*

(i) *Delrummet W är T^*-invariant.*

(ii) *Ortogonala komplementet $W^\perp$ är T- och T^*-invariant.*

(iii) *Restriktionerna $T|_W : W \to W$ och $T|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ är normala operatorer.*

Bevis. (i) Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara en ON-bas i W. Eftersom Te_i ligger i W för varje basvektor e_i, är $Te_i = \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k\rangle e_k$. Följaktligen är

$$\|Te_i\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle Te_i, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_i, T^*e_k\rangle|^2$$

och

$$\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2 = \sum_{i,k=1}^n |\langle e_i, T^*e_k\rangle|^2. \tag{1}$$

För att visa att delrummet W också är T^*-invariant räcker det att visa att T^*e_k ligger i W för varje basvektor e_k. Låt därför P beteckna den ortogonala projektionen av V på W, dvs.

$$Pv = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i$$

och sätt $v_k = T^*e_k - PT^*e_k \in W^\perp$. Vi har att visa att $T^*e_k = PT^*e_k$, dvs. att $v_k = 0$ för alla k.

Eftersom

$$T^*e_k = PT^*e_k + v_k = \sum_{i=1}^n \langle T^*e_k, e_i\rangle e_i + v_k,$$

följer det av Pythagoras sats att

$$\|T^*e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle T^*e_k, e_i\rangle|^2 + \|v_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, T^*e_k\rangle|^2 + \|v_k\|^2,$$

och genom att summera alla $\|T^*e_k\|^2$ får vi likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \|T^*e_k\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} |\langle e_i, T^*e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2. \tag{2}$$

Enligt sats 9.2.2 är $\|T^*e_k\| = \|Te_k\|$ för alla k, så därför är de båda summorna i vänsterleden av (1) och (2) lika. Följaktligen är också högerleden lika med slutsatsen att

$$\sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2 = 0.$$

Följaktligen är $v_k = 0$ för alla k, vilket bevisar att påstående (i) gäller.

(ii) Eftersom $T^{**} = T$ är delrummet W T^{**}-invariant enligt antagande och T^*-invariant enligt (i). Att ortogonala komplementet $W^\perp$ är såväl T^*- som T-invariant följder därför av sats 9.1.2.

(iii) För alla vektorer $v, w \in W$ ligger Tv och T^*w i W. Likheten $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ betyder därför att restriktionen $(T^*)|_W$ är adjunkt till restriktionen $T|_W$, dvs. $(T|_W)^* = T^*|_W$. Följaktligen är

$$T|_W(T|_W)^* = T|_W T^*|_W = (TT^*)|_W = (T^*T)|_W = T^*|_W T|_W = (T|_W)^* T|_W,$$

vilket visar att restriktionen $T|_W$ är normal.

Motsvarande gäller förstås också för $T|_{W^\perp}$. □

Övningar

9.1 Visa att matrisen $\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}$ är normal.

9.2 Antag att S och T är två kommuterande normala operatorer. Visa att operatorn $S + T^*$ är normal.

9.3 Antag att T är en normal operator. Visa att restriktionen $T|_{\mathcal{V}(T)}$ är injektiv.

9.3 Spektralsatsen för normala operatorer

Normala operatorer på komplexa inre produktrum

Vi börjar med att beskriva normala operatorers minimalpolynom.

Sats 9.3.1 *Minimalpolynomet till en normal operator T på ett icke-trivialt ändligdimensionellt komplext inre produktrum har formen*

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k),$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ är operatorns egenvärden.

Bevis. Vi vet generellt från sats 8.3.13 att minimalpolynomet har en faktorisering som en produkt

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

av potenser av förstagradspolynomen $t - \lambda_j$ och att detta ger en uppdelning av V som en direkt summa

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

med $W_j = \mathcal{N}((T - \lambda_j I)^{m_j})$. I föreliggande fall är emellertid operatorerna $T - \lambda_j I$ normala, så det följer av sats 9.2.4 att $W_j = \mathcal{N}(T - \lambda_j I)$ för alla j. Följaktligen är

$$\begin{aligned}&(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I)v \\ &\qquad = (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_{j-1} I)(T - \lambda_{j+1} I) \cdots (T - \lambda_k I)(T - \lambda_j I)v = 0\end{aligned}$$

för alla vektorer $v \in W_j$ och därmed också för alla $v \in W$, och detta betyder att samtliga exponenter m_j i minimalpolynomet är lika med 1. □

Vi har nu kommit till det här kapitlets huvudresultat − en karakterisering av normala operatorer på ändligdimensionella komplexa inre produktrum.

Sats 9.3.2 (Spektralsatsen för normala operatorer) *Låt V vara ett icke-trivialt ändligdimensionellt **komplext** inre produktrum. Följande fyra villkor är ekvivalenta för en linjär operator T på V med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.*

(α) *T är normal.*

(β) *V är en ortogonal direkt summa av operatorns egenrum:*

$$V = \mathcal{E}_{\lambda_1}(T) \oplus \mathcal{E}_{\lambda_2}(T) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}(T).$$

(γ) *Operatorns egenrum är parvis ortogonala och varje egenvärdes geometriska multiplicitet är lika med dess algebraiska multiplicitet.*

(δ) *V har en ON-bas bestående av egenvektorer till T.*

Bevis. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: Implikationen är en direkt konsekvens av föregående sats, sats 8.3.8 och korollarium 9.2.8.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$: För en godtycklig linjär operator T på V är den geometriska multipliciteten hos ett egenvärde λ, dvs. $\dim \mathcal{E}_\lambda(T)$, mindre än eller lika med egenvärdets algebraiska multiplicitet. Om för något egenvärde den geometriska multipliciteten är strikt mindre än den algebraiska kan därför inte summan av egenrummens dimensioner vara lika med det karakteristiska polynomets gradtal, dvs. $\dim V$. Av uppdelningen i (β) av V som en direkt summa följer därför att varje egenvärdes geometriska multiplicitet är lika med dess algebraiska.

$(\gamma) \Rightarrow (\delta)$: Varje ON-bas som är sammansatt av ON-baser för vart och ett av egenrummen till T har den angivna egenskapen.

$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$: T:s matris med avseende på en ON-bas av egenvektorer är en diagonalmatris, och diagonalmatriser är uppenbarligen normala, så det följer att T är normal. □

Alternativt bevis. Ett bevis för implikationen $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ i spektralsatsen som inte bygger på minimalpolynomets egenskaper ser ut så här:

Enligt korollarium 9.2.8 är egenrummen parvis ortogonala, så vi kan bilda deras ortogonala direkta summa $W = \mathcal{E}_{\lambda_1}(T) \oplus \mathcal{E}_{\lambda_2}(T) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}(T)$. Det återstår att visa att $W = V$, och detta är ekvivalent med att $W^\perp = \{0\}$.

På grund av sats 9.2.5 är $W = \mathcal{E}_{\overline{\lambda}_1}(T^*) \oplus \mathcal{E}_{\overline{\lambda}_2}(T^*) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\overline{\lambda}_k}(T^*)$, så delrummet W är T^*-invariant. Det följer därför av sats 9.1.2 att ortogonala komplementet $W^\perp$ är T-invariant. Restriktionen av T till $W^\perp$ är en linjär operator på $W^\perp$, och om detta delrum är icke-trivialt, dvs. skilt från $\{0\}$, så har restriktionen minst ett egenvärde och en motsvarande egenvektor v, som per definition ligger i $W^\perp$. Men v är förstås också en egenvektor till T och tillhör därför egenrummet $\mathcal{E}_{\lambda_i}(T)$ för något i, vilket medför att v också ligger i W. Detta strider mot att $W \cap W^\perp = \{0\}$. Därför är $W^\perp = \{0\}$. □

Spektralsatsen medför att varje normal matris är diagonaliserbar och att kolonnerna i den diagonaliserande matrisen C kan väljas så att de bildar en ON-bas. Detta innebär att matrisen C är unitär och att följaktligen $C^{-1} = C^*$. För normala matriser får sats 8.2.17 därför följande form.

Korollarium 9.3.3 *Om A är en normal matris så finns det en unitär matris C och en diagonalmatris D så att $C^*AC = D$.*

Exempel 9.3.1 Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

är normal, vilket läsaren lätt kan verifiera. Matrisen kan således diagonaliseras med hjälp av en unitär matris.

Det karakteristiska polynomet $t^3 - 9t^2 + 36t - 54$ har rötterna 3, $3 + 3\mathrm{i}$ och $3 - 3\mathrm{i}$, som således är matrisens egenvärden. Motsvarande normaliserade egenvektorer är

$$\frac{1}{3}(2, -2, 1), \quad \frac{1}{6}(-1 - 3\mathrm{i}, 1 - 3\mathrm{i}, 4) \quad \text{och} \quad \frac{1}{6}(-1 + 3\mathrm{i}, 1 + 3\mathrm{i}, 4),$$

så om vi sätter

$$C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 - 3\mathrm{i} & -1 + 3\mathrm{i} \\ -4 & 1 - 3\mathrm{i} & 1 + 3\mathrm{i} \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 3\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

är matrisen C unitär och $C^*AC = D$. □

Normala operatorer på reella inre produktrum

En normal operator på ett reellt inre produktrum behöver inte ha några egenvärden, men eftersom ett irreducibelt reellt polynom som inte är ett förstagradspolynom är ett andragradspolynom utan reella rötter, får minimalpolynomet ändå en mycket enkel form.

Sats 9.3.4 *Minimalpolynomet till en normal operator T på ett icke-trivialt ändligdimensionellt reellt inre produktrum har formen*

$$\phi_T(t) = \prod_{j=1}^{k}(t - \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{m}\big((t - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\big),$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är operatorns egenvärden, om det finns några, och (α_1, β_1), (α_2, β_2), …, (α_m, β_m) är skilda par av reella tal med $\beta_j > 0$ för alla j.

Den första produkten skall förstås tolkas som 1 om $k = 0$, dvs. om operatorn saknar egenvärden, och den andra produkten skall tolkas som 1 i fallet $m = 0$.

