Spelteori

Lars-Åke Lindahl

2017

Spelteori

Innehåll

Förord

Spelteori är en matematisk teori som kan användas för att modellera och studera såväl konflikter som samarbeten. De olika modellerna kallas spel med de deltagande parterna som spelare, och beroende på om fokus ligger på vad en spelare kan åstadkomma på egen hand utan samarbete med övriga spelare eller på vad grupper av spelare kan åstadkomma genom samarbete, klassificeras spelen som *icke-kooperativa* respektive *kooperativa*.

Den icke-kooperativa spelteorin fokuserar på de enskilda spelarnas strategier och på spelarnas inflytande över resultaten och försöker förutsäga vilka strategier som spelarna kommer att välja. Teorin beskriver hur spelarna bör agera, men i spel finns det i allmänhet inte något utfall som är bäst för samtliga spelare. En huvuduppgift för spelteorin är därför att peka ut lösningar som i någon mening kan uppfattas som godtagbara för samtliga spelare samt att ge villkor för att sådana lösningar ska existera. I icke-kooperativa spel är Nashjämvikten en sådan lösning − i den är samtliga spelares strategier, dvs. val av handlingsalternativ, sådana att ingen spelare tjänar på att ensidigt byta strategi.

Ett icke-kooperativt spel har *strategisk form* om varje spelare gör sitt handlingsval en gång för alla och oberoende av motspelarnas val. Ett typiskt exempel på ett spel som uppfyller detta är sten-sax-påse. *Extensiva spel* modellerar istället situationer där spelarna kan överväga och modifiera sina val av handlingar allteftersom läget utvecklas. Schack och bridge är två typiska exempel på sådana spel, men de skiljer sig åt såtillvida att i schack har båda spelarna hela tiden perfekt information om ställningen i spelet, medan bridgespelaren endast har ofullständig information om det aktuella läget när det är hans tur att bjuda eller spela ett kort.

Kooperativa spel kan ses som en tävling mellan koalitioner av spelare snarare än mellan individuella spelare. Den stora fördelen med den kooperativa spelteorin är att den inte behöver någon precist definierad struktur av det aktuella spelet. Det räcker att veta vad varje koalition kan åstadkomma, man behöver inte veta hur. Ett grundläggande antagandet är att storkoalitionen, dvs. gruppen bestående av samtliga spelare, bildas, och huvudproblemet blir nu att fördela storkoalitionens utbetalning bland de individuella spelarna på ett rättvist sätt. Svaret på det problemet är ett lösningsbegrepp i form av en vektor som representerar varje spelares tilldelning. Olika lösningsbegrepp, som bygger på olika tolkningar av rättvisa, har föreslagits, och vi kommer att studera tre sådana, nämligen kärnan, nukleolen och Shapleylösningen.

Spelteoretiska begrepp och resultat används inom flera vetenskapsområden, främst kanske inom nationalekonomi, biologi och datavetenskap. Exempelvis kan konkurrens mellan företag på en gemensam marknad modelleras som spel och jämviktspriser svarar då mot Nashjämvikter. Inom biologin kan spelteori användas för att analysera evolutionärt stabila företeelser. Spelarna i ett evolutionsspel är gener med biologiskt kodade och ärftliga strategier, och evolutionärt stabila fenomen, som exempelvis könsfördelning, kan uppfattas som speciella Nashjämvikter.

Som matematisk teori är spelteori oantastlig, men för att man ska kunna använda spelteorins förutsägelser i en konkret konfliktsituation krävs det naturligtvis att det råder god överensstämmelse mellan modell och verklighet. Modellerna förutsätter att spelarna är rationella och att de kan spelreglerna, vilket bland annat inkluderar att de vet hur motspelarna värderar samtliga möjliga utfall. I komplicerade situationer är detta förstås omöjligt, men med hjälp av spelteoretiska resonemang kan man ofta i efterhand förklara varför det gick som det gick.

Den här boken är en introduktion till spelteori, och innehållet svarar väl närmast mot en 5–7.5 poängskurs på högskolenivå. Framställningen är elementär såtillvida att den inte förutsätter några avancerade kunskaper i matematik − en termins högskolestudier i ämnet torde vara fullt tillräckligt för att tillgodogöra sig texten, om man bortser från några enstaka avsnitt vars bevis kan överhoppas utan att sammanhanget går förlorat. Man måste behärska summa- och produktsymbolerna, funktionsbegreppet, de vanliga mängdoperationerna (union, snitt, mängdtillhörighet) och veta vad som menas med sannolikheter (på ändliga utfallsrum). Men framförallt får man inte var rädd för det matematiska språkbruket, som ju innebär att man definierar abstrakta begrepp och inför nya symboler och sedan använder dessa friskt. De mest avancerade resonemangen förekommer i avsnitten 1.5, 2.3, 7.1, 7.2, 9.3, 10.5 och (slutet av) 10.6 samt i appendix 2.

Lars-Åke Lindahl

Notation

De matematiska beteckningar som vi kommer att använda oss av är med några få undantag standardbeteckningar, och de som inte är det kommer vi att förklara allteftersom de införs. Således betecknar $\mathbf{R}$ mängden av alla reella tal, medan $\mathbf{R}_+$ är mängden av alla icke-negativa reella tal. Vi skriver $f\colon X \to \mathbf{R}$ för att ange att den reellvärda funktionen f är definierad på mängden X.

Ett centralt begrepp är begreppet *produktmängd.* Om A_1 och A_2 är två godtyckliga mängder, så består produktmängden $A_1 \times A_2$ av alla *ordnade par* (a_1, a_2) som kan bildas genom att välja elementet a_1 från mängden A_1 och elementet a_2 från mängden A_2.

Produktmängder av fler än två mängder definieras förstås analogt. Givet n stycken mängder $A_1, A_2, \ldots, A_n$ betecknar $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, eller kortare $\prod_{j=1}^n A_j$, mängden av alla *ordnade n-tipler* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ som kan bildas genom att välja $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_n \in A_n$. Ordnade n-tipler kommer vi för övrigt också att kalla *vektorer.*

Vi kommer att använda följande konvention för namngivning av n-tipler. Om de ingående elementen i en n-tipel betecknas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, använder vi samma bokstav a som namn på själva n-tipeln. Detta innebär att exempelvis $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ och $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vi använder förstås samma konvention för produktmängder så att $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, osv.

Mycket ofta kommer vi att behöva betrakta den $(n-1)$-tipel som uppstår när elementet på plats i i en n-tipel stryks, och för det behövs en bekväm beteckning. Om $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ skriver vi a_{-i} för $(n-1)$-tipeln

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

I fallet $n = 3$ är således $a_{-1} = (a_2, a_3)$, $a_{-2} = (a_1, a_3)$ och $a_{-3} = (a_1, a_2)$.

Vi använder ett analogt skrivsätt för produktmängder; om

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$

så är A_{-i} den produktmängd med $n-1$ faktorer som bildas när den i:te faktorn A_i utelämnas.

Givet en n-tipel $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ behöver vi också ett enkelt sätt att beteckna den n-tipel som bildas när man byter ut elementet a_i på plats i

mot ett godtyckligt element b. Vi skriver (a_{-i}, b) för denna n-tipel, vilket innebär att

$$(a_{-i}, b) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

I fallet $n = 3$ är alltså $(a_{-1}, b) = (b, a_2, a_3)$, $(a_{-2}, b) = (a_1, b, a_3)$ och $(a_{-3}, b) = (a_1, a_2, b)$. Vidare är naturligtvis $(a_{-i}, a_i) = a$ för alla n-tipler a.

Vi använder förstås ett helt analogt skrivsätt för produktmängder; detta betyder att

$$(A_{-i}, B) = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times B \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n.$$

Del I

Icke-kooperativa spel

Kapitel 1

Nyttoteori

Klassisk nyttoteori analyserar situationer där individer måste fatta beslut och försöker förklara deras val av handlingar i termer av preferenser, nytta och förväntningar.

1.1 Preferensrelationer och nyttofunktioner

Vi hamnar dagligen i situationer där vi behöver välja mellan olika handlingsalternativ: Kavaj eller tröja? Te eller kaffe till frukost? Bil eller buss till jobbet?, osv. De flesta valen gör vi av vana, omedvetet eller utan att reflektera närmare på saken, men om det gäller en helt ny situation och ett viktigt beslut, försöker vi ofta välja det bästa alternativet. En förutsättning för att kunna göra detta är att vi på något sätt kan värdera och rangordna de olika handlingsalternativen. Det är sådana beslutsproblem som vi ska studera i det här kapitlet.

Ett beslutsproblem består med andra ord av en mängd A av *handlingsalternativ* och en *preferensrelation* $\succeq$ på mängden A, där $a \succeq b$ ska utläsas "alternativet a är lika bra eller bättre än alternativet b". Istället för $a \succeq b$ skriver man också $b \preceq a$.

För att en relation på A ska duga som preferensrelation måste vissa minimikrav vara uppfyllda; de ges i följande definition.

Definition 1.1.1 En *preferensrelation* $\succeq$ på en mängd A är en relation som uppfyller följande två axiom:

Axiom 1 (Fullständighet) *För alla $a, b \in A$ är $a \succeq b$ eller $b \succeq a$.*

Axiom 2 (Transitivitet) *Om $a \succeq b$ och $b \succeq c$, så är $a \succeq c$.*

Fullständigheten innebär att alla alternativ i A ska kunna jämföras med varandra och medför speciellt att $a \succeq a$ för alla $a \in A$.

Om $a \succeq b$ och $b \succeq a$, kallar vi alternativen a och b *ekvivalenta* och skriver $a \sim b$. Vi säger också att beslutsfattaren är *indifferent* för sådana alternativ.

Relationen $\sim$ är förstås en ekvivalensrelation på mängden A.

Om $a \succeq b$ och $a \not\sim b$, säger vi att "a är bättre än b" och skriver $a \succ b$.

Definition 1.1.2 Låt $\succeq$ vara en preferensrelation på mängden A. Ett element $a^* \in A$ kallas *maximalt* (med avseende på preferensrelationen) om $a^* \succeq a$ för alla $a \in A$ (och *minimalt* om $a \succeq a^*$ för alla $a \in A$).

Om B är en delmängd av A, $a^* \in B$ och $a^* \succeq b$ för alla $b \in B$, säger vi att elementet a^* är *maximalt i* B med avseende på den givna preferensrelationen.

Att a^* är maximalt i B betyder alltså att det inte finns något alternativ i B som är bättre.

Nu när vi beskrivit vad som menas med preferensrelationer och maximala element är det lätt att definiera vad som bör menas med en rationell beslutsfattare − en *rationell beslutsfattare* är en person som i varje beslutssituation väljer ett maximalt element som sitt handlingsalternativ.

Det är enkelt att ge exempel på preferensrelationer som saknar maximala element och på preferensrelationer med mer än ett maximalt element. Om mängden A är ändlig, vilket vi ofta kommer att förutsätta i fortsättningen, finns det emellertid alltid maximala element. Det följer nämligen av axiom 1 och 2 att handlingsalternativen i A i så fall kan ordnas i en ändlig kedja $a_1 \succeq a_2 \succeq a_3 \cdots \succeq a_n$, och då är naturligtvis alternativet a_1 maximalt.

Exempel 1.1.1 En persons preferenser för de fem rätterna på lunchrestaurangens matsedel en viss dag ser ut så här:

$$\textit{Bruna bönor} \succ \textit{Kroppkakor} \sim \textit{Pannbiff} \succ \textit{Sill och potatis} \sim \textit{Pasta}.$$

Det unika optimala valet är förstås *Bruna bönor*. □

Ett vanligt sätt att ange sina preferenser (t. ex. i tävlingssammanhang) är att sätta poäng på de olika alternativen; ju bättre alternativ desto högre poäng. Detta leder till begreppet nyttofunktion.

Definition 1.1.3 Låt $\succeq$ vara en preferensrelation på mängden A. Funktionen $u\colon A \to \mathbf{R}$ representerar preferensrelationen och kallas en motsvarande *(ordinal) nyttofunktion* om

$$a \succeq b \;\Leftrightarrow\; u(a) \geq u(b).$$

Exempel 1.1.2 Betrakta matsedeln i exempel 1.1.1. Vi får en nyttofunktion u som representerar preferenserna genom att definiera

$$\begin{aligned}&u(\textit{Bruna bönor}) = 3,\;\; u(\textit{Kroppkakor}) = u(\textit{Pannbiff}) = 2,\\ &u(\textit{Sill och potatis}) = u(\textit{Pasta}) = 1.\end{aligned}$$

□

Kan exempel 1.1.2 generaliseras, dvs. representeras varje preferensrelation av en nyttofunktion? För preferensrelationer på ändliga mängder är svaret uppenbarligen ja; för oändliga mängder behöver man topologiska tilläggsvillkor som vi ska diskutera i nästa avsnitt.