Bevis. Enligt sats 8.3.8 har minimalpolynomet faktoriseringen

$$\phi_T(t) = \psi_1(t)^{m_1}\psi_2(t)^{m_2} \cdots \psi_n(t)^{m_n}$$

som en produkt av potenser av irreducibla polynom, och rummet V är en direkt summa
$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$
med $W_j = \mathcal{N}(\psi_j(T)^{m_j})$. När T är normal, är också operatorerna $\psi_j(T)$ normala, så det följer av sats 9.2.4 att $W_j = \mathcal{N}(\psi_j(T))$ för alla j, vilket betyder att $\psi_1(T)\psi_2(T)\cdots\psi_n(T) = 0$ och att därför samtliga exponenter m_j i minimalpolynomet är lika med 1.

Eftersom ett irreducibelt reellt polynom (med ledande koefficient 1) har formen $t - \lambda$ eller $(t-\alpha)^2 + \beta^2$, där $\beta > 0$, följer nu påståendet i satsen. □

Vi ska nu bestämma strukturen hos normala operatorer på reella inre produktrum. För den skull behöver vi följande hjälpsats.

Sats 9.3.5 *Låt T vara en normal operator på ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum V, och antag att T:s minimalpolynom har formen*
$$\phi_T(t) = (t-\alpha)^2 + \beta^2$$
med reella koefficienter α, β och $\beta > 0$. Sätt
$$D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$
Då gäller:

(i) $\dim V$ *är ett jämnt tal.*

(ii) *Om* $\dim V = 2$, *så är T:s matris med avseende på en godtycklig ON-bas i V antingen D eller D^t.*

(iii) *Om* $\dim V = 2n$, *så finnns det en ON-bas för V så att T:s matris har formen*
$$\begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}$$
med n stycken block D utefter diagonalen.

Bevis. Antagandet om minimalpolynomet innebär förstås att T saknar egenvärden. V:s dimension kan därför inte vara ett.

Antag därför först att $\dim V = 2$ och att T:s matris med avseende på någon ON-bas är
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Eftersom T är normal är $A^tA = AA^t$, och detta medför att $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ och $ac+bd = ab+dc$, vilket kan förenklas till $c^2 = b^2$ och $d(b-c) = a(b-c)$. Detta ger oss två möjligheter; antingen är $c = b$ och a, d godtyckliga, eller också är $c = -b \neq 0$ och $a = d$.

Det förstnämnda fallet ger oss en normal operator med matris

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

karakteristiskt polynom $\chi_T(t) = t^2 - (a+d)t + ad - b^2$ och reella egenvärden

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}),$$

vilket strider mot att T saknar egenvärden.

Följaktligen gäller det andra fallet, vilket betyder att

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

och $\phi_T(t) = \chi_T(t) = (t-a)^2 + b^2$. Identifiering av koefficienterna i $\phi_T(t)$ visar att $a = \alpha$ och att $b = \pm\beta$, så T:s matris har den i (ii) angivna formen.

Antag nu att $\dim V > 2$. Vi skall då induktivt visa att dimensionen måste vara jämn och att det finns en ON-bas så att (iii) gäller. Antag för den skull att detta är sant för alla normala operatorer på rum av dimension $\leq \dim V - 2$.

Eftersom T:s minimalpolynom har grad 2 finns det en vektor v så att v och Tv spänner upp ett tvådimensionellt T-invariant delrum W, och ortogonala komplementet $W^\perp$ är också T-invariant enligt sats 9.2.9. Restriktionerna $T|_W$ och $T|_{W^\perp}$ är vidare normala operatorer med $(t-\alpha)^2 + \beta^2$ som minimalpolynom (eftersom ϕ_T inte har några icke-triviala äkta delare). Delrummet W innehåller enligt (ii) en ON-bas med avseende på vilken restriktionen $T|_W$ har matrisen D (om matrisen är D^t i basen e_1, e_2, så är matrisen D i basen $e_1, -e_2$!), och delrummet $W^\perp$ har enligt induktionsantagandet jämn dimension och en ON-bas i vilken $T|_{W^\perp}$:s matris är blockdiagonal med D som block. Följaktligen har också V jämn dimension, och T:s matris i den ON-bas som fås genom att kombinera de båda baserna för delrummen är förstås blockdiagonal med D som block. Därmed är induktionen fullbordad. □

Sats 9.3.6 *Låt T vara en normal operator på ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum V. Antag att faktoriseringen av operatorns minimalpolynom ser ut som i sats 9.3.4, dvs.*

$$\phi_T(t) = \prod_{j=1}^{k}(t - \lambda_j) \cdot \prod_{j=1}^{m}\big((t-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\big),$$

samt att operatorns karakteristiska polynom är

$$\chi_T(t) = \prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j)^{p_j} \cdot \prod_{j=1}^{m}\bigl((t-\alpha_j)^2+\beta_j^2\bigr)^{q_j}.$$

Då har rummet V en ON-bas i vilken operatorns matris är blockdiagonal och där varje block är ett egenvärde λ_j eller en 2×2-matris

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

Egenvärdet λ_j förekommer som block p_j gånger, och matrisen D_j förekommer som block q_j gånger.

Bevis. V är en ortogonal direkt summa av nollrummen $W_j = \mathcal{N}(T-\lambda_j I)$ och $V_j = \mathcal{N}((T-\alpha_j I)^2+\beta_j^2 I)$, där $\dim W_j = p_j$ och $\dim V_j = 2q_j$ enligt sats 8.3.13. En ON-bas för V bestående av godtyckliga ON-baser i vart och ett av delrummen W_j och ON-baser som i sats 9.3.5 (iii) för vart och ett av delrummen V_j gör att T:s matris får den angivna formen. □

Karakterisering av isometrier

Vi kan använda sats 9.3.6 för att karakterisera isometrier på euklidiska rum (dvs. ändligtdimensionella reella inre produktrum), eftersom isometrier är normala operatorer.

Om operatorn T är en isometri, så är operatorns matris med avseende på den av sats 9.3.6 givna ON-basen ortogonal, vilket betyder att $\lambda_j = \pm 1$ och $\alpha_j^2+\beta_j^2 = 1$. Delmatriserna D_j kan därför skrivas på formen

$$D_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix},$$

där θ_j är en vinkel i intervallet $]0,\pi[$.

Speciellt har således en isometri i planet med avseende på någon lämplig ON-bas någon av matriserna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Detta är i tur och ordning matrisen för rotation vinkeln 0, spegling i första koordinataxeln, rotation vinkeln π och rotation vinkeln θ. Varje isometri i planet är med andra ord en rotation eller en spegling i en linje.

En isometri i tre dimensioner har med avseende på en lämplig ON-bas någon av matriserna

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$

De tre förstnämnda är matriser för rotation vinkeln 0, π resp. θ kring en axel. De tre sistnämnda fås genom att multiplicera de tre förstnämnda matriserna från höger med matrisen

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

som är matrisen för en spegling i ett plan, och svarar därför mot spegling i ett plan följt av en rotation kring normalen till planet.

Sammanfattningsvis har vi därför visat följande resultat.

Sats 9.3.7 (a) *En isometri i planet är antingen en rotation eller en spegling.*

(b) *En isometri i det tredimensionella rummet är antingen en rotation kring en axel eller en spegling i ett plan följd av en rotation kring normalen till planet.*

Exempel 9.3.2 Låt T vara en linjär avbildning som med avseende på en given ON-bas i rummet har matrisen

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Eftersom matrisen är ortogonal, är T en isometri, och T:s karakteristiska polynom är

$$\chi_T(t)=t^3-\tfrac{2}{3}t^2-\tfrac{2}{3}t+1=(t+1)(\big((t-\tfrac{5}{6})^2+\tfrac{11}{36}\big).$$

Isometrin T har således endast ett egenvärde, -1. En motsvarande normaliserad egenvektor är vektorn e_1 med koordinaterna

$$\frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3).$$

Restriktionen av T till egenvektorns ortogonala komplement W måste vara en rotation (eftersom T bara har ett egenvärde). Välj en ON-bas för W, t. ex. vektorerna e_2 och e_3 med koordinaterna

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{\sqrt{22}}(3,3,2).$$

Restriktionen av T till W får matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

där $\theta = -\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} \approx -33.6°$.

Med avseende på ON-basen e_1, e_2, e_3 har således T matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Observera att basen e_1, e_2, e_3 är positivt orienterad relativt den ursprungliga basen eftersom

$$\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Vektorn e_1 är normal till planet med ekvationen $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ i de ursprungliga koordinaterna. Isometrin T betyder spegling i detta plan följt av en rotation vinkeln 33.6° i negativ led (relativt den orientering som definieras av den ursprungliga basen) med vektorn e_1 som rotationsaxel. □

Övningar

9.4 Diagonalisera den normala matrisen $\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

9.5 Visa att en normal operator på ett ändligdimensionellt rum är självadjungerad om alla egenvärden är reella, och unitär om alla egenvärden har belopp 1.

9.6 Antag att T är en normal operator på ett ändligdimensionellt komplext inre produktrum och att $T^7 = T^6$. Visa att T är självadjungerad och att $T^2 = T$.

9.7 V är ett fyrdimensionellt vektorrum, och S och T är operatorer på V som med avseende på någon bas har matriserna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Är det möjligt att införa en inre produkt på V så att operatorn S blir normal?
b) Samma fråga för operatorn T.

9.4 Spektralsatsen för symmetriska operatorer

För symmetriska operatorer kan vi förbättra sats 9.3.6 − symmetriska operatorer på reella inre produktrum är diagonaliserbara. Detta beror på följande lemma.

Lemma 9.4.1 *Antag att T är en självadjungerad operator på ett reellt eller komplext inre produktrum, och låt $p(t) = (t-\alpha)^2 + \beta^2$ vara ett polynom med reella koefficienter α, β och $\beta \neq 0$. Då är operatorn $p(T)$ injektiv.*

Bevis. För alla nollskilda vektorer v är

$$\begin{aligned}
\langle p(T)v, v\rangle &= \langle T^2v - 2\alpha Tv + \alpha^2 v + \beta^2 v, v\rangle \\
&= \langle T^2 v, v\rangle - 2\alpha\langle Tv, v\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle \\
&= \langle Tv, Tv\rangle - \alpha\langle Tv, v\rangle - \alpha\langle v, Tv\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle \\
&= \langle Tv - \alpha v, Tv - \alpha v\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle = \|Tv - \alpha v\|^2 + \beta^2\|v\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Detta medför förstås speciellt att $p(T)v \neq 0$ för $v \neq 0$, så operatorn $p(T)$ är injektiv. □

Sats 9.4.2 *Minimalpolynomet $\phi_T(t)$ till en symmetrisk operator T på ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum har en faktorisering*

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_k)$$

som en produkt av förstagradspolynom.