Sats 1.1.1 *Varje preferensrelation på en ändlig mängd representeras av en nyttofunktion.*

Bevis. Arrangera elementen i mängden i växande ordning

$$a_1 \preceq a_2 \preceq \cdots \preceq a_n;$$

eftersom mängden är ändlig är detta inget problem. Definiera sedan funktionen u induktivt genom att sätta $u(a_1) = 1$ och

$$u(a_k) = \begin{cases} u(a_{k-1}) & \text{om } a_k \sim a_{k-1} \\ u(a_{k-1}) + 1 & \text{om } a_k \succ a_{k-1} \end{cases}$$

för $k = 2, 3, \dots, n$. Funktionen u representerar uppenbarligen preferensrelationen. □

I definitionen av begreppet nyttofunktion är det bara den inbördes ordningen mellan värdena $u(a)$ och $u(b)$ som är viktig, inte själva värdena. Nyttofunktionen är därför inte entydigt bestämd av sin preferensrelation.

Sats 1.1.2 *Två nyttofunktioner u och v representerar samma preferensrelation om och endast om $v = f \circ u$ för någon strängt växande funktion f (som är definierad på värdemängden till u).*

Bevis. Antag att preferensrelationen $\succeq$ representeras av nyttofunktionen u och att $v = f \circ u$, där funktionen f är strängt växande. Då gäller på grund av definitionen av monotonitet att

$$u(a) \geq u(b) \;\Leftrightarrow\; v(a) = f(u(a)) \geq f(u(b)) = v(b),$$

vilket visar att funktionen v också representerar preferensrelationen $\succeq$.

Antag omvänt att funktionerna u och v båda representerar preferensrelationen $\succeq$. Då gäller speciellt att

$$u(a) = u(b) \;\Leftrightarrow\; a \sim b \;\Leftrightarrow\; v(a) = v(b),$$

så vi kan därför entydigt definiera en funktion f på u:s värdemängd genom att sätta

$$f(u(a)) = v(a)$$

för alla $a \in A$. Naturligtvis är då $v = f \circ u$, och det följer av definitionen av nyttofunktion att

$$u(a) \geq u(b) \;\Leftrightarrow\; a \succeq b \;\Leftrightarrow\; v(a) \geq v(b) \;\Leftrightarrow\; f(u(a)) \geq f(u(b)).$$

Ekvivalensen ovan innebär förstås att f är strängt växande. □

Ett vanligt sätt att definiera en preferensrelation $\succeq$ på en mängd A är att utgå från en funktion $u\colon A \to \mathbf{R}$ och sedan definiera $\succeq$ genom sambandet

$$a \succeq b \;\Leftrightarrow\; u(a) \geq u(b).$$

Den på så sätt definierade relationen $\succeq$ är uppenbarligen både fullständig och transitiv, dvs. en preferensrelation. Preferensrelationen $\succeq$ säges vara *inducerad* av funktionen u, och u är per definition en nyttofunktion som representerar preferensrelationen.

Exempel 1.1.3 De flesta människorna är väl giriga i den bemärkelsen att de tycker det är bättre att ha mer pengar än mindre, vilket betyder att preferensen för rikedom, dvs. differensen mellan tillgångar och skulder angiven i säg kronor, ges av den vanliga ordningsrelationen $\geq$ på mängden $\mathbf{R}$ av reella tal, och varje strängt växande funktion på $\mathbf{R}$ är en motsvarande ordinal nyttofunktion.

Preferensrelationen och de ordinala nyttofunktionerna ger emellertid inte någon information om hur en person värderar ”nyttan” av olika förmögenhetsförändringar. En löneökning med 1 000 kr i månaden värderas förmodligen mer av en person med en månadslön på 10 000 kr än av en person med 100 000 kr i månaden, men för att kunna beskriva detta måste vi tilldela våra nyttofunktioner ytterligare egenskaper utöver att ange en ordning. Nyttofunktionens funktionsvärden $u(x)$ måste i så fall ange ”nyttan” av x på ett sådant sätt att man meningsfullt kan jämföra nyttoförändringen då x ändras från a till b med nyttoförändringen då x ändras från c till d med hjälp av differenserna $u(b) - u(a)$ och $u(d) - u(c)$. Nyttofunktioner med den egenskapen kallas *kardinala nyttofunktioner*.

Låt oss som exempel jämföra följande två tänkbara kardinala nyttofunktioner: $u(x) = x$ och $v(x) = \ln x$. För personer med den förstnämnda nyttofunktionen är $u(11\,000) - u(10\,000) = u(101\,000) - u(100\,000) = 1\,000$, dvs. dessa personer värderar en ökning av månadslönen med 1 000 kr lika oavsett om lönen före ökningen är 10 000 eller 100 000 kr.

För personer med v som nyttofunktion är istället $v(11\,000) - v(10\,000) = \ln 1.1 \approx 0.095$ och $v(101\,000) - v(100\,000) = \ln 1.01 \approx 0.010$, dvs. för dem är värdet av löneökningen större vid den lägre månadsinkomsten. $\square$

Övningar

1.1 Visa att indifferensrelationen $\sim$ är en ekvivalensrelation, dvs. att

(i) $a \sim a$ för alla $a \in A$

(ii) $a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a$

(iii) $a \sim b \;\&\; b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c$.

1.2 Den s. k. *lexikografiska ordningen* $\succeq$ på $\mathbf{R}^2$ definieras av att $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ om och endast om antingen $x_1 > y_1$ eller $x_1 = y_1$ och $x_2 \geq y_2$. Visa att den lexikografiska ordningen är en preferensrelation.

1.3 Definiera en relation $\geq$ på $\mathbf{R}^2$ genom

$$(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \geq y_1 \;\&\; x_2 \geq y_2.$$

Är $\geq$ en preferensrelation?

1.4 Anna, Bo och Cecilia är fotbollsfans och försöker enas om vilket av Stockholmslagen AIK, Djurgården och Hammarby de som grupp tycker bäst om, vilket inte är helt enkelt eftersom deras individuella preferenser är olika. Anna rankar lagen i ordningen AIK, Djurgården, Hammarby, Bo i ordningen Hammarby, AIK, Djurgården, och Cecilia i ordningen Djurgården, Hammarby, AIK. Våra tre fotbollsvänner beslutar sig därför för att fastställa gruppens preferenser genom majoritetsbeslut. När AIK i en omröstning ställs mot Djurgården, vinner AIK med två röster (Annas och Bos) mot en, så gruppen tycker att AIK $\succ$ Djurgården.

a) Komplettera genom att bestämma relationen mellan AIK och Hammarby och mellan Djurgården och Hammarby.

b) Är den erhållna relationen mellan lagen en preferensrelation?

c) Kan relationen beskrivas med hjälp av någon nyttofunktion?

1.5 En kardinal nyttofunktion u med avseende på förmögenhet kallas *riskavert* om funktionen är växande och strikt konkav (vilket gäller om $u'(x) > 0$ och $u''(x) < 0$ för alla x). Nyttofunktionen kallas *riskneutral* om den har formen $u(x) = ax + b$ med $a > 0$.

a) Visa att för en riskavert person (dvs. en person med en riskavert nyttofunktion) är nyttoökningen då förmögenheten ökar med 1 000 kr större om den ursprungliga förmögenheten är 10 000 kr än om den är 1 milj kr.

b) Vad gäller i motsvarande läge för en riskneutral person?

c) Generalisera påståendet i a) genom att formulera hur en ökning med h kr påverkar en riskavert persons nytta om den ursprungliga förmögenheten är a resp. b kr.

1.6 Vilken inkomstökning krävs för att en person med 30 000 kr i månadslön och $u(x) = \ln x$ som kardinal nyttofunktion ska känna samma tillfredsställelse som 1 000 kr mer i månadslön gav henne när månadslönen var 10 000 kr?

1.2 Kontinuerliga preferensrelationer

För att man ska kunna säga något intressant om preferensrelationer på oändliga mängder behövs det ytterligare egenskaper utöver de definierande egenskaperna fullständighet och transitivitet. Kontinuitet är en sådan tilläggsegenskap som för preferensrelationer på delmängder av $\mathbf{R}^n$ definieras på följande vis.

Definition 1.2.1 En preferensrelation $\succeq$ på en delmängd X av $\mathbf{R}^n$ kallas *kontinuerlig* om följande villkor är uppfyllt:

För alla konvergenta följder $(x_k)_{k=1}^\infty$ och $(y_k)_{k=1}^\infty$ i X med egenskapen att $x_k \succeq y_k$ för alla k och vars gränsvärden $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ och $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$ också ligger i X, gäller att $x \succeq y$.

En delmängd av $\mathbf{R}^n$ är sluten om och endast om den för varje konvergent följd av punkter i mängden också innehåller följdens gränsvärde. Följande sats följer därför omedelbart ur kontinuitetsdefinitionen för preferensrelationer.

Sats 1.2.1 *Om X är en sluten delmängd av $\mathbf{R}^n$, $\succeq$ är en kontinuerlig preferensrelation på X och a är ett godtyckligt element i X, så är mängden $\{x \in X \mid x \succeq a\}$ sluten.*

Bevis. Om $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är en godtycklig konvergent följd av element i mängden $F = \{x \in X \mid x \succeq a\}$ med gränsvärde x, så ligger för det första x i mängden X eftersom den är sluten. Genom att tillämpa kontinuitetsdefinitionen med $y_k = a$ för alla k, drar vi också slutsatsen att $x \succeq a$, dvs. att gränsvärdet x ligger i F. Mängden F är således sluten. □

Den av en kontinuerlig funktion inducerade preferensrelationen är nödvändigtvis kontinuerlig. Vi har nämligen följande sats.

Sats 1.2.2 *Antag att preferensrelationen $\succeq$ på X representeras av någon kontinuerlig nyttofunktion $u\colon X \to \mathbf{R}$. Då är preferensrelationen kontinuerlig.*

Bevis. Antag att $x_k \succeq y_k$ för alla k, där $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ och $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ är konvergenta följder i X med gränsvärden x respektive y i X. Då är $u(x_k) \geq u(y_k)$ för alla k, och eftersom funktionen u är kontinuerlig följer det genom gränsövergång i olikheten att $u(x) \geq u(y)$, dvs. att $x \succeq y$, vilket visar att preferensrelationen är kontinuerlig. □

Omvänt behöver en nyttofunktion som representerar en kontinuerlig preferensrelation inte vara kontinuerlig, ty om preferensrelationen representeras av u, så representeras den också av sammansättning $f \circ u$ för varje strängt växande funktion f, kontinuerlig eller ej. Sats 1.2.2 har emellertid följande omvändning.

Sats 1.2.3 *Antag att X är en sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^n$. Då representeras varje kontinuerlig preferensrelation på X av någon kontinuerlig nyttofunktion.*

Vi kommer inte att utnyttja sats 1.2.3 och avstår därför från beviset som är en smula komplicerat.

Fördelen med kontinuerliga preferensrelationer är att de har maximala element om definitionsmängden är kompakt. (En delmängd av $\mathbf{R}^n$ är kompakt om den är sluten och begränsad.)

Sats 1.2.4 *Antag att mängden X är kompakt. Då har varje kontinuerlig preferensrelation $\succeq$ på X ett maximalt element.*

Bevis. Sätt $F_a = \{x \in X \mid x \succeq a\}$; för varje $a \in X$ är F_a enligt sats 1.2.1 en sluten delmängd av X.

Betrakta nu snittmängden $\bigcap_{a\in X} F_a$ av alla mängderna F_a. Ett element $b \in X$ tillhör denna snittmängd om och endast om b tillhör varje F_a, dvs. om och endast om $b \succeq a$ för alla $a \in X$, dvs. om och endast om elementet b är maximalt. Vi behöver därför visa att snittmängden $\bigcap_{a\in X} F_a$ inte är tom.

Vi gör ett motsägelsebevis och antar att snittmängden är tom. Enligt en standardsats i topologin karakteriseras kompakta mängder av att varje familj av slutna delmängder med tomt snitt har en ändligt delfamilj med tomt snitt. Detta innebär i det här fallet att det finns ändligt många element $a_1, a_2, \dots, a_m$ så att $\bigcap_{j=1}^m F_{a_j} = \emptyset$, och vi kan naturligtvis anta att elementen är indexerade så att $a_1 \succeq a_2 \succeq \cdots \succeq a_m$. Men i så fall gäller att $a_1 \in F_{a_j}$ för alla j, så elementet a_1 tillhör snittet $\bigcap_{j=1}^m F_{a_j}$, som därför inte är tomt. Detta är en motsägelse som bevisar att det måste finnas ett maximalt element. $\square$

Övningar

1.7 Är den lexikografiska ordningen på $\mathbf{R}^2$ (se övning 1.2) en kontinuerlig preferensrelation?