Bevis. Eftersom en symmetrisk operator är normal, följer det av sats 9.3.4 att minimalpolynomet har en faktorisering av typen

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k) g_1(t) \cdots g_m(t)$$

med $g_j(t) = (t - \alpha_j)^2 + \beta_j^2$ och $\beta_j \neq 0$ för alla eventuellt förekommande polynom $g_j(t)$. Enligt föregående lemma är operatorerna $g_j(T)$ inverterbara, och vi kan därför multiplicera operatorlikheten

$$\phi_T(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I) g_1(T) \cdots g_m(T) = 0$$

från höger med $g_m(T)^{-1} \cdots g_1(T)^{-1}$ med slutsatsen att

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_k I) = 0.$$

Detta visar att minimalpolynomet måste ha formen

$$\phi_T(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k).$$ □

Följande karakterisering av symmetriska operatorer är nu i ljuset av föregående sats bara ett specialfall av sats 9.3.6.

Sats 9.4.3 (Spektralsatsen för symmetriska operatorer) *Varje symmetrisk operator T på ett ändligdimensionellt icke-trivialt reellt inre produktrum rum V har egenvärden, och V är en ortogonal direkt summa av T:s egenrum. Vektorrummet V har med andra ord en ON-bas bestående av egenvektorer till T.*

Spektralsatsen har följande korollarium för symmetriska matriser.

Korollarium 9.4.4 *Varje symmetrisk reell matris A kan diagonaliseras med hjälp av ortogonala matriser, dvs. det finns en ortogonal matris C (vars kolonner är egenvektorer till A) och en diagonalmatris D (vars diagonalelement är egenvärden till A) så att $C^t A C = D$.*

EXEMPEL 9.4.1 Låt $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara operatorn med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

med avseende på standardbasen. Operatorn är symmetrisk och har därför en ON-bas av egenvektorer. Egenvärdena fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ -1 & t-3 & 2 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0,$$

som efter förenkling blir

$$(t-4)^2(t+2)=0.$$

Operatorns egenvärden är med andra ord det dubbla egenvärdet $\lambda_1 = 4$ och det enkla egenvärdet $\lambda_2 = -2$.

Egenrummet $\mathcal{E}_4(T)$ till egenvärdet 4 är lika med lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

dvs. $\mathcal{E}_4(T) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$. Egenrummet spänns upp av vektorerna $v_1 = (1,1,0)$ och $v_2 = (2,0,1)$. För att få en ON-bas använder vi Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess:

$$\begin{aligned} &f_1 = v_1, \qquad e_1 = f_1/\|f_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\ &f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 = (2,0,1) - (1,1,0) = (1,-1,1), \\ &e_2 = f_2/\|f_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1). \end{aligned}$$

Vektorerna e_1, e_2 bildar en ON-bas för $\mathcal{E}_4(T)$.

Egenrummet $\mathcal{E}_{-2}(T)$ fås på motsvarande sätt ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ {-x_1} - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

som har lösningen $x = t(-1,1,2)$. Vektorn $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ är normerad och spänner upp egenrummet.

$\mathbf{R}^3$ är en ortogonal direkt summa av de två egenrummen, och e_1, e_2, e_3 är en ON-bas för $\mathbf{R}^3$. Med avseende på denna ON-bas har T matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Med

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

blir $C^tAC = D$. □

Övningar

9.8 Bestäm en ON-bas av egenvektorer till följande symmetriska operatorer på $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

9.9 En operator T på ett reellt inre produktrum med egenskapen att $T^* = -T$ kallas *antisymmetrisk*.

a) Visa att om T är antisymmetrisk så är operatorn $\mathrm{i}T_{\mathbf{C}}$ självadjungerad.
b) Visa att de nollskilda nollställena till en antisymmetrisk operators karakteristiska polynom är rent imaginära.
c) Visa att det inte finns några inverterbara antisymmetriska operatorer på rum av udda dimension.

9.5 Polär uppdelning

Varje komplext tal kan skrivas på polär form som $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, dvs. som en produkt av ett icke-negativt tal r och ett komplext tal $\mathrm{e}^{i\theta}$ med belopp 1, och uppdelningen är entydig om $z \neq 0$. På liknande sätt kan en operator T på ett ändligdimensionellt inre produktrum skrivas som en produkt $T = UR$ av en positiv operator R och en unitär operator U.

Definition 9.5.1 En operator T på ett inre produktrum V (reellt eller komplext) kallas *positiv* om den är självadjungerad och

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0$$

för alla vektorer v. Om olikheten är strikt för alla vektorer $v \neq 0$ kallar vi operatorn *strikt positiv*.

Påstående 9.5.2 *Följande villkor är ekvivalenta för självadjungerade operatorer T på ändligdimensionella inre produktrum V.*

(α) *Operatorn är är positiv (resp. strikt positiv).*
(β) *Samtliga egenvärden är icke-negativa (resp. positiva).*
(γ) *Operatorns matris med avseende på en godtycklig ON-bas är positivt semidefinit (resp. positivt definit).*

Bevis. $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$: Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara en ON-bas av egenvektorer till T och låt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vara motsvarande egenvärden; dessa är reella eftersom T är självadjungerad. Om $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ betecknar motsvarande koordinatfunktioner, så är

$$\langle Tv, v\rangle = \lambda_1|\xi_1(v)|^2 + \lambda_2|\xi_2(v)|^2 + \cdots + \lambda_n|\xi_n(v)|^2.$$

Härav följer omedelbart att $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ (med strikt olikhet) för alla $v \neq 0$ om och endast om $\lambda_i \geq 0$ (med strikt olikhet) för $i = 1, 2, \dots, n$.

$(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$: Låt A vara operatorns matris med avseende på en godtycklig ortogonal koordinatavbildning ξ. Då är $\langle Tv, v\rangle = \overline{\xi(v)}^t A\xi(v)$. Följaktligen är operatorn positiv (resp. strikt positiv) om och endast om matrisen är positivt semidefinit (resp. positivt definit). □

Lemma 9.5.3 *För godtyckliga linjära operatorer T med adjunkt är operatorn T^*T positiv. Operatorn T^*T är vidare strikt positiv om (och endast om) T är injektiv.*

Bevis. Operatorn T^*T är självadjungerad eftersom $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$, och den är positiv eftersom

$$\langle T^*Tv, v\rangle = \langle Tv, T^{**}v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \|Tv\|^2 \geq 0.$$

för alla v. Olikheten ovan gäller med likhet om och endast om $v \in \mathcal{N}(T)$. Följaktligen är operatorn T^*T strikt positiv om och endast om $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, dvs. om och endast om T är injektiv. □

Sats 9.5.4 *Låt T vara en positiv operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum V. Då finns det en unik positiv operator S med egenskapen att $S^2 = T$. Operatorn S har samma nollrum och samma värderum som T.*

Den unika operatorn S kallas för *kvadratroten* ur T och betecknas $\sqrt{T}$.

Bevis. Låt $e_1, e_2, \dots, e_n$ vara en ON-bas av egenvektorer till T och låt λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n vara motsvarande egenvärden. Egenvärdena är icke-negativa, så vi kan definiera en linjär operator S på V genom att sätta $Se_j = \sqrt{\lambda_j}e_j$ för varje egenvektor e_j. Detta ger oss en självadjungerad, positiv operator S med egenskapen att $S^2 = T$.

Värderummen till S och T sammanfaller eftersom de spänns upp av de egenvektorer e_j som hör till nollskilda egenvärden λ_j. Nollrummen är också lika eftersom de spänns upp av egenvektorerna hörande till egenvärdet noll.

Därmed har vi visat existensen av en operator S med de önskvärda egenskaperna. För att bevisa entydigheten antar vi att S är en godtycklig positiv operator och att $S^2 = T$. Låt μ vara ett egenvärde till S. Av $Sv = \mu v$ följer då att $Tv = \mu^2 v$, dvs. för egenrummen till de båda operatorerna gäller inklusionen $\mathcal{E}_\mu(S) \subseteq \mathcal{E}_{\mu^2}(T)$. Men V är en direkt summa av de olika egenrummen till operatorn S; om $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ betecknar operatorns egenvärden, så är därför

$$V = \mathcal{E}_{\mu_1}(S) \oplus \mathcal{E}_{\mu_2}(S) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\mu_k}(S) \subseteq \mathcal{E}_{\mu_1^2}(T) \oplus \mathcal{E}_{\mu_2^2}(T) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\mu_k^2}(T).$$

Det följer att $\mathcal{E}_{\mu_j}(S) = \mathcal{E}_{\mu_j^2}(T)$ för alla egenvärden μ_j till S och att det inte finns några andra egenvärden till T än kvadraterna på egenvärdena till S. Om λ är ett godtyckligt egenvärde till T, så är därför $\mathcal{E}_{\sqrt{\lambda}}(S) = \mathcal{E}_\lambda(T)$, vilket betyder att $Sv = \sqrt{\lambda}v$ för alla $v \in \mathcal{E}_\lambda(T)$. Operatorn S är således entydigt bestämd av operatorn T. $\square$

Sats 9.5.5 (Polär uppdelning) *Låt T vara en godtycklig linjär operator på ett ändligdimensionellt komplext eller reellt inre produktrum V. Då finns det en unitär operator U och en unik positiv operator R så att*

$$T = UR.$$

Operatorn U entydigt bestämd om (och endast om) T är inverterbar.

Bevis. Antag först att vi har en sådan uppdelning. Då är $T^* = R^*U^* = RU^*$, varför

$$T^*T = RU^*UR = RIR = R^2.$$

Operatorn R är således kvadratroten ur operatorn T^*T, som är positiv enligt lemma 9.5.3, och det följer därför av föregående sats att R är entydigt bestämd. Om T är inverterbar, så är vidare operatorn $R = \sqrt{T^*T}$ inverterbar. Det följer därför av uppdelningen $T = UR$ att även U är entydigt bestämd som TR^{-1}.

För att visa existensen av uppdelningen $T = UR$ *definierar* vi först R genom att sätta $R = \sqrt{T^*T}$, vilket ger oss en positiv operator.

Därefter noterar vi att på grund av satserna 9.1.1 och 9.5.4 är

$$\mathcal{N}(\sqrt{T^*T}) = \mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T) \quad \text{och} \quad \mathcal{V}(\sqrt{T^*T}) = \mathcal{V}(T^*T) = \mathcal{N}(T)^\perp.$$

Vi kan därför definiera en linjär surjektiv avbildning $U_1 \colon \mathcal{N}(T)^\perp \to \mathcal{V}(T)$ genom att sätta

$$U_1(\sqrt{T^*T}\, v) = Tv. \tag{1}$$

Avbildningen U_1 är väldefinierad, ty

$$\begin{aligned}\sqrt{T^*T}\,v_1 = \sqrt{T^*T}\,v_2 &\Longrightarrow v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(\sqrt{T^*T})\\ &\Longrightarrow v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(T)\\ &\Longrightarrow Tv_1 = Tv_2.\end{aligned}$$

För $w = \sqrt{T^*T}\,v \in \mathcal{V}(\sqrt{T^*T})$ $(= \mathcal{N}(T)^\perp)$ är vidare

$$\begin{aligned}\|U_1 w\|^2 = \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle &= \langle v, T^*Tv\rangle = \langle v, \sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T}\,v\rangle\\ &= \langle \sqrt{T^*T}\,v, \sqrt{T^*T}\,v\rangle = \langle w, w\rangle = \|w\|^2,\end{aligned}$$

vilket innebär att U_1 är en surjektiv isometri.

Om T är inverterbar, så är $\mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{V}(T) = V$. Avbildningen U_1 är därför i detta fall en isometri på V, dvs. en unitär operator, och det följer av (1) att $U_1 R = T$. Detta visar existensen av en polär uppdelning för inverterbara operatorer T.

Antag därför att T saknar invers. Då är $\mathcal{N}(T)^\perp \neq V$, så vi måste utvidga U_1 till en isometrisk operator på hela V. Enligt dimensionssatsen är $\dim \mathcal{N}(T) = \dim V - \dim \mathcal{V}(T) = \dim \mathcal{V}(T)^\perp$. Vi kan därför konstruera en isometri $U_2 \colon \mathcal{N}(T) \to \mathcal{V}(T)^\perp$ genom att välja godtyckliga ON-baser $e_1, e_2, \dots, e_m$ och $f_1, f_2, \dots, f_m$ i $\mathcal{N}(T)$ resp. $\mathcal{V}(T)^\perp$ och sätta $U_2 e_j = f_j$ för $j = 1, 2, \dots, m$.

Den sökta utvidgningen U till V $(= \mathcal{N}(T)^\perp \oplus \mathcal{N}(T) = \mathcal{V}(T) \oplus \mathcal{V}(T)^\perp)$ erhålls genom att för $v = v_1 + v_2$ med $v_1 \in \mathcal{N}(T)^\perp$ och $v_2 \in \mathcal{N}(T)$ definiera

$$Uv = U_1 v_1 + U_2 v_2.$$

Att den utvidgade operatorn U är isometrisk, dvs. unitär, följer av Pythagoras sats, ty $\|Uv\|^2 = \|U_1 v_1\|^2 + \|U_2 v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v\|^2$.

Slutligen följer det av (1) att $URv = U\sqrt{T^*T}\,v = U_1\sqrt{T^*T}\,v = Tv$ för alla $v \in V$. Därmed är existensen av en polär uppdelning visad också för icke-inverterbara operatorer T, och eftersom operatorn U_2 inte är entydigt bestämd är den unitära delen U inte unik i detta fall. $\square$

Eftersom kvadratiska matriser på ett uppenbart sätt kan uppfattas som operatorer får vi följande korollarium till sats 9.5.5.

Korollarium 9.5.6 *Varje kvadratisk matris A med reella eller komplexa koefficienter har en faktorisering på formen $A = UR$, där matrisen U är unitär och matrisen R är hermitesk och positivt semidefinit. Matrisen R är entydigt bestämd, medan matrisen U är entydigt bestämd endast om A är inverterbar.*

Exempel 9.5.1 Vi skall bestämma den polära uppdelningen UR av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi börjar för den skull med att beräkna

$$A^*A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

Den symmetriska matrisen A^*A har egenvärdena 32 och 2, och ett par av motsvarande egenvektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Med

$$D = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

där matrisen C är en ortogonalmatris, har vi således faktoriseringen

$$A^*A = CDC^t.$$

Den positivt definita matrisen i den polära uppdelningen är således

$$R = \sqrt{A^*A} = C\sqrt{D}\,C^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrisen R har inversen

$$R^{-1} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$U = AR^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

och den sökta polära faktoriseringen av matrisen A är

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

□

Definition 9.5.7 Låt T vara en godtycklig linjär operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum V. Egenvärdena till den positiva operatorn $\sqrt{T^*T}$, med varje egenvärde λ upprepat lika många gånger som dimensionen hos motsvarande egenrum, kallas T:s *singulärvärden.*

Sats 9.5.8 (Singulärvärdesuppdelning) *Låt T vara en linjär operator på ett inre produktrum V med singulärvärdena $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Då finns det ON-baser $e_1, e_2, \ldots, e_n$ och $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i V så att*

$$Tv = \sum_{j=1}^{n} s_j \langle v, e_j \rangle f_j$$

för alla $v \in V$.

Med avseende på dessa ON-baser är således T:s matris en diagonalmatris med $s_1, s_2, \ldots, s_n$ som diagonalelement.

Bevis. Skriv T på polär form som $T = UR$, där U är en isometri och $R = \sqrt{T^*T}$. Singulärvärdena $s_1, s_2, \ldots, s_n$ är per definition egenvärden till R; låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en motsvarande ON-bas av egenvektorer. Sätt $f_j = Ue_j$ för $j = 1, 2, \ldots, n$. Då är också $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en ON-bas för V beroende på att U är en isometri. Slutligen är $Te_j = URe_j = U(s_j e_j) = s_j U e_j = s_j f_j$, så det följer av lineariteten att likheten i satsen gäller. □

Övningar

9.10 Bestäm kvadratroten till matriserna

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{bmatrix}$.

9.11 Bestäm den polära uppdelningen UR av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

9.12 Antag att T är en positiv operator på ett godtyckligt inre produktrum och att $\langle Tv_0, v_0 \rangle = 0$. Visa att $Tv_0 = 0$.

9.6 Bilinjära och kvadratiska former

Låt V vara ett n-dimensionellt euklidiskt rum. För varje symmetrisk bilinjär form b på V finns det en entydigt bestämd symmetrisk operator T på V så att $b(v, w) = \langle Tv, w \rangle$. (Se övning 5.12, eller utnyttja att med avseende på en godtycklig ON-bas för V är T:s matris lika med den bilinjära formens matris.) Speciellt har varje kvadratisk form q formen $q(v) = \langle Tv, v \rangle$.

Vi kan därför tala om en kvadratisk forms och en symmetrisk bilinjär forms *egenvärden* och *egenvektorer*; med dessa begrepp menar man motsvarande symmetriska operators egenvärden och egenvektorer.

I kapitel 5 visade vi att varje symmetrisk bilinjär form har en ortogonal bas. I euklidiska rum kan denna bas dessutom väljas så att den är en ON-bas med avseende på rummets inre produkt.

Sats 9.6.1 *Låt q vara en kvadratisk form på ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum. Då finns det en ON-bas som diagonaliserar q. Vektorerna i varje sådan bas är egenvektorer till den kvadratiska formen, och diagonalkoefficienterna är egenvärden.*

Bevis. Låt b vara den till q hörande symmetriska bilinjära formen, och låt T vara motsvarande symmetriska operator så att $b(v,w) = \langle Tv, w\rangle$. Enligt spektralsatsen för symmetriska operatorer finns det en ON-bas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i V som består av egenvektorer till T. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vara motsvarande egenvärden; då är

$$b(e_i, e_j) = \langle Te_i, e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} \lambda_i & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Detta visar att $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är en ortogonal bas till den bilinjära formen b, dvs. q diagonaliseras av $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Omvänt, om $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är en ON-bas som diagonaliserar q och λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n är motsvarande diagonalkoefficienter, så är $\langle Te_i, e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle$ för alla i och j. Det följer att $Te_i = \lambda_i e_i$, dvs. e_i är en egenvektor hörande till egenvärdet λ_i. $\square$

I diagonalframställningen av en kvadratisk form är enligt tröghetssatsen antalet positiva och antalet negativa koefficienter entydigt bestämda; däremot är förstås inte själva koefficienterna unika. Föregående sats innebär emellertid att om vi inskränker oss till *ortonormerade* baser, så är koefficienterna entydigt bestämda så när som på ordningen.

Exempel 9.6.1 För att diagonalisera den kvadratiska formen

$$q(x) = 2x_1x_2$$

på $\mathbf{R}^2$ bestämmer vi först egenvärden och egenvektorer till motsvarande symmetriska operator (matris)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

på $\mathbf{R}^2$. Det karakteristiska polynomet $t^2 - 1$ har nollställena 1 och -1, och motsvarande normaliserade egenvektorer är

$$f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{och} \qquad f_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Bytet mellan en vektors standardkoordinater (x_1, x_2) i $\mathbf{R}^2$ och koordinater (y_1, y_2) med avseende på basen f_1, f_2 ges av sambandet

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2. \end{cases}$$

Eftersom egenvärdena är 1 och -1, är

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2.$$

Man kan förstås också lätt verifiera detta genom att räkna ut produkten $2x_1x_2$ uttryckt i y_1 och y_2 med hjälp av koordinatsambanden. $\square$

Simultan diagonalisering av kvadratiska former

Det är inte alltid möjligt att finna en koordinattransformation som samtidigt diagonaliserar två givna kvadratiska former.