1.8 Visa att preferensrelationen $\succeq$ på X är kontinuerlig om och endast om följande villkor är uppfyllt: För alla konvergenta följder $(x_k)_{k=1}^\infty$ i X med gränsvärde $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ i X och alla $a \in X$ gäller att
$$x_k \succeq a \text{ för alla } k \Rightarrow x \succeq a \quad \text{och} \quad x_k \preceq a \text{ för alla } k \Rightarrow x \preceq a.$$

1.3 Lotterier

För en rationell person är beslutet enkelt när handlingsalternativen väl är identifierade och rangordnade. Antag t. ex. att Kalle får välja ett av tre föremål a, b och c, och att hans preferensordning är $a \succ b \succ c$. Då väljer han förstås a. Men vad är bäst för Kalle om valet istället står mellan föremålet b och att deltaga i ett lotteri som med 50% chans ger honom a och med lika stor chans c? Ett rationellt val verkar förutsätta att Kalle har en uppfattning om hur bra b är jämfört med a och jämfört med c, samt också bero på hans riskbenägenhet. Hans preferensrelation ger ingen information om detta.

Ibland måste man alltså fatta beslut och välja alternativ som på ett eller annat sätt beror av slumpen. Vi kommer inte att behöva några avancerade sannolikhetsresonemang i den här boken, så det räcker att känna till de allra mest elementära sannolikhetsbegreppen, och vi kommer enbart att arbeta med ändliga utfallsrum. Vi kommer att ansluta oss till den brukliga spelteoritraditionen genom att kalla sannolikhetsfördelningar för lotterier.

Definition 1.3.1 Låt A vara en ändlig mängd. Med ett *lotteri p över A* menas en sannolikhetsfördelning på A, dvs. en funktion $p\colon A \to [0,1]$ som uppfyller $\sum_{a\in A} p(a) = 1$.

Mängden av alla lotterier över A kommer att betecknas $\mathcal{L}(A)$.

Exempel 1.3.1 Antag att mängden A består av tre element b, c och n, som står för alternativen att vinna en bil, en cykel resp. ingenting. Genom att sätta $p(b) = 0.0001$, $p(c) = 0.005$ och $p(n) = 0.9949$ har vi definierat ett lotteri över A, där sannolikheten att vinna en bil är en på tiotusen och sannolikheten att vinna en cykel är fem på tusen.

Jämförelsen mellan att deltaga i lotteriet p och att få en cykel helt säkert kan nu uppfattas som en jämförelse mellan två lotterier, nämligen som en jämförelse mellan lotterierna p och q, där $q(b) = q(n) = 0$ och $q(c) = 1$. $\square$

För lotterier med helt säker utgång, som lotteriet q i exemplet ovan, inför vi följande beteckningar.

Definition 1.3.2 För $a \in A$ definieras lotteriet δ_a på A av att

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } x = a, \\ 0 & \text{för } x \neq a. \end{cases}$$

I lotteriet δ_a är med andra ord a det enda möjliga utfallet. Av det skälet kommer vi i fortsättningen ofta att identifiera lotteriet δ_a med själva händelsen a, vilket gör att vi kan betrakta A som en delmängd av lotterimängden $\mathcal{L}(A)$.

Om p och q är två lotterier över A och α och β är två icke-negativa tal med summa 1, så är också funktionen $\alpha p + \beta q$ ett lotteri över A. Mängden $\mathcal{L}(A)$ av alla lotterier är med andra ord en *konvex mängd*.

Mer allmänt gäller förstås att varje konvex summa av lotterier är ett lotteri, dvs. summan $\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i$ är ett lotteri om $p_1, p_2, \dots, p_m$ är lotterier och $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ är icke-negativa tal med summa 1.

Vi kan realisera lotteriet $p = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i$ i två steg. Låt L vara ett lotteri med m olika utfall, där utfall nr i inträffar med sannolikhet α_i och består av en lottsedel till lotteriet p_i. Lotteriet p är då den kombinerade effekten av att först utföra L och, om utfallet i detta lotteri är alternativ i, sedan fortsätta med lotteriet p_i.

Varje lotteri p över A är en konvex kombination av helt säkra lotterier eftersom

$$p = \sum_{a \in A} p(a)\delta_a.$$

Ett lotteri p över $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ är förstås helt bestämt av n-tipeln $(p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n))$, så avbildningen $p \mapsto (p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n))$ är en bijektion mellan mängden $\mathcal{L}(A)$ av alla lotterier över A och den kompakta, konvexa delmängden

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$$

av $\mathbf{R}^n$, som för $n = 2$ är sträckan mellan punkterna $(1, 0)$ och $(0, 1)$, och för $n = 3$ är triangeln med hörn i $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Hörnpunkterna i bildmängden svarar mot de ”helt säkra” lotterierna δ_{a_i}, dvs. mot händelserna a_i.

Exempel 1.3.2 För alternativmängden $A = \{b, c, n\}$ i exempel 1.3.1 kan lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ identifieras med triangeln

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\},$$

och lotteriet i exemplet svarar då mot punkten $(0.0001, 0.005, 0.9949)$. Punkten (0,1,0) motsvaras av lotteriet δ_c, som ger en cykel som vinst med sannolikhet 1, dvs. helt säkert. □

Definition 1.3.3 Låt $u\colon A \to \mathbf{R}$ vara en funktion definierad på A, och låt p vara ett godtyckligt lotteri över A. Summan

$$\tilde{u}(p) = \sum_{a \in A} u(a)p(a)$$

kallas för *väntevärdet* av u med avseende på lotteriet p.

Genom att variera p erhåller man en funktion $p \mapsto \tilde{u}(p)$ som är definierad på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$. Om u är en nyttofunktion, kommer vi att kalla funktionen $\tilde{u}\colon \mathcal{L}(A) \to \mathbf{R}$ för den till u associerade *förväntade nyttofunktionen* på $\mathcal{L}(A)$.

Funktionen $\tilde{u}\colon \mathcal{L}(A) \to \mathbf{R}$ är uppenbarligen *affin* på sin definitionsmängd i den bemärkelsen att

$$\tilde{u}(\alpha p + \beta q) = \alpha\tilde{u}(p) + \beta\tilde{u}(q)$$

för alla lotterier p och q och alla icke-negativa reella tal α, β med summa 1. Naturligtvis är funktionen också kontinuerlig; $\tilde{u}(p)$ är helt enkelt ett polynom av grad 1 i variablerna $p(a_1)$, …, $p(a_n)$. Med beteckningarna $x_i = p(a_i)$ och $c_i = u(a_i)$ ser det hela kanske mer välbekant ut för läsaren, ty då blir $\tilde{u}(p) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$.

Väntevärdet av u med avseende på ett lotteri δ_a, som helt säkert resulterar i händelsen a, är förstås $u(a)$, så genom att identifiera lotteriet med själva händelsen har vi i alltså

$$\tilde{u}(a) = \tilde{u}(\delta_a) = u(a).$$

Antag t. ex. att $u(a)$ är den vinst i kronor som man erhåller om ett lotteri resulterar i utfallet a. Då är $\tilde{u}(p)$ den förväntade vinsten av lotteriet p, och enligt stora talens lag är det den vinst man i genomsnitt bör få då lotteriet upprepas många gånger.

Exempel 1.3.3 Betrakta åter lotteriet i exempel 1.3.1, och antag att bilvinsten är värd 200 100 kr, cykelvinsten är värd 5 100 kr och att en lott kostar 100 kr. Låt vidare funktionen u ange vinstens värde minskat med lottpriset så att $u(b) = 200\,000$, $u(c) = 5\,000$ och $u(n) = -100$. Väntevärdet av u med avseende på det explicita lotteriet p i exempel 1.3.1 blir då

$$\tilde{u}(p) = 200\,000 \cdot 0.0001 + 5\,000 \cdot 0.005 - 100 \cdot 0.9949 = -54.49 \text{ kr.} \qquad \square$$

1.4 Förväntad nytta

Låt oss återvända till Kalle, som står inför valet mellan att få föremålet b och att delta i ett lotteri p som med 50% chans ger honom föremålet a och med lika stor chans föremålet c, när hans preferensordning är $a \succ b \succ c$. Med en på måfå vald motsvarande nyttofunktion u, dvs. en funktion som uppfyller $u(a) > u(b) > u(c)$, skulle ett möjligt sätt att värdera lotterialternativet kunna vara att använda sig av väntevärdet av u med avseende på lotteriet p, dvs. $\tilde{u}(p) = \frac{1}{2}u(a) + \frac{1}{2}u(c)$. Om då $\tilde{u}(p) > u(b)$ väljer han lotteriet, om $\tilde{u}(p) < u(b)$ väljer han föremålet b, och om $\tilde{u}(p) = u(b)$ är han likgiltig inför valet mellan de båda alternativen.

Problemet med denna approach är att utfallet inte är entydigt bestämt av preferensrelationen utan beror på vilken nyttofunktion som valts för att representera densamma. Med $u(a) = 5$, $u(b) = 2$ och $u(c) = 1$ blir $\tilde{u}(p) = \frac{1}{2}(5+1) = 3 > u(b)$ med slutsatsen att han ska välja lotteriet. Men med $u(a) = 5$, $u(b) = 4$ och $u(c) = 1$ blir istället $\tilde{u}(p) = 3 < u(b)$, och nu är plötsligt föremålet b bästa valet.

Om vi vill värdera lotterier, dvs. utfall som beror av slumpen, med hjälp av en nyttofunktions väntevärde räcker det således inte att utnyttja funktionens ordinala (dvs. ordnande) egenskaper, utan vi måste också använda dess numeriska värden. I fortsättningen säger vi därför att vi valt en *kardinal nyttofunktion* när vi fixerat en nyttofunktion och förutom dess ordinala egenskaper också utnyttjar funktionsvärdena för att bilda olika väntevärden.

En naturlig fråga i sammanhanget är vilket samband som måste gälla för att två kardinala nyttofunktioner på en mängd A ska ge upphov till samma värdering av lotterierna på A, dvs. för att de båda nyttofunktionernas väntevärden ska inducera samma preferensordning på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$. Svaret är enkelt och ges av nästa sats.

Sats 1.4.1 *Låt u och v vara två funktioner på en (ändlig) mängd A. De båda väntevärdesfunktionerna $\tilde{u}$ och $\tilde{v}$ inducerar samma preferensrelation $\succeq$ på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ om och endast om det finns reella konstanter $C > 0$ och D så att*

$$v(a) = Cu(a) + D \tag{1}$$

för alla $a \in A$.

Anmärkning. En funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ på formen $f(x) = Cx + D$, där C och D är konstanter, kallas en *affin transformation.* Om $C > 0$ är funktionen dessutom *ordningsbevarande*, dvs. $x > y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$.

Sats 1.4.1 innebär med andra ord att $\tilde{u}$ och $\tilde{v}$ inducerar samma preferensrelation på $\mathcal{L}(A)$ om och endast om $v(x) = f(u(x))$ för någon ordningsbevarande affin transformation f.

Bevis. Antag först att $v(a) = Cu(a) + D$ med $C > 0$, och låt $\succeq_u$ och $\succeq_v$ beteckna de av $\tilde{u}$ resp. $\tilde{v}$ inducerade preferensrelationerna på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$. På grund av väntevärdesdefinitionen är

$$\begin{aligned}\tilde{v}(p) &= \sum_{a\in A} v(a)p(a) = \sum_{a\in A}(Cu(a) + D)p(a)\\ &= C\sum_{a\in A} u(a)p(a) + D\sum_{a\in A} p(a) = C\tilde{u}(p) + D\end{aligned}$$

för alla lotterier p, och detta medför att

$$\begin{aligned}p \succeq_v q \;&\Leftrightarrow\; \tilde{v}(p) \ge \tilde{v}(q) \;\Leftrightarrow\; C\tilde{u}(p) + D \ge C\tilde{u}(q) + D\\ &\Leftrightarrow\; \tilde{u}(p) \ge \tilde{u}(q) \;\Leftrightarrow\; p \succeq_u q,\end{aligned}$$

vilket visar att $\succeq_v$ och $\succeq_u$ är samma preferensordning.

Antag omvänt att $\tilde{u}$ och $\tilde{v}$ inducerar samma preferensordning $\succeq$ på lotterimängden. Då gäller speciellt ekvivalenserna

$$\tilde{u}(p) = \tilde{u}(q) \;\Leftrightarrow\; p \sim q \;\Leftrightarrow\; \tilde{v}(p) = \tilde{v}(q)$$

som beskriver indifferens.

Låt nu b och c vara två element i A med egenskapen att

$$u(c) \ge u(a) \ge u(b)$$

för alla $a \in A$, dvs. c är en maximipunkt och b är en minimipunkt till u. Vi skiljer på två fall.

Fall 1, $u(c) = u(b)$**.**
Detta betyder att $u(a) = u(b)$ för alla $a \in A$, dvs. funktionen u är konstant. Men då är

$$\tilde{u}(\delta_a) = u(a) = u(b) = \tilde{u}(\delta_b),$$

dvs. $\delta_a \sim \delta_b$ för alla $a \in A$. (Det råder med andra ord indifferens mellan alla lotterier med säker utgång.) Följaktligen är också

$$v(a) = \tilde{v}(\delta_a) = \tilde{v}(\delta_b) = v(b)$$

för alla a, så funktionen v är också konstant. För alla a är med andra ord $v(a) - v(b) = u(a) - u(b)$ $(= 0)$, vilket visar att (1) gäller med $C = 1$ och $D = v(b) - u(b)$.