Exempel 9.6.2 Vi skall visa att de två kvadratiska formerna

$$q_1(x) = x_1x_2 \qquad \text{och} \qquad q_2(x) = x_1^2 - x_2^2$$

på vektorrummet $\mathbf{R}^2$ inte har någon gemensam kanonisk bas. Ett koordinatbyte

$$\begin{cases} x_1 = ay_1 + by_2 \\ x_2 = cy_1 + dy_2 \end{cases} \qquad \text{där } ad - bc \neq 0$$

transformerar nämligen formerna till

$$\begin{aligned} &q_1(x) = acy_1^2 + (ad + bc)y_1y_2 + bdy_2^2 \quad \text{och} \\ &q_2(x) = (a^2 - c^2)y_1^2 + 2(ab - cd)y_1y_2 + (b^2 - d^2)y_2^2, \end{aligned}$$

så för att båda formerna skall ha diagonalform måste $ad + bc = ab - cd = 0$. Detta är emellertid omöjligt eftersom i så fall

$$(ad - bc)^2 + (ab + cd)^2 = (ad + bc)^2 + (ab - cd)^2 = 0,$$

vilket strider mot att $ad - bc \neq 0$. $\square$

Om en av de kvadratiska formerna är positivt definit, finns det dock en simultan diagonalisering.

Sats 9.6.2 *Låt b_1 och b_2 vara två symmetriska bilinjära former på ett ändligtdimensionellt vektorrum V, och antag att den ena formen är positivt definit. Då har formerna en gemensam ortogonal bas.*

Bevis. Antag att formen b_2 är positivt definit. Då kan vi använda b_2 som inre produkt i V. Enligt sats 9.6.1 finns det en ON-bas för V som också är ortogonal med avseende på b_1. Denna bas är därför en gemensam ortogonal bas för de båda bilinjära formerna. □

Exempel 9.6.3 Vi använder tekniken i beviset för sats 9.6.2 för att samtidigt diagonalisera de kvadratiska formerna

$$q_1(x) = 2x_1x_2 + 2x_2^2 \qquad \text{och} \qquad q_2(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

på $\mathbf{R}^2$. Formen q_2 är positivt definit och ger upphov till skalärprodukten

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

med avseende på vilken vektorerna $f_1 = (1, 0)$ och $f_2 = (1, -1)$ är en ON-bas. Den mot q_1 svarande symmetriska bilinjära formen b_1 definieras av att $b_1(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$. Eftersom $b_1(f_1, f_1) = 0$, $b_1(f_1, f_2) = -1$ och $b(f_2, f_2) = 0$, har b_2 och motsvarande symmetriska linjära operator matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

i basen f_1, f_2. Operatorn har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$, och motsvarande egenvektorer är $v_1 = f_1 - f_2$ och $v_2 = f_1 + f_2$. Dessa vektorer har längd $\sqrt{2}$, så efter normalisering får vi följande ON-bas w_1, w_2 av egenvektorer till q_1:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2) \quad \text{och} \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2).$$

Uttryckt i standardbasen för $\mathbf{R}^2$ är

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1) \quad \text{och} \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, -1).$$

Sambandet mellan standardkoordinaterna (x_1, x_2) och koordinaterna (ξ_1, ξ_2) i ON-basen w_1, w_2 är därför

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}\,\xi_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\xi_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\xi_2. \end{cases}$$

I det nya koordinatsystemet är

$$q_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \qquad \text{och} \qquad q_2(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$ □

Övningar

9.13 Bestäm en ortonormal koordinattransformation som överför den kvadratiska formen $q(x)$ på $\mathbf{R}^2$ till diagonalform samt ange diagonalformen om

a) $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
b) $q(x) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_3^2$
c) $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
d) $q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

9.14 Bestäm en koordinattransformation som överför de två kvadratiska formerna $x_1^2 + 4x_2^2$ och $2x_1x_2$ på $\mathbf{R}^2$ på diagonalform.

9.7 Egenvärdenas extremalegenskaper

Egenvärdena till en kvadratisk form q på ett euklidiskt rum visar sig vara max- och minvärden till $q(v)$ under lämpliga bivillkor. Vi börjar med det enklaste fallet – det minsta och det största egenvärdet.

Sats 9.7.1 *Låt q vara en kvadratisk form på ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum V, och låt $\lambda_{\min}$ och $\lambda_{\max}$ beteckna formens minsta respektive största egenvärde. För alla vektorer v gäller då att*

$$\lambda_{\min}\|v\|^2 \leq q(v) \leq \lambda_{\max}\|v\|^2,$$

och likhet råder i den vänstra resp. högra olikheten om v är en till egenvärdet $\lambda_{\min}$ resp. $\lambda_{\max}$ hörande egenvektor. Följaktligen är

$$\min_{\|v\|=1} q(v) = \lambda_{\min} \qquad \textit{och} \qquad \max_{\|v\|=1} q(v) = \lambda_{\max}.$$

Bevis. Låt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ vara formens egenvärden, där varje egenvärde räknas lika många gånger som sin multiplicitet, och låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en ON-bas av motsvarande egenvektorer. Om ξ betecknar den därtill hörande koordinatavbildningen, så är

$$q(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(v)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_n \xi_j(v)^2 = \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \xi_j(v)^2 = \lambda_n \|v\|^2$$

med likhet om $\xi_j(v) = 0$ för $1 \leq j < n$, dvs. om v är en multipel av e_n. Den andra olikheten visas förstås analogt. $\square$

Om egenvärdet $\lambda_{\max}$ är positivt, kan den ena halvan av olikheten i satsen också skrivas $\|v\|^2 \geq \lambda_{\max}^{-1} q(v)$ och det följer att

$$\min_{q(v)=1} \|v\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}}.$$

Ekvationen $q(v) = 1$ betyder geometriskt en yta i rummet V (en kurva om $\dim V = 2$). Den geometriska tolkningen av likheten ovan är därför att det minsta avståndet till origo från en punkt på ytan $q(v) = 1$ är lika med $\sqrt{1/\lambda_{\max}}$. Om även egenvärdet $\lambda_{\min}$ är positivt får vi analogt

$$\max_{q(v)=1} \|v\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

med motsvarande geometriska tolkning om största avståndet från origo till en punkt på ytan.

Exempel 9.7.1 Ekvationen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

betyder geometriskt en ellips. Antag att $0 < a_1 \leq a_2$; då är a_1^{-2} den kvadratiska formens största egenvärde och a_2^{-2} dess minsta. Det kortaste resp. det längsta avståndet från en punkt på ellipsen till origo är således a_1 och a_2. □

Sats 9.7.1 är ett specialfall av följande sats, som karakteriserar samtliga egenvärden.

Sats 9.7.2 *Låt q vara en kvadratisk form på ett n-dimensionellt reellt inre produktrum V, och låt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ vara formens egenvärdena i växande ordning, där varje egenvärde räknas lika många gånger som multipliciteten. Då är*

$$\lambda_k = \min_{V_k} \max_{v \in V_k, \|v\|=1} q(v),$$

där minimum tas över alla k-dimensionella delrum V_k till V.

Bevis. Låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en mot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svarande ON-bas av egenvärden, och låt W_{n-k+1} beteckna det $(n-k+1)$-dimensionella delrum som spänns upp av vektorerna e_k, e_{k+1}, …, e_n.

Betrakta ett godtyckligt k-dimensionellt delrum V_k. Eftersom

$$\dim V_k + \dim W_{n-k+1} = n + 1 > \dim V,$$

kan inte summan $V_k + W_{n-k+1}$ vara direkt, och följaktligen innehåller snittet $V_k \cap W_{n-k+1}$ en nollskild vektor v_0, och vi kan naturligtvis anta att $\|v_0\| = 1$.

Vektorn kan skrivas $v_0 = \sum_{j=k}^{n} x_j e_j$, och eftersom basen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ är ortogonal med avseende på den kvadratiska formen q är

$$q(v_0) = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j x_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{n} x_j^2 = \lambda_k \|v_0\|^2 = \lambda_k.$$

Detta visar att

$$\max_{v \in V_k, \|v\|=1} \geq \lambda_k$$

för varje k-dimensionellt delrum V_k.

Betrakta nu det speciella k-dimensionella delrum U_k som spänns upp av de k första vektorerna $e_1, e_2, \ldots, e_k$. För en godtycklig normaliserad vektor $v = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j$ i U_k är

$$q(v) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^2 \leq \lambda_k \sum_{j=1}^{k} x_j^2 = \lambda_k \|v\|^2 = \lambda_k,$$

med likhet om $v = e_k$, så

$$\max_{v \in U_k, \|v\|=1} = \lambda_k.$$

Detta bevisar satsen. $\square$

Övningar

9.15 Sätt $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$. Bestäm

a) $\max\limits_{\|x\|=1} q(x)$ b) $\min\limits_{\|x\|=1} q(x)$ c) $\min\limits_{q(x)=1} \|x\|$.

Appendix

Permutationer

Med en *permutation* av elementen 1, 2, ..., n menas en bijektiv funktion

$$\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Permutationen σ är naturligtvis entydigt bestämd av värdena $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$. Ett bekvämt sätt att beskriva permutationen är därför att ange dessa värden i form av en n-tipel.

Exempel $(4, 2, 1, 5, 3)$ betecknar den permutation som avbildar 1 på 4, 2 på 2, 3 på 1, 4 på 5 och 5 på 3. □

Om $i < j$ och $\sigma(i) > \sigma(j)$ kallas paret $(\sigma(i), \sigma(j))$ en *inversion* i permutationen σ. Antalet inversioner i permutationen betecknas $N(\sigma)$. Permutationen kallas *udda* resp. *jämn* allteftersom talet $N(\sigma)$ är udda resp. jämnt. Talet $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ är permutationens *signum* eller *tecken*. Permutationens signum är således $+1$ om permutationen är jämn och -1 om den är udda.

Exempel Permutationen $(4, 2, 1, 5, 3)$ är udda, ty den innehåller fem inversioner, nämligen $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$ och $(5, 3)$. Permutationens signum är därför -1. □

Till varje permutation σ hör en invers permutation σ^{-1}.

Exempel Inversen till permutationen $(4, 2, 1, 5, 3)$ är $(3, 2, 5, 1, 4)$. □

Observera att de båda permutationerna i exemplet ovan har samma signum. Detta är ingen tillfällighet; vi har nämligen generellt:

Sats 1 *En permutation har samma signum som sin invers.*

Bevis. Sätt $\sigma(i) = k$ och $\sigma(j) = m$; då är $\sigma^{-1}(k) = i$ och $\sigma^{-1}(m) = j$. Paret (k, m) är en inversion i σ samtidigt som (j, i) är en inversion i σ^{-1}, ty villkoret är i båda fallen att $i < j$ och $k > m$. Följaktligen innehåller de båda permutationerna lika många inversioner. Permutationerna har således samma signum. $\square$

EXEMPEL Betrakta permutationen $(4, 2, 1, 5, 3)$. Vi kan överföra denna femtipel i femtipeln $(1, 2, 3, 4, 5)$ genom att successivt byta intilliggande element på följande vis: $(4, 2, 1, 5, 3) \to (4, 2, 1, 3, 5) \to (2, 4, 1, 3, 5) \to (2, 1, 4, 3, 5) \to (2, 1, 3, 4, 5) \to (1, 2, 3, 4, 5)$. Antalet byten är lika många som antalet inversioner. $\square$

Resultatet i exemplet ovan gäller generellt.

Sats 2 *Låt σ vara en permutation av talen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Då kan n-tipeln $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ överföras i n-tipeln $(1, 2 \ldots, n)$ genom $N(\sigma)$ successiva byten av intilliggande element. Om permutationen σ är udda åtgår således ett udda antal sådana byten och om den är jämn ett jämnt antal.*

Bevis. Antag att $\sigma(k) = n$. Då ingår $\sigma(k)$ i $n - k$ stycken inversioner, nämligen i inversionerna $(\sigma(k), \sigma(k+1))$, $(\sigma(k), \sigma(k+2))$, $\ldots$, $(\sigma(k), \sigma(n))$. Med $n - k$ stycken byten av intilliggande tal överförs $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ i n-tipeln $(\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(n), \sigma(k))$, vars sista tal är n. De $n - 1$ första talen i n-tipeln är en permutation σ' av $(1, 2, \ldots, n - 1)$, och eftersom dessa elements inbördes ordning är densamma som i permutationen σ gäller för antalet inversioner i σ' att $N(\sigma') = N(\sigma) - (n - k)$. Påståendet följer därför med induktion. $\square$

Svar och anvisningar till övningarna

Kapitel 1

1.3 a) $(-2, 2, 1)$ b) $(-2, s+1, s-1)$ c) $\big((-1+\mathrm{i})t, t, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\big),\ t \in \mathbf{C}$

1.4 a) $(2, 2, 3)$ b) $\frac{1}{7}(17-t, 2+4t, 7t)$ c) Lösning saknas
d) $\frac{1}{3}(2t-5, t+2, 3t, 9)$ e) Lösning saknas f) $(2, 1, 0)$
g) $(2, -1, 1, -2)$ h) $(2t-5, t, 2, -5)$

1.5 Systemet är lösbart om $b_4 = b_2 + b_3$, i vilket fall lösningen är
$\frac{1}{2}(5b_1 - 2b_2 - b_3 - 2t - 8u,\ 2t,\ -7b_1 + 4b_2 + b_3 + 12u,\ 4b_1 - 2b_2 - 6u,\ 2u)$,
där t och u är godtyckliga.

1.6 $(2, -1, -2)$ resp. $(1, 3, 0)$

1.7 a) $\left(\frac{s-15}{s-9}, \frac{15}{s-9}, \frac{-3}{s-9}\right)$ för $s \neq 9$, och olösbart för $s = 9$.
b) Olösbart om $s \neq 1$. För $s = 1$ fås lösningarna $(2t, 1-3t, t),\quad t \in \mathbf{R}$.

1.8 a) (2,2,0) b) $(1+2t, 0, t),\ t \in \mathbf{Z}_3$

1.9 a) 3 b) 3 c) 2

1.13 För antalet additioner/subtraktioner $A(n)$ gäller $A(n) = A(n-1) + n^2 - 1$ och $A(1) = 0$. Det följer att

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n = \tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n).$$

Kapitel 2

2.1 $3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix},\ A - 2B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix},\quad 4A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\ A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

2.3 $X = 3B - 2A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.5 b) $P = \frac{1}{2}(A + A^t)$, $Q = \frac{1}{2}(A - A^t)$

2.6 a) $AB = 16,\ BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ b) $AB = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$, BA existerar ej

2.6 c) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 14 & 9 & 11 \\ 12 & 7 & 13 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$

d) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

e) $AB = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 15 & 21 \\ 21 & 11 & 19 & 34 \\ 14 & 11 & 17 & 19 \end{bmatrix}$, BA existerar ej

f) $AB = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \\ 5-\mathrm{i} & 2+4\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3+3\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ -1+4\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{bmatrix}$

2.7 $\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix}$

2.8 a) $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$ b) $x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$

c) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

2.9 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$

2.10 $\mathrm{diag}(1, 2^n, 3^n)$

2.11 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^4 = 0$

2.12 Använd induktion!

2.13 a) $A^2 + AB + BA + B^2$ (Obs! $AB \neq BA$ i allmänhet)

b) $A^2 - AB + BA - B^2$

2.14 a) $A^2 + 2AB + B^2$ b) $A^2 - B^2$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

2.15 $AB = BA$

2.16 $(ABC)^t = C^tB^tA^t$

2.17 $(AB)^t = B^tA^t = BA = AB$

2.18 $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$

2.19 a) $X = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 8-7t & 5-7u \\ -3+2t & -1+2u \\ t & u \end{bmatrix}$, $t, u \in \mathbf{K}$.

2.20 $X = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$

2.21 a) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

2.22 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.23 a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) Ej inverterbar c) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

2.23 e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ g) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -10 & 8 & -2 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

h) Ej inverterbar i) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

j) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & -13 & 0 & 1 \\ -14 & 19 & 3 & -1 \\ 5 & -10 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.24 För alla s utom $s = 2$ och $s = 3$.

2.25 $\dfrac{1}{(s-1)(s+2)}\begin{bmatrix} -1 & -1 & s+1 \\ -1 & s+1 & -1 \\ s+1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

2.26 $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

2.27 $A^{-1}B^nA$

2.29 Multiplicera ihop och förenkla! $(E+N)(E-N+N^2-\cdots\pm N^{m-1})$
$= E - N + N^2 - \cdots \pm N^{m-1} + N - N^2 + N^3 - \cdots \pm N^m = E \pm N^m = E.$

2.30 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{bmatrix}$

2.31 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.34 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.35 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.36 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 0 \\ -41 & 29 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2.38 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $x = (3, 2, -1)$

2.42 Använd induktion. Påståendet är uppenbart sant för matriser av ordning 1. Antag att det är sant för alla matriser av ordning $n-1$, och partitionera matrisen A på formen $A = \begin{bmatrix} A' & b \\ c & d \end{bmatrix}$, där A' är en kvadratisk matris av ordning $n-1$, b är en kolonnmatris, c är en radmatris och d är ett tal. Matrisen A' kan enligt induktionsantagandet skrivas $A' = L'U'$ med en normerad undertriangulär matris L' och en övertriangulär matris U'. Båda dessa matriser är inverterbara. Sätt nu $L = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} U' & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, där radmatrisen x, kolonnmatrisen y och talet z skall bestämmas så att $LU = A$. Detta går bra eftersom villkoret är ekvivalent med att $L'U' = B$, $L'y = b$, $xU' = c$ och $xy + z = d$.

Kapitel 3

3.5 Alla utom d.

3.6 b) $T^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
c) $T^2(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1)$, $T^3(x_1, x_2) = (-2x_1 - 2x_2, 2x_1 - 2x_2)$

3.8 Endast b är inverterbar med $T^{-1}p(t) = p(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})$.

3.9 Nej

3.10 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)t^2 + (-2x_1 - 3x_2 + 3x_3)t + x_2 - 3x_3$. Avbildningen är ej injektiv.

3.11 D är surjektiv men ej injektiv. S är injektiv men ej surjektiv.

3.12 b) S är inverterbar om och endast om A är inverterbar, i vilket fall $S^{-1}X = A^{-1}X$.
c) $STX = AXB$.

3.15 Alla utom b.

3.16 Alla är delrum.

3.17 a) $\mathcal{N}(T) = \{0\},\ \mathcal{V}(T) = \{p \in \mathcal{P} \mid p(0) = 0\}$
b) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{P}_0,\ \mathcal{V}(T) = \{p \in \mathcal{P} \mid p(0) = 0\}$
c) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{P}_0,\ \ \mathcal{V}(T) = \mathcal{P}$

3.19 T. ex. $U_i = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_i = 0\},\ i = 1, 2.$

3.20 a) $v \notin U$ b) $v \in U$

3.21 a) $a = 0$ b) Alla a

3.23 $U = \{(-t, -u, t, u) \mid (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \to U$ som definieras av att $T(t, u) = (-t, -u, t, u)$ är en isomorfi.

3.24 $\{(-1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, 0, 1, 1)\}$

3.25 Nollrummet spänns upp av $(1, -1, 0, 0, 0)$ och $(-4, 0, 6, -3, 1)$. Kolonnrummet spänns upp av $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$ och $(0, 0, 1, 1)$.

3.26 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \qquad - 2x_5 = 0 \\ 9x_1 \qquad - 2x_3 + 5x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

3.29 $ST\colon \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & -5 & -2 \end{bmatrix},\ \ TS\colon \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$. Avbildningen TS är bijektiv.

3.30 a) Finns ingen.

3.30 b) $\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 10 + 7a & 4 + 5a & a \\ 1 + 7b & 5b & b \\ 5 + 7c & 3 + 5c & c \\ -7 + 7d & -4 + 5d & d \end{bmatrix}$, där a, b, c, d är godtyckliga tal.

3.31 $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

3.32 $\mathcal{N}(T) = \operatorname{spn}\{(1, -2, 1, 0)\}$

3.33 $a = -1$

3.36 Vektorerna $(1, -1, 1, 0)$, $(1, -2, 0, 3)$ bildar en bas för nollrummet, och vektorerna $(1, -1, 2)$, $(2, 1, 1)$ utgör en bas för kolonnrummet.