Fall 2, $u(c) > u(b)$.
Vi fixerar ett $a \in A$ och ska jämföra det säkra lotteriet δ_a med lotterierna $p = \alpha\delta_c + (1-\alpha)\delta_b$ för olika värden på $\alpha \in [0,1]$. För exakt ett α-värde är $\delta_a \sim p$; villkoret är att

$$\tilde{u}(\delta_a) = \tilde{u}(p) = \alpha\tilde{u}(\delta_c) + (1-\alpha)\tilde{u}(\delta_b)$$

dvs. att

$$u(a) = \alpha u(c) + (1-\alpha)u(b)$$

med lösningen

$$\alpha = \frac{u(a)-u(b)}{u(c)-u(b)}.$$

Observera att lösningen α verkligen uppfyller $0 \le \alpha \le 1$ och att

$$1-\alpha = \frac{u(c)-u(a)}{u(c)-u(b)}.$$

Eftersom $\tilde{v}$ enligt antagande inducerar samma preferensrelation som $\tilde{u}$, kan indifferensvillkoret $\delta_a \sim p$ också uttryckas med hjälp av funktionen $\tilde{v}$, vilket ger

$$\begin{aligned} v(a) &= \tilde{v}(\delta_a) = \tilde{v}(p) = \alpha v(c) + (1-\alpha)v(b) \\ &= \frac{u(a)-u(b)}{u(c)-u(b)}\,v(c) + \frac{u(c)-u(a)}{u(c)-u(b)}\,v(b) \\ &= \frac{v(c)-v(b)}{u(c)-u(b)}\,u(a) + \frac{u(c)v(b)-u(b)v(c)}{u(c)-u(b)}. \end{aligned}$$

Detta visar att sambandet (1) gäller med

$$C = \frac{v(c)-v(b)}{u(c)-u(b)} > 0 \qquad \text{och} \qquad D = \frac{u(c)v(b)-u(b)v(c)}{u(c)-u(b)}.$$

Därmed är beviset klart. □

För att kunna uttrycka sats 1.4.1 enklare gör vi följande definition.

Definition 1.4.1 Två kardinala nyttofunktioner u och v på en mängd kallas *ekvivalenta* om sambandet mellan dem ges av en ordningsbevarande affin transformation, dvs. har formen (1).

Med hjälp av denna definition kan vi nu enklare formulera sats 1.4.1 så här:

Två kardinala nyttofunktioner på en mängd inducerar via sina associerade förväntade nyttofunktioner samma preferensrelation på lotterimängden om och endast om de är ekvivalenta.

Övning

1.9 Anna har just anställts som VD för ett börsföretag med följande lönevillkor: fast årslön på 2 milj kr samt en variabel bonus. Bonusens storlek beror av företagets vinst, som varje givet år kan vara dålig, halvbra, bra eller mycket bra med en sannolikhet som bedöms vara 0.1, 0.4, 0.3 resp. 0.2, och bonusens storlek är i resp. fall 0, 0.5, 1 resp. 2 milj kr.

a) Bestäm Annas förväntade årliga ersättning.

b) Bestäm Annas förväntade nytta givet att hennes kardinala nyttofunktion är $u(x) = \ln x$.

c) Antag att Anna som alternativ erbjuds en fast årslön på 2 850 000 kr utan någon bonus. Bör hon anta detta erbjudande?

d) Vilken är den lägsta årslön utan bonus som Anna är villig att acceptera?

1.5 von Neumann–Morgenstern-preferenser

Vi har sett att man för att prioritera i situationer som beror av slumpen behöver kunna ange sina preferenser för olika lotterier, och att begreppet förväntad nytta ger upphov till preferensrelationer på lotterimängder. Men för att beräkna den förväntade nyttofunktionen behöver man en kardinal nyttofunktion på grundmängden A av alternativ, och det är minst sagt tveksamt om man i verkliga situationer har tillgång till en sådan. Kanske är det istället så att beslutsfattaren intuitivt direkt kan rangordna utfallen i lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ utan att gå via nyttan av de olika alternativen i A.

En naturlig fråga i sammanhanget blir då om det finns några andra naturliga preferensrelationer på lotterimängden än de som genereras av kardinala nyttofunktioner. John von Neumann och Oskar Morgenster visade i det banbrytande verket *Theory of Games and Economic Behavior* att svaret är nej, om man med naturlig preferensrelation menar en preferensrelation som uppfyller några naturliga tilläggskrav utöver fullständighet och transitivitet. Besluts- och spelteori brukar därför baseras på begreppet förväntad nytta.

I det här avsnittet ska vi presentera en variant av von Neumann–Morgensterns resultat.

Definition 1.5.1 Låt A vara en ändlig mängd. En preferensrelation $\succeq$ på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ kallas en *von Neumann–Morgenstern-preferens*, förkortat *vNM-preferens*, om den satisfierar följande två axiom:

Axiom 3 (Kontinuitetsaxiomet) *För alla lotterier p, q, $r \in \mathcal{L}(A)$ och alla konvergenta följder $(\alpha_n)_1^\infty$ av reella tal i intervallet $[0,1]$ med $\lim \alpha_n = \alpha$ gäller de båda implikationerna*

$$\begin{aligned} \alpha_n p + (1-\alpha_n)q \succeq r \ \textit{ för alla } n \quad &\Rightarrow \quad \alpha p + (1-\alpha)q \succeq r \\ \alpha_n p + (1-\alpha_n)q \preceq r \ \textit{ för alla } n \quad &\Rightarrow \quad \alpha p + (1-\alpha)q \preceq r. \end{aligned}$$

Axiom 4 (Oberoende av irrelevanta alternativ) *För alla* p, $q \in \mathcal{L}(A)$ *med* $p \sim q$ *och alla* $r \in \mathcal{L}(A)$ *gäller* $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \sim \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r$.

Oberoendeaxiomet innebär speciellt att en person som är indifferent inför två handlingsalternativ a och a', också för varje annat handlingsalternativ b är indifferent mellan valen V och V', där V representerar en 50–50 chans att få a eller b och V' representerar en 50–50 chans att få a' eller b.

Oberoendeaxiomet är formulerat för att vara så svagt som möjligt, och det är inget speciellt med valet av vikterna $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Ur axiomen 3 och 4 följer nämligen att antagandet $p \sim q$ i själva verket medför att $\alpha p + (1-\alpha)r \sim \alpha q + (1-\alpha)r$ för alla tal $\alpha \in [0,1]$ och alla lotterier r. Se lemma 1.5.5.

Axiomet om oberoende av irrelevanta alternativ kan förefalla oskyldigt, men i reella beslutssituationer handlar många beslutsfattare på ett sätt som inte är förenligt med axiomet. Betrakta följande valsituation mellan två lotterier:

- Lotteri p_1 utlovar en säker vinst på 100 000 kr.
- Lotteri p_2 utlovar 80% chans att vinna 125 000 kr (och 20% chans att inte vinna någonting).

Flertalet försökspersoner föredrar p_1 framför p_2. Betrakta nu valet mellan följande lotterier:

- Lotteri q_1 utlovar 5% chans att vinna 100 000 kr.
- Lotteri q_2 utlovar 4% chans att vinna 125 000 kr.

I denna situation föredrar flertalet lotteriet q_2 framför q_1. Men lotterierna q_i kan bildas ur lotterierna p_i genom att blanda dem med ett irrelevant alternativ r i samma proportioner. Om r är ett lotteri som med 100% sannolikhet inte ger någonting alls, är nämligen $q_i = 0.05p_i + 0.95r$. Denna psykologiska paradox brukar kallas Allais paradox.

Följande sats visar dock att det kan vara naturligt att kräva att egenskaperna i axiom 3 och 4 ska vara uppfyllda.

Sats 1.5.1 *Preferensrelationer, som induceras av förväntade nyttofunktioner, är vNM-preferenser.*

Bevis. Antag att preferensrelationen $\succeq$ induceras av den förväntade nyttofunktionen $\tilde{u}$.

För att visa att preferensrelationen satisfierar den första implikationen i kontinuitetsaxiomet antar vi att $\alpha_n p + (1-\alpha_n)q \succeq r$ för en följd $(\alpha_n)_1^\infty$ av tal i intervallet $[0,1]$ som konvergerar mot α. Då är

$$\alpha_n \tilde{u}(p) + (1-\alpha_n)\tilde{u}(q) = \tilde{u}(\alpha_n p + (1-\alpha_n)q) \geq \tilde{u}(r)$$

för alla n. Gränsövergång i olikheten mellan ytterleden ger oss nu olikheten

$$\tilde{u}(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha\tilde{u}(p) + (1-\alpha)\tilde{u}(q) \geq \tilde{u}(r),$$

som innebär att att $\alpha p + (1-\alpha)q \succeq r$.

Helt analogt bevisas att den andra implikationen i kontinuitetsaxiomet är uppfylld.

Indifferensvillkoret $p \sim q$ i oberoendeaxiomet innebär att $\tilde{u}(p) = \tilde{u}(q)$, och därav följer för alla lotterier r att

$$\tilde{u}(\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}r) = \tfrac{1}{2}\tilde{u}(p) + \tfrac{1}{2}\tilde{u}(r) = \tfrac{1}{2}\tilde{u}(q) + \tfrac{1}{2}\tilde{u}(r) = \tilde{u}(\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}r),$$

dvs. $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \sim \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r$.

Axiom 3 och 4 är därför uppfyllda, vilket innebär att $\succeq$ är en vNM-preferens. □

Att en person ska kunna ange sina preferenser för ett antal alternativ på en kardinalskala är ett starkt antagande – ett antagande som vi likväl behöver göra för att kunna använda oss av begreppet förväntad nytta inom spelteorin. En person kanske en given biokväll föredrar film X framför film Y och film Y framför film Z, men kan han på ett meningsfullt sätt säga att hans nöje av att se X istället för Y är exempelvis tre gånger så stort som hans nöje av att se Y istället för Z? Förmodligen inte.

Ett sätt att försöka utröna biobesökarens preferenser på en kardinalskala är att låta honom välja mellan en biobiljett till film Y och en lottsedel, som med sannolikhet α ger honom en biljett till film X och med sannolikhet $1-\alpha$ ger honom en biljett till film Z. För $\alpha = 1$ föredrar han givetvis lottsedeln, eftersom han då säkert får se film X som han föredrar framför film Y. Låt oss nu sänka sannolikheten α; för $\alpha = 0.75$ kanske han fortfarande föredrar lottsedeln framför biobiljetten till Y, eftersom lottsedeln fortfarande gör att han med stor sannolikhet får se sin älsklingsfilm. För $\alpha = 0$ kommer han dock säkert att föredra biobiljetten till Y eftersom lottsedeln i detta fall innebär att han helt säkert tvingas se film Z. Någonstans i intervallet mellan 0 och 1 bör det därför finnas en sannolikhet som gör honom indifferent mellan biobiljetten till Y och lottsedeln; låt oss anta att denna sannolikhet är $\alpha = 0.25$.

Eftersom kardinala nyttofunktioner är ekvivalenta under ordningsbevarande affina transformationer, kan vi fixera vår biobesökares nyttofunktionsvärden för de två alternativen X och Z så att $u(X) = 1$ och $u(Z) = 0$. Den förväntade nyttan av lottsedeln med $\alpha = 0.25$ blir då

$$0.25u(X) + 0.75u(Z) = 0.25,$$

och eftersom han är indifferent mellan lottsedeln och en biobiljett till filmen Y är hans nytta av denna film nu fastställd till $u(Y) = 0.25$.

Exemplet med biobiljetterna antyder att det alltid borde vara möjligt att konstruera en kardinal nyttofunktion åt en beslutsfattare som på ett konsistent sätt kan rangordna lotterier.

Att så verkligen är fallet för vNM-preferenser är kontentan av följande sats, som utgör omvändningen till sats 1.5.1. Med något annorlunda förutsättningar visades satsen – som redan nämnts – först av von Neumann och Morgenstern.

Sats 1.5.2 *Låt $\succeq$ vara en vNM-preferens på lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ till en ändlig mängd A.*

(a) Då induceras $\succeq$ av någon affin nyttofunktion U på $\mathcal{L}(A)$, och funktionen U är entydigt bestämd så när som på ordningsbevarande affina transformationer.

(b) Det finns vidare en kardinal nyttofunktion u på A så att $U = \tilde{u}$, vilket innebär att

$$U(p) = \sum_{a\in A} u(a)p(a)$$

för alla lotterier p.

Satserna 1.5.1 och 1.5.2 har följande omedelbara korollarium.