3.37 Vektorerna $(2, 4, 1, 3, -9)$, $(1, 2, -1, 1, -6)$, $(2, 4, -1, -1, -1)$ bildar en bas för W, och tillsammans med $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$ en bas för $\mathbf{R}^5$.

3.38 T. ex. $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-12, 8, -1, 0, 3)$.

3.39 Det räcker att visa att vektorerna är linjärt oberoende.

3.41 Låt E_{ij} beteckna matrisen men en etta på plats (i, j) och nollor för övrigt. Då utgör matriserna E_{jj}, $1 \le j \le n$ tillsammans med matriserna $E_{ij} + E_{ji}$, $1 \le i < j \le n$ en bas, så dimensionen är $n(n + 1)/2$.

3.46 a) Nej, det följer av dimensionssatsen att det inte finns någon sådan avbildning.

3.46 b) Ja, välj en bas v_1, v_2, v_3 för $\mathbf{R}^3$ så att vektorerna v_1, v_2 ligger i delrummet $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, och definiera avbildningen T genom att sätta $Tv_1 = Tv_2 = 0$ och $Tv_3 = (0, 1, 0, 0)$. För exempelvis $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ blir T:s matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.47 Kolonn- och radrummen har dimension 3, nollrummet dimension 1.

3.48 Visa först att restriktionen $T\colon \mathcal{V}(T) \to \mathcal{V}(T)$ är surjektiv. Det följer då att avbildningen också är injektiv, så dess nollrum $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{V}(T)$ består enbart av nollvektorn. Därför är summan $\mathcal{V}(T) + \mathcal{N}(T)$ direkt, och av dimensionsskäl är den lika med V.

3.49 b) $\xi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)t^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)t + x_2$,
$\eta^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_3 t^2 + x_2 t + x_1$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.50 T. ex. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

3.51 a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

3.54 Utnyttja att avbildningen $T\colon V \to \mathbf{R}^3$, $Tf = (f(0), f(\frac{1}{2}), f(1))$, är surjektiv och att $\mathcal{N}(T) = W$.

3.56 a) Betrakta restriktionen av T till delrummet $\mathcal{N}(T^{n+2})$ som en operator $T\colon \mathcal{N}(T^{n+2}) \to \mathcal{N}(T^{n+1})$ och tillämpa sats 3.11.6 med $V_1 = \mathcal{N}(T^{n+2})$, $V_2 = \mathcal{N}(T^{n+1})$, $W_1 = \mathcal{N}(T^{n+1})$ och $W_2 = \mathcal{N}(T^n)$. Den inducerade operatorn $\widetilde{T}$ är injektiv, varav följer att $\dim V_1/W_1 \le \dim V_2/W_2$, vilket bevisar den första olikheten i a).

För att bevisa den andra olikheten tillämpar man istället sats 3.11.6 på avbildningen $T^m\colon \mathcal{N}(T^{m+n}) \to \mathcal{N}(T^n)$ med $V_1 = \mathcal{N}(T^{m+n})$, $V_2 = \mathcal{N}(T^n)$, $W_1 = \mathcal{N}(T^m)$ och $W_2 = \{0\}$.

Kapitel 4

4.1 $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, x_3

4.5 Om de m första vektorerna i basen $e_1, e_2, \dots, e_n$ för V är en bas för delrummet W, så är de $n - m$ sista vektorerna i den duala basen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ en bas för annihilatorn W^0.

Kapitel 5

5.1 n^2 resp. $n(n+1)/2$

5.2 Matriserna karakteriseras av att $B^t = -B$. Dimension: $n(n-1)/2$.

5.3 Utnyttja att $b(v+w, v+w) = b(v,v)+b(v,w)+b(w,v)+b(w,w)$ för att visa att varje alternerande form är antisymmetrisk. Omvändningen gäller också (i kroppar med karakteristik $\neq 2$).

5.5 Eftersom $-1 = 1$ sammanfaller de symmetriska och antisymmetriska formerna. Det finns 8 (anti)symmetriska former, medan endast formerna svarande mot matriserna $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är alternerande.

5.6 a) $b(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $b(p,q) = p(0)q(0) + 2p(0)q(1) + 2p(1)q(0) - p(1)q(1) + p'(0)q'(0)$,

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $b(p_1, p_2) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \big(p_1(t)p_2'(t) + p_1'(t)p_2(t)\big)\,dt, \quad B = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5.9 $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$

5.13 a) $y_1 = x_1 + x_2 - 4x_3$, $y_2 = x_2 + 3x_3$, $y_3 = x_3$ ger diagonalformen $y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$.

b) $y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_2 - x_3$ ger diagonalformen $y_1^2 + y_2^2 - y_3^3$.

c) $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_3 = x_3$ ger diagonalformen $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

5.14 a) $(1,0,0)$, $(-1,1,0)$, $(7,-3,1)$ b) $(1,0,0)$, $(-1,1,1)$, $(-3,1,-1)$
c) $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,-1,1)$

5.15 Signaturen är $(3,0,0)$ om $0 < a < 1$, $(2,1,0)$ om $a < 0$ eller $a > 1$, och $(2,0,1)$ om $a = 0$ eller $a = 1$.

5.16 $(2,2,0)$

Kapitel 6

6.2 Nej, villkoret (iii) är ej uppfyllt. Exempelvis är $\langle t-1, t-1\rangle < 0$.

6.3 Ja

6.4 a) 0 b) 2π c) 0

6.5 $a = 2$ och $b > 4$.

6.6 b och c är skalärprodukter.

6.7 b) 22 c) 1

6.8 a) 5 b) $\sqrt{137}$

6.9 a) $\sqrt{\dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}}$ b) $\sqrt{e - e^{-1}}$

6.10 -10

6.13 a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{217}/6$

6.14 $1/\sqrt{3}$

6.15 Parallellogramlagen ger:

$$\begin{aligned} 2\|u+v+w\|^2 + 2\|u\|^2 &= \|2u+v+w\|^2 + \|v+w\|^2 \\ 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 &= \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \\ 2\|u+v\|^2 + 2\|u+w\|^2 &= \|2u+v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \end{aligned}$$

Genom att addera de två första och subtrahera den sista identiteten fås (a).

6.16 $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

6.17 T. ex. $(1, 0)$, $(2, -1)$.

6.19 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ eller $(\sin\theta, -\cos\theta)$

6.20 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 3, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)$

6.21 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2)$

6.22 $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(t-1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(3t^2 - 6t + 1)$

6.23 $(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

6.24 a) $\pi - 2\sin t$ b) 0 c) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\cos t - 4\pi\sin t$

6.25 $\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$, $\sqrt{\frac{5}{8}}\,\big(3t^2 - 1\big)$, $\sqrt{\frac{7}{8}}\,\big(5t^3 - 3t\big)$

6.30 $y = \frac{13}{10}\big(x + 1\big)$

6.31 $x_1 = \frac{23}{21}$, $x_2 = -\frac{13}{21}$

6.32 Den ortogonala matrisen är sin egen invers. Den unitära matrisens invers är

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

6.33 $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

6.34 a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.35 Ja, det finns två sådana isometrier, nämligen
$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{a\sqrt{5}}{4}(x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)\,t + \frac{a3\sqrt{5}}{4}(x_2 - x_1)\,t^2$,
där $a = \pm 1$.

6.37 a) $S^*x = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 6x_3)$
b) $T^*z = (z_1 + (1 - 2\mathrm{i})z_2, -\mathrm{i}z_1 + (2 - \mathrm{i})z_2, (1 + \mathrm{i})z_1 + 2z_2)$

6.38 a) $T^* = T$ b) $T^* = T$ c) $T^*f(t) = \int_t^1 f(s)\,ds$ d) $T^* = T$

Kapitel 7

7.1 a) 3 b) 4

7.2 a) $\chi_1 \wedge \chi_2 + 2\chi_1 \wedge \chi_3 + \chi_2 \wedge \chi_3$ b) -9
c) $-\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3 + \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_4 + 2\chi_1 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4 + \chi_2 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4$

7.3 a) $\phi \wedge \phi = 2\,\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4$, $\psi \wedge \psi = 0$, $\phi \wedge \psi = \chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3 + \chi_1 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4$.

7.4 $\chi_3 \wedge \chi_1 \wedge \chi_4 \wedge \chi_2 = -\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3 \wedge \chi_4$

7.5 a) $-\xi_1 \wedge \xi_2 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_3 + 5\,\xi_2 \wedge \xi_3$ b) $2\,\eta_1 \wedge \eta_2$ c) 0

7.6 $(-2, 1, 2)$

7.7 a) Koordinater: $(10, 8, -11)$, $(0, 14, 7)$, $(0, 0, 35)$. Matris: $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 0 \\ -11 & 7 & 35 \end{bmatrix}$
b) $70\,\chi_1 \wedge \chi_2 \wedge \chi_3$

7.9 70

7.11 0

7.12 a) -103 b) -67 c) 228

7.13 Addera för $k = 1$, 2, 3, 4 kolonn nr k multiplicerad med 10^{5-k} till den sista kolonnen som efter detta kommer att innehålla faktorn 23.

7.14 a) $\big(x + (n - 1)a\big)(x - a)^{n-1}$ b) $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
c) $(-1)^{n-1}(n + 1)2^{n-2}$ d) $\prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$

7.19 $\sqrt{90}$

7.20 8

7.21 16

7.22 Negativt orienterad.

7.25 $-\frac{1}{5} < a < 1$

Kapitel 8

8.2 Linjer genom origo i det speglande planet, det speglande planet, normalen genom origo till det speglande planet, samt förstås de två triviala invarianta delrummen.

8.3 Välj en bas $v_1, v_2, \dots, v_n$ för V så att $v_1, v_2, \dots, v_i$ ligger i V_i för varje i. Då är T:s matris med avseende på denna bas övertriangulär. Omvänt, om matrisen är övertriangulär med avseende på basen $v_1, v_2, \dots, v_n$, så uppfyller de invarianta delrummen $V_i = \operatorname{spn}\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ kedjevillkoret.