Korollarium 1.5.3 *En preferensrelation på en lotterimängd $\mathcal{L}(A)$ är en vNM-preferens om och endast om den induceras av den förväntade nyttofunktionen till någon kardinal nyttofunktion på mängden A.*

Kardinala nyttofunktioner, vars väntevärden används för att representera vNM-preferenser för lotterier som funktionen u i sats 1.5.2, kallas ofta *Bernoulli-nyttofunktioner* efter matematikern Daniel Bernoulli, som använde sig av nyttofunktioner med avtagande marginalnytta i ett arbete år 1738.

Bevis för sats 1.5.2. Beviset för del (a) är elementärt men långt, så vi börjar med att visa att påstående (b) enkelt följer ur (a). Låt U vara nyttofunktionen i påståendet (a), och definiera funktionen u på A genom att sätta

$$u(a) = U(\delta_a)$$

för alla $a \in A$. Varje lotteri p är en konvex kombination $p = \sum_{a\in A} p(a)\delta_a$ av de elementära lotterierna δ_a, och eftersom funktionen U är affin är

$$U(p) = \sum_{a\in A} p(a)U(\delta_a) = \sum_{a\in A} p(a)u(a) = \tilde{u}(p).$$

Därmed är påstående (b) bevisat.

Beviset för påstående (a) bygger på en serie av lemman.

Lemma 1.5.4 *Antag att p_1, p_2, q_1, q_2 är element i $\mathcal{L}(A)$ och att $(\lambda_n)_1^\infty$ och $(\mu_n)_1^\infty$ är två konvergenta talföljder i intervallet $[0,1]$ med gränsvärden λ och μ. Då gäller att om*

$$\lambda_n p_1 + (1-\lambda_n)p_2 \sim \mu_n q_1 + (1-\mu_n)q_2$$

för alla n, så är

$$\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \sim \mu q_1 + (1-\mu)q_2.$$

Bevis. Sätt $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ och $q = \mu q_1 + (1-\mu)q_2$. På grund av definitionen av $\sim$ i termer av $\succeq$ räcker det av symmetriskäl att visa implikationen

$$\lambda_n p_1 + (1-\lambda_n)p_2 \succeq \mu_n q_1 + (1-\mu_n)q_2 \text{ för alla } n \quad \Rightarrow \quad p \succeq q.$$

Antag att implikationen är falsk, dvs. att att

$$\lambda_n p_1 + (1-\lambda_n)p_2 \succeq \mu_n q_1 + (1-\mu_n)q_2$$

för alla n men att $p \prec q$. Vi ska visa att detta leder till en motsägelse.

Antag därför först att det finns ett element r i lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ sådant att $p \prec r \prec q$. Det följer då först att $\mu_n q_1 + (1-\mu_n)q_2 \succ r$ för alla utom ändligt många index n, ty i motsatt fall är $\mu_{n_k} q_1 + (1-\mu_{n_k})q_2 \preceq r$ för någon oändlig delföljd (n_k), och det följer av axiom 3 att $q \preceq r$, vilket strider mot att $r \prec q$.

På grund av transitiviteten är därför också

$$\lambda_n p_1 + (1-\lambda_n)p_2 \succ r$$

för alla utom ändligt många index n, och axiom 3 ger nu slutsatsen $p \succeq r$, vilket också är en motsägelse.

Så det finns inget element r som uppfyller $p \prec r \prec q$. Det följer därför att $\mu_n q_1 + (1-\mu_n)q_2 \succeq q$ för alla utom ändligt många n, ty i motsatt fall finns det en oändlig delföljd (n_k) sådan att $\mu_{n_k} q_1 + (1-\mu_{n_k})q_2 \prec q$, vilket innebär att $\mu_{n_k} q_1 + (1-\mu_{n_k})q_2 \preceq p$, och axiom 3 medför nu att $q \preceq p$, vilket strider mot antagandet $p \prec q$.

Därmed är motsägelsebeviset klart och lemmat bevisat. □

Vi kan nu generalisera slutsatsen i axiomet om oberoende av irrelevanta alternativ.

Lemma 1.5.5 *För alla $p, q, r \in \mathcal{L}(A)$ och alla $\lambda \in [0,1]$ gäller implikationen*

$$p \sim q \;\Rightarrow\; \lambda p + (1-\lambda)r \sim \lambda q + (1-\lambda)r.$$

Bevis. Vi visar först lemmat med induktion över n för alla skalärer λ som har formen

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k 2^{-k}, \tag{2}$$

där $\epsilon_k = 0$ eller $= 1$.

Fallet $n = 1$, $\epsilon_1 = 0$ är trivialt, eftersom $0p + 1r = 0q + 1r = r$, och fallet $n = 1$, $\epsilon_1 = 1$ är axiom 4.

Gör därför induktionsantagandet att implikationen i lemmat gäller för alla speciella tal λ på formen (2) då n är bytt mot $n-1$, och skriv sedan talet λ i (2) som $\lambda = \epsilon_1/2 + \lambda'/2$ med $\lambda' = \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_{k+1} 2^{-k}$. På grund av induktionsantagandet är då

$$\lambda' p + (1-\lambda')r \sim \lambda' q + (1-\lambda')r. \tag{3}$$

Med hjälp ekvation (3) och axiom 4 får vi nu i fallet $\epsilon_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda p + (1-\lambda)r &= \tfrac{1}{2}\lambda' p + (1 - \tfrac{1}{2}\lambda')r \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\lambda' p + (1-\lambda')r\big) + \tfrac{1}{2}r \sim \tfrac{1}{2}\big(\lambda' q + (1-\lambda')r\big) + \tfrac{1}{2}r \\ &= \tfrac{1}{2}\lambda' q + (1 - \tfrac{1}{2}\lambda')r = \lambda q + (1-\lambda)r;\end{aligned}$$

och i fallet $\epsilon_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\lambda p + (1-\lambda)r &= (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda')p + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda')r \\ &= \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\big(\lambda' p + (1-\lambda')r\big) \sim \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\big(\lambda' q + (1-\lambda')r\big) \\ &\sim \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}(\lambda' q + (1-\lambda')r) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda')q + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda')r \\ &= \lambda q + (1-\lambda)r.\end{aligned}$$

Därmed är induktionssteget klart och lemmat bevisat för alla tal λ som har den speciella formen (2).

Om λ är ett godtyckligt tal i intervallet $[0,1]$, väljer vi en följd $(\lambda_n)_1^\infty$ av tal som har den speciella formen (2) och som konvergerar mot λ då $n \to \infty$. Då är $\lambda_n p + (1-\lambda_n)r \sim \lambda_n q + (1-\lambda_n)r$ för alla n, och lemma 1.5.4 ger nu att $\lambda p + (1-\lambda)r \sim \lambda q + (1-\lambda)r$. □

Lemma 1.5.6 *Antag att $q \prec p$ och att x är ett element i lotterimängden som uppfyller $q \preceq x \preceq p$. Då finns det ett tal $\mu \in [0,1]$ sådant att $x \sim \mu p + (1-\mu)q$.*

Bevis. Mängden $\Lambda = \{\lambda \in [0,1] \mid \lambda p + (1-\lambda)q \succeq x\}$ är nedåt begränsad och icke-tom, eftersom den innehåller talet 1. Sätt $\mu = \inf \Lambda$, och välj en följd $(\mu_n)_1^\infty$ av tal i Λ som konvergerar mot μ. Då är $\mu_n p + (1-\mu_n)q \succeq x$ för alla n, så det följer av kontinuitetsaxiomet att $\mu p + (1-\mu)q \succeq x$.

Vi ska visa att den omvända relationen $\mu p + (1-\mu)q \preceq x$ också gäller. Detta är uppenbart i fallet $\mu = 0$, ty då är $\mu p + (1-\mu)q = q \preceq x$. Antag därför att $\mu > 0$, och välj en följd $(\mu_n)_1^\infty$ av tal i intervallet $[0,\mu[$ som konvergerar mot μ då $n \to \infty$. På grund av definitionen av infimum gäller då $\mu_n \notin \Lambda$, dvs. $\mu_n p + (1-\mu_n)q \prec x$, för alla n, och axiom 3 ger nu den önskade slutsatsen $\mu p + (1-\mu)q \preceq x$. □

Lemma 1.5.7 *Antag att $q \prec p$ och $0 < \lambda < 1$. Då är $q \prec \lambda p + (1-\lambda)q \prec p$.*

Bevis. Vi gör ett motsägelsebevis genom att visa att antagandet

$$p \preceq \lambda p + (1-\lambda)q \tag{4}$$

leder till en motsägelse.

Lemma 1.5.6 och antagandet (4) ger oss ett tal $\mu \in [0,1]$ sådant att

$$p \sim \mu(\lambda p + (1-\lambda)q) + (1-\mu)q = \mu\lambda p + (1-\mu\lambda)q,$$

och vi ska visa med induktion att

$$p \sim \mu^n\lambda^n p + (1-\mu^n\lambda^n)q \tag{5}$$

för alla positiva heltal n. Fallet $n = 1$ är redan klart, så antag att (5) gäller för ett visst $n \geq 1$. Genom att kombinera detta induktionsantagande med lemma 1.5.5 drar vi slutsatsen att

$$\begin{aligned} p &\sim \mu\lambda p + (1-\mu\lambda)q \sim \mu\lambda\big(\mu^n\lambda^n p + (1-\mu^n\lambda^n)q\big) + (1-\mu\lambda)q \\ &= \mu^{n+1}\lambda^{n+1}p + (1-\mu^{n+1}\lambda^{n+1})q, \end{aligned}$$

vilket visar att (5) också gäller med $n+1$ istället för n. Därmed är induktionssteget klart.

Eftersom $\mu^n\lambda^n \to 0$ då $n \to \infty$, följer det nu av (5) och lemma 1.5.4 att

$$p \sim 0p + 1q = q,$$

vilket är en motsägelse och bevisar att $\lambda p + (1-\lambda)q \prec p$.

Den andra halvan $q \prec \lambda p + (1-\lambda)q$ av lemmat visas med ett helt analogt motsägelsebevis. □

Lemma 1.5.8 *Antag att $q \prec p$ och att $0 \leq \mu < \lambda \leq 1$. Då är*

$$\mu p + (1-\mu)q \prec \lambda p + (1-\lambda)q.$$

Bevis. Påståendet är ett specialfall av lemma 1.5.7 om $\mu = 0$ eller $\lambda = 1$, så antag att $0 < \mu < \lambda < 1$. Då är $0 < \mu/\lambda < 1$, och genom att använda lemma 1.5.7 får vi först relationen

$$\lambda p + (1-\lambda)q \succ q,$$

och sedan den eftersökta relationen

$$\begin{aligned} \lambda p + (1-\lambda)q &\succ \frac{\mu}{\lambda}\big(\lambda p + (1-\lambda)q\big) + (1-\frac{\mu}{\lambda})q \\ &= \mu p + (1-\mu)q. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.5.9 *Antag att $q \prec p$.*

(i) För varje lotteri x sådant att $q \preceq x \preceq p$ finns det ett unikt reellt tal $\mu = \mu_{q,p}(x)$ i intervallet $[0,1]$ så att $x \sim \mu p + (1-\mu)q$.

(ii) För alla x, y som uppfyller $q \preceq x \preceq p$ och $q \preceq y \preceq p$ och alla skalärer $\lambda \in [0,1]$ gäller att

$$x \succeq y \ \Leftrightarrow\ \mu_{q,p}(x) \geq \mu_{q,p}(y) \tag{6}$$

och

$$\mu_{q,p}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\mu_{q,p}(x) + (1-\lambda)\mu_{q,p}(y). \tag{7}$$

Bevis. Lemma 1.5.6 visar att det finns ett tal $\mu \in [0,1]$ med egenskapen att $x \sim \mu p + (1-\mu)q$, och lemma 1.5.8 medför att talet μ är unikt och att ekvivalensen (6) gäller.

Om $x \sim \mu_1 p + (1-\mu_1)q$ och $y \sim \mu_2 p + (1-\mu_2)q$, så får vi sambandet

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &\sim \lambda(\mu_1 p + (1-\mu_1)q) + (1-\lambda)y \\ &\sim \lambda(\mu_1 p + (1-\mu_1)q) + (1-\lambda)(\mu_2 p + (1-\mu_2)q) \\ &= \big(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2\big)p + \big(1 - (\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)\big)q\end{aligned}$$

genom att använda lemma 1.5.5 två gånger. Detta bevisar likheten i (7). □

I fortsättningen antar vi att det finns minst två icke-ekvivalenta lotterier i $\mathcal{L}(A)$, ty i det triviala fallet att $p \sim q$ för alla $p, q \in \mathcal{L}(A)$ får vi en affin nyttofunktion U som representerar preferensrelationen genom att sätta $U(p) = 0$ för alla $p \in \mathcal{L}(A)$, och varje representerande nyttofunktion måste uppenbarligen vara konstant.

I de fall då lotterimängden har ett minsta element q och ett största element p (och $q \prec p$) ger oss vidare lemma 1.5.9 en affin nyttofunktion U som representerar preferensrelationen, nämligen funktionen $U = \mu_{q,p}$. Entydighetsdelen i sats 1.5.2 följer av nästa lemma, som också kommer att behövas för att utvidga resultatet till det allmänna fallet.

Lemma 1.5.10 *Antag att U och V är två affina nyttofunktioner på $\mathcal{L}(A)$ som båda representerar preferensrelationen $\succeq$. Då finns det två reella tal $C > 0$ och D så att $V = CU + D$.*

Bevis. Fixera två element p och q i $\mathcal{L}(A)$ med $q \prec p$. Eftersom $U(p) \neq U(q)$ finns det entydigt bestämda reella tal C och D så att $CU(p) + D = V(p)$ och $CU(q) + D = V(q)$, och talet C är positivt beroende på att $U(p) > U(q)$ och $V(p) > V(q)$.

Låt nu $x \in \mathcal{L}(A)$ vara godtyckligt. Då är antingen $q \preceq x \preceq p$, $q \prec p \prec x$ eller $x \prec q \prec p$.

I det förstnämnda fallet finns det ett tal $\mu \in [0,1]$ så att $x \sim \mu p + (1-\mu)q$ varav följer att

$$\begin{aligned}V(x) &= V(\mu p + (1-\mu)q) = \mu V(p) + (1-\mu)V(q) \\ &= \mu(CU(p) + D) + (1-\mu)(CU(q) + D) \\ &= C(\mu U(p) + (1-\mu)U(q)) + D = C\,U(\mu p + (1-\mu)q) + D \\ &= CU(x) + D.\end{aligned}$$

I det andra fallet finns det istället ett tal μ med $0 < \mu < 1$ så att $p \sim \mu x + (1-\mu)q$ med slutsatserna $U(p) = \mu U(x) + (1-\mu)U(q)$ och $V(p) =$

$\mu V(x) + (1-\mu)V(q)$. Följaktligen är

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{\mu}(V(p) - V(q)) + V(q) = \frac{1}{\mu}(CU(p) - CU(q)) + CU(q) + D \\ &= CU(x) + D. \end{aligned}$$

Analogt visas att $V(x) = CU(x) + D$ också i det tredje fallet. □

Lemma 1.5.9 visar hur man kan definiera en affin nyttofunktion $\mu_{q,p}$ som representerar $\succeq$ på varje delintervall $\{x \in \mathcal{L}(A) \mid q \preceq x \preceq p\}$ av lotterimängden. Det enda som återstår är att visa hur man skarvar ihop dessa funktioner till en affin nyttofunktion U på hela $\mathcal{L}(A)$.

Fixera för den skull två element p_0, $p_1 \in \mathcal{L}(A)$ med $p_0 \prec p_1$, och låt p, q vara två godtyckliga element i $\mathcal{L}(A)$ med $q \preceq p_0 \prec p_1 \preceq p$. Genom att för $x \in \mathcal{L}(A)$ som uppfyller villkoret $q \preceq x \preceq p$ sätta

$$U_{q,p}(x) = \frac{\mu_{q,p}(x) - \mu_{q,p}(p_0)}{\mu_{q,p}(p_1) - \mu_{q,p}(p_0)}$$

får vi en affin nyttofunktion $U_{q,p}$ som representerar preferensrelationen $\succeq$ på intervallet $\{x \in \mathcal{L}(A) \mid q \preceq x \preceq p\}$ och har egenskapen att $U_{q,p}(p_0) = 0$ och $U_{q,p}(p_1) = 1$.

Om p', q' är två andra element i $\mathcal{L}(A)$ med $q' \preceq p_0 \prec p_1 \preceq p'$, så är förstås också $U_{q',p'}(p_0) = 0$ och $U_{q',p'}(p_1) = 1$, och det följer därför omedelbart av lemma 1.5.10 att $U_{q,p}(x) = U_{q',p'}(x)$ för alla x som tillhör snittet av de båda intervallen $\{x \in \mathcal{L}(A) \mid q \preceq x \preceq p\}$ och $\{x \in \mathcal{L}(A) \mid q' \preceq x \preceq p'\}$. Vi får därför en entydigt definierad funktion U genom att för varje $x \in \mathcal{L}(A)$ godtyckligt välja $p \succ q$ så att intervallet $\{x \in \mathcal{L}(A) \mid q \preceq x \preceq p\}$ innehåller såväl x som p_0 och p_1, och sedan definiera

$$U(x) = U_{q,p}(x).$$

Den på så sätt konstruerade funktionen U är ordningsbevarande och affin eftersom den har dessa egenskaper på varje delintervall av lotterimängden, och U är därför en nyttofunktion som representerar $\succeq$ på hela lotterimängden $\mathcal{L}(A)$.

Därmed är beviset för sats 1.5.2 komplett. □

Övningar

1.10 Visa att följande egenskap, som brukar kallas den *arkimediska egenskapen*, följer av kontinuitetsaxiomet: För alla lotterier p, q, $r \in \mathcal{L}(A)$ med egenskapen att $p \succ q \succ r$ finns det tal α, β i intervallet $]0,1[$ så att $\alpha p + (1-\alpha)r \succ q$ och $q \succ \beta p + (1-\beta)r$.

1.11 Ge exempel på en preferensrelation på $\mathcal{L}(A)$ som inte är av vNM-typ. [Ledning: Det räcker med två element i A.]

Kapitel 2

Strategiska spel

Strategiska spel är en speciell typ av icke-kooperativa spel. De fungerar som modell för beslutsfattande av flera personer, när varje person måste ta sitt beslut en gång för alla, oberoende av och utan kännedom om de andra personernas beslut. Modellen består av ett ändligt antal spelare och för varje spelare en mängd av möjliga handlingsalternativ. Spelarnas kombinerade val av handlingsalternativ kallas ett utfall, och varje spelares har sina preferenser för de olika möjliga utfallen. Detta skiljer strategiska spel från rena beslutsproblem, eftersom varje spelare måste ta med i beräkningen alla övriga spelares möjliga val, då han gör sitt val. I allmänhet finns det inte något absolut bästa handlingsalternativ för en given spelare. Spelteori ger därför sällan svar på frågan hur man ska agera i ett specifikt spel som spelas en gång. Fokus ligger istället på att beskriva olika jämviktslösningar, dvs. utfall med egenskapen att ingen spelare tjänar på att ensidigt avvika från sitt i utfallet ingående handlingsalternativ.

2.1 Definition och exempel

Den formella definitionen av ett strategiskt spel lyder som följer.

Definition 2.1.1 Ett *strategiskt spel* $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$ består av

- en ändlig mängd N av *spelare* − antalet spelare förutsätts vara minst två, och vi kommer att numrera dem 1,2, ..., n, vilket innebär att vi kommer att identifiera N med mängden $\{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- för varje spelare $i \in N$ en mängd A_i av möjliga *handlingar*;
- för varje spelare i en *preferensrelation* $\succeq_i$ på produktmängden

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Spelet kallas *ändligt* om A är en ändlig mängd (dvs. om alla A_i är ändliga).

Preferensrelationerna $\succeq_i$ definieras ofta av nyttofunktioner u_i, i spelteorisammanhang också kallade *utbetalningsfunktioner*, och vi använder då beteckningen $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ för spelet $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$.

Produktmängden $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ består per definition av alla n-tipler $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ av de olika spelarnas handlingar $a_i \in A_i$. Vi kommer att kalla sådana n-tipler av handlingar för *utfall*. Produktmängden A består således av alla möjliga utfall. Om mängderna A_i innehåller ν_i stycken element, så finns det förstås totalt $\nu_1\nu_2\cdots\nu_n$ möjliga utfall.

Den tredje egenskapen i definitionen av ett strategiskt spel betyder att en spelares preferensrelation (eller nyttofunktion) ska vara definierad på mängden av alla möjliga utfall. Eftersom en spelare bara kan kontrollera sina egna handlingar, är det därför i allmänhet omöjligt för en spelare att uppnå det för honom bästa utfallet. Vad som bör menas med en optimal lösning i ett strategiskt spel är därför annorlunda än i ett rent beslutsproblem, där beslutsfattaren har full kontroll över situationen. En av huvuduppgifterna i spelteorin är att ge olika förslag på lösningar som i någon mening kan anses vara optimala eller stabila.

Vi kommer huvudsakligen att studera ändliga strategiska spel och för det mesta att exemplifiera med tvåpersonersspel. För att definiera ett ändligt spel $\langle \{1,2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ med två spelare behöver man ange de båda handlingsmängderna $A_1 = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ och $A_2 = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ och nyttofunktionernas värden $\alpha_{ij} = u_1(r_i, k_j)$ och $\beta_{ij} = u_2(r_i, k_j)$ för alla utfall (r_i, k_j), och det gör man enklast med utbetalningstabeller av följande slag:

	k_1	k_2	$\cdots\cdots$	k_n
r_1	$(\alpha_{11}, \beta_{11})$	$(\alpha_{12}, \beta_{12})$	$\cdots\cdots$	$(\alpha_{1n}, \beta_{1n})$
r_2	$(\alpha_{21}, \beta_{21})$	$(\alpha_{22}, \beta_{22})$	$\cdots\cdots$	$(\alpha_{2n}, \beta_{2n})$
$\vdots$				
r_m	$(\alpha_{m1}, \beta_{m1})$	$(\alpha_{m2}, \beta_{m2})$	$\cdots\cdots$	$(\alpha_{mn}, \beta_{mn})$

Spelare 1 är alltså alltid den spelare som väljer rad och vi kommer därför ibland att kalla honom för *radspelaren*, och då blir förstås spelare 2 *kolonnspelaren*. Naturligtvis är namnen på elementen i mängderna A_1 och A_2 oväsentliga, så spelet är helt bestämt av de två $m \times n$ - matriserna $[\alpha_{ij}]$ och $[\beta_{ij}]$, som innehåller all information om de båda spelarnas nyttofunktioner. Matrisen $[\alpha_{ij}]$ är radspelarens *utbetalningsmatris* , och $[\beta_{ij}]$ är kolonnspelarens utbetalningsmatris.

Vi illustrerar nu begreppet strategiskt spel med några klassiska exempel.

Exempel 2.1.1 (*Fångarnas dilemma*) Vårt första exempel avser att illustrera en situation där det skulle löna sig att samarbeta men där bristande tillit kan få en part att avstå från den mest gynnsamma handlingen.

Två medlemmar i ett kriminellt gäng är häktade, båda misstänkta för ett grovt brott, och hålls isolerade från varandra. Det finns tillräckliga bevis för att fälla båda för ett mindre brott, men inte tillräckliga bevis för att fälla någon av dem för det grova brottet, såvida inte någon erkänner och kan användas som vittne mot den andra. Om båda nekar, kommer båda att dömas till 1 års fängelse för det mindre brottet. Om endast en av dem erkänner, så kommer han att användas som kronvittne och frisläppas, medan den andre döms till fem års fängelse. Om båda erkänner, kommer båda att dömas till tre års fängelse.

Vi kan modellera situationen som ett strategiskt spel på följande sätt. Spelarna är de två häktade, och båda har samma handlingsmängd, nämligen $\{Neka, Erkänn\}$. Detta innebär att det finns fyra möjliga utfall som spelare 1 rangordnar på följande vis

$$(Erkänn, Neka) \succ_1 (Neka, Neka) \succ_1 (Erkänn, Erkänn) \succ_1 (Neka, Erkänn)$$

eftersom han föredrar en så kort fängelsevistelse som möjligt. För spelare 2 gäller analogt

$$(Neka, Erkänn) \succ_2 (Neka, Neka) \succ_2 (Erkänn, Erkänn) \succ_2 (Erkänn, Neka).$$

En nyttofunktion u_1, som representerar spelare 1:s preferenser, ska alltså uppfylla

$$\begin{aligned} u_1(Erkänn, Neka) > u_1(Neka, Neka) > u_1(Erkänn, Erkänn) \\ > u_1(Neka, Erkänn), \end{aligned}$$

och vi får en funktion som uppfyller detta genom att exempelvis sätta

$$\begin{aligned} &u_1(Erkänn, Neka) = 0, && u_1(Neka, Neka) = -1, \\ &u_1(Erkänn, Erkänn) = -3, && u_1(Neka, Erkänn) = -5. \end{aligned}$$

För spelare 2 definierar vi analogt

$$\begin{aligned} &u_2(Neka, Erkänn) = 0, && u_2(Neka, Neka) = -1, \\ &u_2(Erkänn, Erkänn) = -3, && u_2(Erkänn, Neka) = -5. \end{aligned}$$

Spelet kan nu på ett kompakt sätt representeras av följande utbetalningstabell:

	Neka	*Erkänn*
Neka	$(-1,-1)$	$(-5,0)$
Erkänn	$(0,-5)$	$(-3,-3)$

Hur ska fånge 1, dvs. radspelaren, agera? Det bästa för honom är förstås att han erkänner och kolonnspelaren nekar, ty då slipper han straff. Men om fånge 2 också erkänner, så får han å andra sidan tre års fängelse. Kanske är det bäst för fånge 1 att neka i hopp om att fånge 2 också nekar, eftersom de i så fall bara får ett år vardera som straff. Men kan fånge 1 verkligen lita på fånge 2 som riskerar fem års fängelsestraff genom att neka. Så fånge 2 kanske erkänner, och då måste fånge 1 istället sitta fem år i fängelse genom att neka istället för att erkänna. Båda spelarna står förstås inför samma dilemma. □

Nästa enkla exemplet tjänar som modell för situationer där spelare med motstridiga intressen skulle vinna på att koordinera sina handlingar, men där de genom att inte kunna kommunicera med varandra riskerar att hamna i ogynnsamma utfall.