8.8 Egenvärdena är ± 1. Egenrummet $\mathcal{E}_1(T)$ består av alla jämna kontinuerliga funktioner, medan $\mathcal{E}_{-1}(T)$ består av alla udda kontinuerliga funktioner.

8.9 b) Använd t. ex. att 0 är ett egenvärde till en operator T om och endast om $\det T = 0$, och att $\det ST = \det TS$.

c) TS kan inte vara surjektiv, eftersom $\mathcal{V}(TS) \subseteq \mathcal{V}(T)$ och $\dim \mathcal{V}(T) \leq \dim W < \dim V$. Följaktligen är TS inte heller injektiv, så 0 är ett egenvärde till TS. Däremot visar exemplet $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $S(x_1, x_2) = x_1$ och $T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $Tx = (x, 0)$, där $ST = I$, att 0 inte behöver vara ett egenvärde till ST.

d) Definiera S och T genom att sätta $St^n = t^{n+1}$ och $Tt^{n+1} = t^n$ för alla naturliga tal n, samt $Tt^0 = 0$. Då är 0 ett egenvärde till ST men inte till TS $(= I)$.

8.10 Använd att $\chi_{S^{-1}TS}(t) = \det(tI - S^{-1}TS) = \det(S^{-1}(tI - T)S)$ och produktregeln för determinanter.

8.11 Följer av sats 8.2.3.

8.12 På grund av föregående övning kan T bara ha ett egenvärde λ, vilket innebär att $T = \lambda I$.

8.13 a) Diagonaliserande matris: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, diagonalmatris: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Diagonaliserande matris: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, diagonalmatris: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) Matrisen är ej diagonaliserbar.

8.14 a) $\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{d_1}, \mathrm{e}^{d_2}, \dots, \mathrm{e}^{d_n})$ c) $\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} & -\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} \\ 2\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} & 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} & -2\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} \\ 4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} & 4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} & -3\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} \end{bmatrix}$

8.17 Egenvärden: 1 och 2. Motsvarande egenvektorer $(1, 1)$ resp. $(1, 2)$.

8.18 $\chi_T(t) = (t-3)(t-2)^3$, $\phi_T(t) = (t-3)(t-2)^2$. Reducerande invarianta delrum: $\operatorname{spn}\{(0,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ och $\operatorname{spn}\{(0,1,1,2)\}$.

8.19 $\chi_T(t) = \phi_T(t) = (t-1)^2(t^2+1)$. Egenvärde: 1. Egenrummet $\mathcal{E}_1(T)$ spänns upp av vektorn $(1,1,1,1)$. Operatorn reduceras fullständigt av de invarianta delrummen $\mathcal{N}((T-I)^2) = \operatorname{spn}\{(0,1,0,0),(1,1,1,1)\}$ och $\mathcal{N}(T^2+I) = \operatorname{spn}\{(2,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

8.21 Sätt $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. En operator med matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ har de givna polynomen som minimalpolynom resp. karakteristiskt polynom.

8.22 Restriktionen av T till det invarianta delrummet $\mathcal{N}(T^{n-1})$ har t^{n-1} som minimalpolynom, och detta polynom måste vara delare till T:s minimalpolynom $\phi_T(t)$. Därför är $\phi_T(t) = t^{n-1}$, $= t^n$ eller $= t^{n-1}(t-\lambda)$ för någon nollskild skalär λ.

8.23 Minimalpolynomet har formen $\phi_T(t) = (t-1)(t-3)^m$ och är en delare till det karakteristiska polynomet, så $1 \leq m \leq 3$. Vidare är

$$\dim \mathcal{N}(T-I) + \dim \mathcal{N}((T-3I)^m) = \dim V = 4,$$

så det följer att $\dim \mathcal{N}((T-3I)^m) = 3$. Eftersom $\dim \mathcal{N}((T-3I)) = 2$ ger detta $m = 2$ som enda möjlighet. Alltså är $\phi_T(t) = (t-1)(t-3)^2$.

8.20 Låt $\phi_T(t) = \prod_{i=1}^k (t-\lambda_i)^{m_i}$ och $\chi_T(t) = \prod_{i=1}^k (t-\lambda_i)^{n_i}$. Det följer att $n_i = \dim \mathcal{N}((T-\lambda_i I)^{m_i})$. Använd resultatet i övning 3.55 b) för att dra slutsatsen att $n_i = m_i$ om och endast om egenrummet $\mathcal{E}_{\lambda_i}(T) = \mathcal{N}(T-\lambda_i I)$ är endimensionellt.

8.24 a) $\phi_{ST}(t) = \chi_{ST}(t) = \chi_{TS}(t) = t^2$, $\phi_{TS}(t) = t$.

b) $\phi_{ST}(t) = \chi_{ST}(t) = t(t-1)$, $\phi_{TS}(t) = \chi_{TS}(t) = t-1$.

8.27 T:s matris i basen $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (-1. -1,0,1)$, $v_4 = (0,1,1,2)$ är

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kapitel 9

9.4 Diagonaliserande matris: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, diagonalmatris: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} \end{bmatrix}$

9.5 Utnyttja spektralsatsen.

9.6 Utnyttja att minimalpolynomet är $\phi_T(t) = t(t-1)$, beroende på att $t^7 - t^6$ är ett annihilerande polynom.

9.7 a) Eftersom $\phi_S(t) = (t-1)^2(t+1)(t-3)$ kan inte S vara normal.

b) $\phi_T(t) = (t+1)(t+2)(t-2)(t-4)$, så T har en bas av egenvektorer e_1, e_2, e_3, e_4. Inför en inre produkt på V genom att sätta $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. I detta inre produktrum är T normal.

9.8 a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ b) $\frac{1}{\sqrt{18}}(-4,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$, $\frac{1}{3}(1,2,2)$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

9.10 a) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$

9.11 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ eller $U=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

9.12 Utnyttja att $\langle T(v_0+\lambda v), v_0+\lambda v\rangle \geq 0$ för alla skalärer λ; detta medför att $\langle Tv_0, v\rangle = 0$.

9.13 a) $x_1=\frac{1}{3}(y_1+2y_2+2y_3)$, $x_2=\frac{1}{3}(2y_1+y_2-2y_3)$, $x_3=\frac{1}{3}(2y_1-2y_2+y_3)$ ger diagonalformen $-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$.

b) $x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$,
$x_3=-\frac{2}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$ ger diagonalformen $-2y_1^2+y_3^2$.

c) $x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_3=-\frac{2}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$ ger diagonalformen $2y_2^2+3y_3^2$.

d) $x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}y_1+\frac{2}{\sqrt{45}}y_2+\frac{1}{3}y_3$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}y_1+\frac{4}{\sqrt{45}}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_3=\frac{5}{\sqrt{45}}y_2-\frac{2}{3}y_3$ ger diagonalformen $y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

9.14 $x_1=y_1+y_2$, $x_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2$

9.15 a) 9 b) -6 c) $1/3$

Symbollista

Följande symboler och beteckningar definieras eller införs på angiven sida:

$\mathbf{C}$	komplexa talkroppen, 3
$\mathbf{K}$	godtycklig kropp, 3
$\mathbf{K}^I$	rummet av alla funktioner från I till $\mathbf{K}$, 71
$\mathbf{Q}$	kroppen av rationella tal, 3
$\mathbf{R}$	reella talkroppen, 3
$\mathbf{Z}$	heltalen, 3
$\mathbf{Z}_n$	heltalen modulo n, 5
$\mathcal{C}(I)$	rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet I, 74
$\mathcal{C}^n(I)$	rummet av n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet I, 74
ℓ^2	rummet lilla l-två, 172
$\mathcal{P}$	rummet av polynom, 73
$\mathcal{P}_d$	rummet av polynom av grad $\leq d$, 73
$\mathcal{P}_k(N)$	mängden av alla delmängder av N med k element, 215
$A_k(V)$	rummet av alternerande k-former på V, 205
$\mathcal{E}_\lambda(T)$	egenrummet till operatorn T och egenvärdet λ, 253
$\mathcal{K}(A)$	kolonnrummet till matrisen A, 88
$\mathcal{L}(V, W)$	rummet av alla linjära avbildningar från V till W, 76
$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$	rummet av alla $m \times n$-matriser med element i $\mathbf{K}$, 37
$\mathcal{N}(T)$	nollrummet till avbildningen eller matrisen T, 83, 88
$\mathcal{R}(A)$	radrummet till matrisen A, 88
$\mathcal{V}(T)$	bildrummet till avbildningen T, 83
$V_{\mathbf{C}}$	komplexifieringen av V, 130, 132
V'	dualrummet till V, 133
V/W	kvotrum, 127
A_{i*}, A_{*j}	i:te raden resp. j:te kolonnen i matrisen A, 38
$\widehat{A}_{i,j}$	delmatris till A som fås genom att stryka rad nummer i och kolonn nummer j, 227
A^t	A-transponat, 38, 140, 213
A^*	adjunkten till A, 150, 195
$A^\perp$, ${}^\perp A$	ortogonala komplementet till A, 152, 180

$\det T$	T:s determinant, 218, 222
$\operatorname{diag}(\dots)$	diagonalmatrisen med angivna diagonalelement, 38
$\dim V$	dimensionen för vektorrummet V, 111
$\operatorname{mat} T$	matrisen till avbildningen T, 122
$\operatorname{rang} T$	T:s rang, 28, 115, 157
$\operatorname{spn} A$	spannet till mängden A, 86
$\operatorname{sgn}(I_1, I_2)$	signum för 2-partitionen (I_1, I_2), 207
$\operatorname{Part}_{k_1,k_2}(M)$	mängden av 2-partitioner av M, 207
$\chi_T(t)$	karakteristiska polynomet till operatorn T, 256
$\phi_T(t)$	minimalpolynomet till operatorn T, 270
$\sim$	radekvivalens, 18
$\perp$	ortogonal mot, 151, 175
$\oplus$	direkt summa, 72, 90, 249
$\wedge$	kilprodukt, 209
$\langle \cdot\, , \cdot \rangle$	linjär form, bilinjär form, seskvilinjär form eller inre produkt, 137, 143, 149, 167, 168
$\lvert A \rvert$	determinanten till matrisen A, 222, eller antalet element i mängden A, 207
$\lVert v \rVert$	normen av vektorn v, 169, 173

Sakregister