Exempel 2.1.2 (*Kampen mellan könen*) Ett par har kommit överens om att träffas efter jobbet, men båda har glömt om de hade bestämt sig för att gå på konsert eller på fotboll. Kvinnan (spelare 1) skulle föredra konserten medan mannen (spelare 2) helst vill se fotbollsmatchen. Båda föredrar dock att vara tillsammans på samma evenemang framför att gå till olika platser, och om de hamnar på olika ställen är båda indifferenta mellan att gå på konserten eller att se fotbollsmatchen. Vart ska de gå om de inte kan kommunicera med varandra?

Deras dilemma kan modelleras som ett strategiskt spel, där båda spelarna har $\{Konsert, Fotboll\}$ som sina handlingsmängder, och där utbetalningarna ges av följande tabell:

	Konsert	*Fotboll*
Konsert	$(2,1)$	$(0,0)$
Fotboll	$(0,0)$	$(1,2)$

I situationer där parterna har möjlighet att samråda, så enas de förstås om att bevista samma evenemang. Kanske krävs det då lottdragning eller löfte om att göra tvärtom nästa gång för att de ska enas om vart de ska gå. Utan samrådsmöjligheter finns det emellertid inga garantier för att de inte hamnar i ett utfall som båda tycker sämst om. □

Exempel 2.1.3 (*Krona eller klave*) Två personer väljer samtidigt en sida av ett mynt, dvs. *krona* eller *klave*. Om båda väljer samma sida får person 1 en krona av person 2, och om de valda sidorna är olika får istället person 2 en krona av person 1. Båda personerna bryr sig bara om hur mycket pengar de får, vilket innebär att deras preferenser beskrivs av följande nyttofunktioner:

$$u_1(Kr, Kr) = u_1(Kl, Kl) = 1, \;\; u_1(Kr, Kl) = u_1(Kl, Kr) = -1$$
$$u_2(Kr, Kr) = u_2(Kl, Kl) = -1, \;\; u_2(Kr, Kl) = u_2(Kl, Kr) = 1.$$

Hela spelet definieras nu av tabellen

	Kr	*Kl*
Kr	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Kl	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

I det här spelet är spelarnas intressen diametralt motsatta; spelare 1 vill välja samma alternativ som spelare 2, medan spelare 2 vill välja det motsatta alternativet. □

Exempel 2.1.4 (*Hök eller duva*) Två djur slåss om ett byte. Båda djuren kan vara aggressiva (hökaktiga) eller passiva (duvlika). Vardera djuret föredrar att vara hökaktig om motståndaren är duvlik och duvlik om motståndaren är hökaktig. Oberoende av det egna tillståndet föredrar vardera djuret också att motståndaren är duvlik framför att den är hökaktig.

Situationen kan formuleras som ett strategiskt spel med de båda kombattanterna som spelare och nyttofunktioner som uppfyller

$$u_1(H, D) > u_1(D, D) > u_1(D, H) > u_1(H, H)$$
$$u_2(D, H) > u_1(D, D) > u_1(H, D) > u_1(H, H),$$

och ett exempel på utbetalningar som uppfyller detta ges av följande tabell:

	Hök	*Duva*
Hök	$(0, 0)$	$(3, 1)$
Duva	$(1, 3)$	$(2, 2)$

□

Filosofen Jean-Jaques Rousseau har beskrivit konflikten mellan indivuell säkerhet och socialt samarbete med hjälp av följande exempel.

Exempel 2.1.5 (*Hjortjakten*) Ett jaktlag går på jakt i en skog, där det vimlar av harar och där det också finns en ståtlig hjort. Varje jägare i laget kan välja om han vill jaga harar eller jaga hjorten, och han gör sitt val utan att veta hur de andra jägarna gör. Om alla i laget är inriktade på hjortjakt, så lyckas de också skjuta hjorten, som delas lika mellan jägarna, men om en enda jägare ägnar sig åt harjakt, undkommer hjorten. Varje jägare som ägnar sig åt harjakt lyckas också skjuta en hare som han får behålla själv. Varje jägare föredrar dock en andel av hjorten framför en egen hare.

Vi kan modellera jakten som ett strategiskt spel, där spelarna är de n jägarna i jaktlaget och varje spelares handlingsmängd är $\{Hjort, Hare\}$.

Varje jägare föredrar att samtliga jägare ägnar sig åt hjortjakt framför att han skjuter en hare, är indifferent mellan vad de andra gör om han skjuter en hare, föredrar att skjuta en hare framför att jaga hjort om någon annan skjuter en hare, samt är indifferent inför alla alternativ där han jagar hjort och någon annan jägare skjuter en hare (eftersom han inte får något byte i dessa fall). Detta innebär att jägare 1:s preferenser har formen

$$\begin{aligned}(\mathit{Hj}, \mathit{Hj}, \dots, \mathit{Hj}) \succ_1 (\mathit{Ha}, X_2, \dots, X_n) \sim_1 (\mathit{Ha}, Y_2, \dots, Y_n) \succ_1 (\mathit{Hj}, Z_2, \dots, Z_n)\\ \sim_1 (\mathit{Hj}, W_2, \dots, W_n)\end{aligned}$$

där $X_2, \dots, X_n$ och $Y_2, \dots, Y_n$ är godtyckligt valda bland *Hjort* och *Hare*, och minst en av $Z_2, \dots, Z_n$ och minst en av $W_2, \dots, W_n$ är *Hare*.

I fallet med två jägare representeras det strategiska spelet av följande utbetalningstabell:

	Hjort	*Hare*
Hjort	$(2, 2)$	$(0, 1)$
Hare	$(1, 0)$	$(1, 1)$

Hjortjakten är, i likhet med Fångarnas dilemma, ett exempel på en situation där det lönar sig att samarbeta, men där bristande tillit kan få en part att överge det bästa alternativet för att tillförsäkra sig det som denne kan åstadkommas på egen hand. □

2.2 Nashjämvikt

Vilket handlingsalternativ ska en spelare i ett konkret strategiskt spel välja för att maximera sin nytta? Problemet är förstås att vad som är bäst för en spelare beror på de andra spelarnas val. En spelare som vill maximera sin nytta måste därför ha en uppfattning om hur de andra spelarna kommer att spela. Men uppfattningar om de andra spelarna ingår inte i spelreglerna, som ju enbart stipulerar att spelarnas handlingsmängder och preferenser är allmän kunskap.

Spelteori ger därför i allmänhet inga svar på frågan hur en spelare ska agera i ett strategiskt spel som endast spelas en gång. Det spelteori kan bidraga med är istället att peka på utfall med speciella egenskaper, till exempel utfall som är stabila i den meningen att ingen spelare kan vinna på att ensidigt avvika från den handling som ingår i utfallet. Detta stabila utfall är den berömda Nashjämvikten, som vi nu ska definiera formellt.

Definition 2.2.1 Låt $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$ vara ett strategiskt spel med n spelare. Ett utfall $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ kallas en *Nashjämvikt* eller *Nashlösning* om ingen spelare tjänar på att ensidigt byta ut sin handling i utfallet a^* mot någon annan handling i sin handlingsmängd, dvs. om det för varje spelare i och varje handling $a_i \in A_i$ gäller att

$$a^* = (a^*_{-i}, a^*_i) \succeq_i (a^*_{-i}, a_i).$$

Som framgår av exemplen nedan finns det strategiska spel som saknar Nashlösningar och spel som har flera Nashlösningar.

Exempel 2.2.1 (*Fångarnas dilemma*) I spelet

	Neka	*Erkänn*
Neka	$(-1,-1))$	$(-5,0)$
Erkänn	$(0,-5)$	$(-3,-3)$

är handlingsvektorn (*Erkänn*, *Erkänn*) en Nashlösning. Det gäller nämligen att

$$u_1(\mathit{Erkänn}, \mathit{Erkänn}) = -3 > -5 = u_1(\mathit{Neka}, \mathit{Erkänn}) \qquad \text{och}$$
$$u_2(\mathit{Erkänn}, \mathit{Erkänn}) = -3 > -5 = u_2(\mathit{Erkänn}, \mathit{Neka}).$$

Ingen fånge tjänar på att ensidigt avvika från alternativet (*Erkänn*, *Erkänn*).

Genom att undersöka de övriga alternativen ser vi att Nashlösningen är unik. Handlingsvektorn (*Neka*, *Neka*) är inte en Nashlösning, trots att den är bättre än alternativet (*Erkänn*, *Erkänn*) för båda fångarna, ty fånge 1 vinner på att ensidigt byta till *Erkänn*. Inte heller (*Neka*, *Erkänn*) är en Nashlösning; fånge 1 vinner på att byta till *Erkänn*.

Fångarnas dilemma illustrerar att en Nashlösning inte behöver vara kollektivt bäst. Alternativet (*Neka*, *Neka*), som ger båda fångarna ett års fängelse, är uppenbarligen bättre än Nashlösningen, som resulterar i tre års fängelse, och om fångarna tillåts samarbeta, skulle de naturligtvis välja det förstnämnda alternativet. □

Exempel 2.2.2 (*Kampen mellan könen*) Spelet

	Konsert	*Fotboll*
Konsert	$(2,1)$	$(0,0)$
Fotboll	$(0,0)$	$(1,2)$

har två Nashlösningar, nämligen (*Konsert*, *Konsert*) och (*Fotboll*, *Fotboll*). Den första lösningen är bäst för radspelaren och den andra för kolonnspelaren, och båda Nashlösningarna är bättre för båda spelarna än de återstående två utfallen. Båda spelarna är naturligtvis medvetna om detta faktum men utan ytterligare information är det ändå omöjligt för dem att koordinera sina handlingar så att de hamnar i en av de två Nashlösningarna. Liknande problem uppstår ofta i spel som har flera Nashlösningar. □

Exempel 2.2.3 (*Krona eller klave*) Spelet

	Kr	*Kl*
Kr	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Kl	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

saknar Nashjämvikter. Utfallet (Kr, Kr) är inte en Nashlösning eftersom spelare 2 vinner på att byta *Kr* mot *Kl*, utfallet (Kr, Kl) är inte en Nashlösning eftersom spelare 1 nu vinner på att byta från *Kr* till *Kl*, utfallet (Kl, Kl) är inte en Nashlösning, ty nu vinner spelare 2 på att byta från *Kl* till *Kr*, och utfallet (Kl, Kr) är inte heller en Nashlösning eftersom spelare 1 tjänar på att byta från *Kl* till *Kr*. □

Exempel 2.2.4 (*Hjortjakten*) Hjortjakten i exempel 2.1.5 (med n jägare) har två Nashlösningar, nämligen $(Hj, Hj, \dots, Hj)$ och $(Ha, Ha, \dots, Ha)$, dvs. antingen ska alla ägna sig åt hjortjakt eller också ska alla skjuta hare. Att ingen kan vinna på att ensidigt avvika från den första lösningen är uppenbart – den som gör så och skjuter en hare förlorar sin andel i hjorten, som han föredrar framför haren. Ingen tjänar heller på att ensidigt avvika från den andra lösningen – den som gör så mister sin hare och får ingenting, eftersom en ensam jägare inte kan fälla hjorten.

Att det inte finns några andra Nashlösningar är också lätt att inse. I ett utfall av typen $(X_1, \dots, X_{i-1}, Hj, X_{i+1}, \dots, X_n)$, där den i:te jägaren ägnar sig åt hjortjakt och minst en av de övriga jägarna ägnar sig åt harjakt (dvs. något $X_k = Ha$) får jägare i ingenting, så han tjänar på att byta till *Ha*, dvs. harjakt. Ifrågavarande utfall är därför inte en Nashlösning. □

Vi ska nu ge en användbar alternativ karakterisering av begreppet Nashjämvikt. Om alla spelare utom spelare i annonserar sina val av handlingar i förväg, så är förstås spelare i:s problem ett rent beslutsproblem – givet att de andra spelarna valt a_{-i} är hans bästa svar att välja ett element i A_i som är maximalt med avseende på restriktionen av preferensrelationen $\succeq_i$ till mängden $\{a_{-i}\} \times A_i$. Detta motiverar begreppet bästasvarsmängd, som definieras på följande vis.

Definition 2.2.2 Låt a_{-i} vara en handlingsvektor för samtliga spelare utom spelare i i det strategiska spelet $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$. Mängden

$$B_i(a_{-i}) = \{x_i \in A_i \mid (a_{-i}, x_i) \succeq_i (a_{-i}, y_i) \text{ för alla } y_i \in A_i\}$$

kallas *bästasvarsmängden* för spelare i givet de andra spelarnas val a_{-i}.

Den mängdvärda funktionen B_i, med A_{-i} som definitionsmängd, kallas spelare i:s *bästasvarsfunktion.*

Spelare i:s bästasvarsmängd $B_i(a_{-i})$ består med andra ord av de handlingar $x_i \in A_i$ som gör utfallet (a_{-i}, x_i) till ett maximalt element i mängden $\{a_{-i}\} \times A_i$ med avseende på spelarens preferensrelation $\succeq_i$.

I ett ändligt spel är självklart samtliga bästasvarsmängder icke-tomma. Det följer vidare av sats 1.2.4 att samtliga spelares bästasvarsmängder är icke-tomma i spel där preferensrelationerna $\succeq_i$ är kontinuerliga och handlingsmängderna A_i är kompakta.

Med hjälp av bästasvarsmängder kan vi nu karakterisera Nashjämvikter på följande enkla sätt.

Sats 2.2.1 *Ett utfall a^* i ett strategiskt spel är en Nashjämvikt om och endast om det för varje spelare i gäller att*

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*).$$

Bevis. En Nashjämvikt a^* karakteriseras nämligen av att för varje spelare i är handlingen a_i^* bäst givet att de andra spelarna valt handlingsvektorn a_{-i}^*. □

Exempel 2.2.5 (*Hök eller duva*) För spelet med utbetalningstabellen

	Hök	*Duva*
Hök	$(0,0)$	$(3,1)$
Duva	$(1,3)$	$(2,2)$

ser bästasvarsmängderna ut så här:

$$\begin{aligned} B_1(\textit{Hök}) &= \{\textit{Duva}\}, \;\; B_1(\textit{Duva}) = \{\textit{Hök}\} \\ B_2(\textit{Hök}) &= \{\textit{Duva}\}, \;\; B_2(\textit{Duva}) = \{\textit{Hök}\}. \end{aligned}$$

Utfallet $(\textit{Duva}, \textit{Hök})$ är en Nashjämvikt eftersom

$$\textit{Duva} \in B_1(\textit{Hök}) \qquad \text{och} \qquad \textit{Hök} \in B_2(\textit{Duva}).$$

Analogt fås att $(\textit{Hök}, \textit{Duva})$ är en Nashjämvikt. Däremot är inte $(\textit{Hök}, \textit{Hök})$ en Nashjämvikt, ty $\textit{Hök} \notin B_1(\textit{Hök})$.

I en Nashjämvikt ska således en av slagskämparna vara hökaktig och den andra vara duvlik och dra sig ur striden. Precis som i spelet Kampen mellan könen förefaller det oklart hur slagskämparna ska kunna uppnå ett Nashjämviktsläge. I naturen brukar detta dock lösas automatiskt − efter några kamper är hackordningen etablerad, och då vet kombattanterna vem som är duvlik och vem som är hökaktig. □

Karakteriseringen i sats 2.2.1 ger upphov till en enkel algoritm för att bestämma samtliga Nashjämvikter i ändliga tvåpersonersspel. Ett exempel klargör situationen.

Exempel 2.2.6 Betrakta spelet

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
r_1	$(2,1)$	$(4,3)$	$(7,2)$	$(7,4)$	$(0,5)$	$(3,2)$
r_2	$(4,0)$	$(5,4)$	$(1,6)$	$(0,4)$	$(0,3)$	$(5,1)$
r_3	$(1,3)$	$(5,3)$	$(3,2)$	$(4,1)$	$(1,0)$	$(4,3)$
r_4	$(4,3)$	$(2,5)$	$(4,0)$	$(1,0)$	$(1,5)$	$(2,1)$

Radspelarens bästa svar om kolonnspelaren väljer k_1 är r_2 eller r_4. Vi markerar detta genom att i tabellen sätta en asterisk efter $u_1(r_2, k_1)$ och $u_1(r_4, k_1)$, dvs. efter de maximala 4-orna. Radspelarens bästa svar om kolonnspelaren väljer k_2 är r_2 eller r_3, och vi sätter därför en asterisk efter motsvarande utbetalningar $u_1(r_2, k_2)$ och $u_1(r_3, k_2)$ i kolumn nummer 2, osv.

På motsvarande sätt är k_5 kolonnspelarens bästa svar om radspelaren väljer r_1, ty k_5 maximerar funktionen $y \mapsto u_2(r_1, y)$. Vi sätter därför också en asterisk efter $u_2(r_1, k_5)$, dvs efter 5-an i rad 1 och kolumn 5, osv. Vår algoritm resulterar i följande tabell:

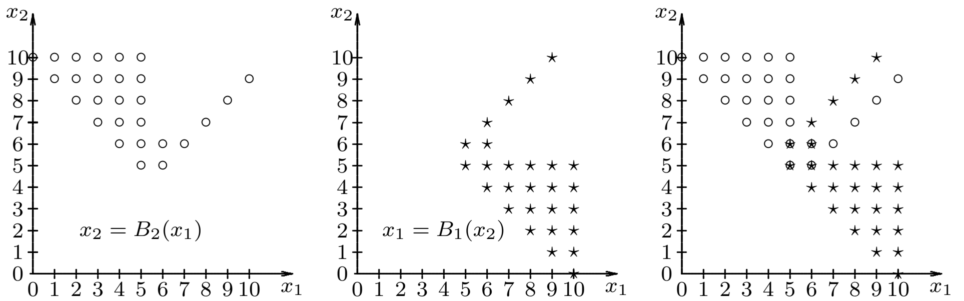
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
r_1	$(2,1)$	$(4,3)$	$(7^*,2)$	$(7^*,4)$	$(0,5^*)$	$(3,2)$
r_2	$(4^*,0)$	$(5^*,4)$	$(1,6^*)$	$(0,4)$	$(0,3)$	$(5^*,1)$
r_3	$(1,3^*)$	$(5^*,3^*)$	$(3,2)$	$(4,1)$	$(1^*,0)$	$(4,3^*)$
r_4	$(4^*,3)$	$(2,5^*)$	$(4,0)$	$(1,0)$	$(1^*,5^*)$	$(2,1)$

När vi är klara ser vi att det finns två utbetalningspar med dubbla asterisker, nämligen $(5,3)$ och $(1,5)$. De dubbla asteriskerna på $(5,3)$ betyder att r_3 är radspelarens bästa svar om kolonnspelaren väljer k_2, och k_2 är kolonnspelarens bästa svar om radspelaren väljer r_3, dvs. (r_3, k_2) är en Nashjämvikt. Analogt är (r_4, k_5) en Nashjämvikt, och det finns inte några andra Nashjämvikter. $\square$

Exempel 2.2.7 (*Dela pengar*) Två personer har 10 kr som de ska dela på och enas om att använda följande procedur. Var och en av dem anger det belopp han vill ha genom att skriva ned ett heltal i intervallet $[0, 10]$ på ett papper. Om summan av de två talen inte överstiger 10, så får båda det belopp som de angivit, och resterande belopp förstörs. Om summan är större än 10 och talen är olika, får den person som angivit det minsta talet motsvarande belopp och den andra personen får resten. Om summan är större än tio och de nedskrivna talen är lika, får båda personerna 5 kr var.

De två personernas bästasvarsfunktionern B_1 och B_2 är identiska och ges av att

$$B_i(0) = \{10\}, B_i(1) = \{9, 10\}, B_i(2) = \{8, 9, 10\}, B_i(3) = \{7, 8, 9, 10\},$$
$$B_i(4) = \{6, 7, 8, 9, 10\}, B_i(5) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$
$$B_i(6) = \{5, 6\}, B_i(7) = \{6\}, B_i(8) = \{7\}, B_i(9) = \{8\}, B_i(10) = \{9\}.$$



Figur 2.1. Den vänstra delen visar grafen till bästasvarsfunktionen för person 2, den mellersta delen visar bästasvarsfunktionen för person 1, och den högra delen visar båda graferna.

Graferna till de två bästasvarsfunktionerna B_2 och B_1 visas i den vänstra och mellersta delen av figur 2.1. Den högra delen innehåller båda graferna och visar att skärningen mellan de två består av de fyra punkterna $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$ och $(6, 6)$. Eftersom en punkt (x_1, x_2) ligger i skärningen av de två graferna om och endast om $x_1 \in B_1(x_2)$ och $x_2 \in B_2(x_1)$, betyder detta att $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$ och $(6, 6)$ är spelets fyra Nashjämvikter. □

Övningar

2.1 Två barn leker Sten-sax-påse. (Påse vinner över sten, sten vinner över sax och sax vinner över påse.) Formulera leken som ett strategiskt spel och bestäm eventuella Nashjämvikter.

2.2 Bestäm spelarnas bästasvarsmängder i spelen Fångarnas dilemma, Krona eller klave och Hjortjakten, samt verifiera med hjälp av dem att Nashjämvikterna är de som beräknats i exemplen ovan.

2.3 Bestäm Nashjämvikterna till följande spel

	k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	$(-3, -4)$	$(2, -1)$	$(0, 6)$	$(1, 1)$
r_2	$(2, 0)$	$(2, 2)$	$(-3, 0)$	$(1, -2)$
r_3	$(2, -3)$	$(-5, 1)$	$(-1, -1)$	$(1, -3)$
r_4	$(-4, 3)$	$(2, -5)$	$(1, 2)$	$(-3, 1)$

2.4 Ett utfall $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ kallas en *strikt Nashjämvikt* i spelet $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$ om det för varje spelare i och varje $a_i \neq a_i^*$ i spelarens handlingsmängd A_i gäller att

$$(a_{-i}^*, a_i^*) \succ_i (a_{-i}^*, a_i).$$

Har spelet

	V	M	H
T	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$
B	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$

någon strikt Nashjämvikt? Har det någon Nashjämvikt?

2.5 *Gissa 2/3 av medelvärdet* är ett spel där var och en av n spelare väljer ett reellt tal i intervallet $[0, 100]$, och 1000 kronor delas lika mellan de spelare vars valda tal ligger närmast 2/3 av medelvärdet av de n valda talen. Visa att spelets unika Nashlösning består i att samtliga spelare väljer talet 0.

2.6 Bestäm Nashlösningarna till Gissa 2/3 av medelvärdet-spelet om spelarna bara får välja heltal i intervallet $[0, 100]$.

2.3 Existens av Nashjämvikt

Ett strategiskt spel behöver inte ha någon Nashjämvikt, vilket t.ex. spelet Krona eller klave är exempel på. Det finns emellertid viktiga typer av ändliga spel som alltid har Nashjämvikter, och ett exempel på en sådan typ av spel är extensiva spel med perfekt information, en klass av spel som vi kommer att studera i kapitel 8.

I det här avsnittet ska vi presentera en existenssats av Nash. Satsen är inte direkt tillämpbar på ändliga spel eftersom handlingsmängderna förutsätts vara konvexa i Nashs sats, och ändliga mängder är förstås inte konvexa om de består av mer än en punkt. Nashs sats kan emellertid tillämpas på den s. k. blandade utvidgningen av ett ändligt spel. I den blandade utvidgningen av ett ändligt spel är handlingsmängderna lotterimängder, och dessa är konvexa och kompakta. Blandade utvidgningar kommer att studeras i nästa kapitel.

För att kunna formulera Nashs sats behöver vi först några nya begrepp. Vi påminner då först om att en delmängd X av $\mathbf{R}^n$ kallas *konvex* om den för varje par av punkter som ligger i mängden också innehåller hela sträckan mellan punkterna, dvs. om implikationen

$$x, y \in X,\ 0 < \alpha < 1 \ \Rightarrow\ \alpha x + (1-\alpha)y \in X$$

gäller.

Med hjälp av konvexitetsbegreppet för mängder kan vi nu enkelt definiera en viktig egenskap som vissa nyttofunktioner och preferensrelationer har.

Definition 2.3.1 Låt X vara en konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$. En funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ kallas *kvasikonkav* om mängderna

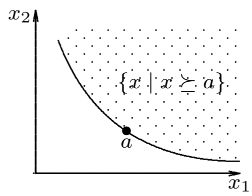
$$\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$$

är konvexa för alla $t \in \mathbf{R}$.

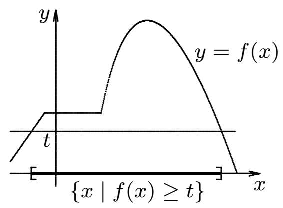
En preferensrelation $\succeq$ på X kallas *kvasikonkav* om mängderna

$$\{x \in X \mid x \succeq a\}$$

är konvexa för alla $a \in X$.



Figur 2.2. En preferensrelation $\succeq$ är kvasikonkav om samtliga mängder av typen $\{x \mid x \succeq a\}$ är konvexa.



Figur 2.3. Figuren visar grafen till en kvasikonkav envariabelfunktion f. Mängderna $\{x \mid f(x) \geq t\}$ är intervall eller tomma för alla t.

Sats 2.3.1 *Preferensrelationer $\succeq$ med kvasikonkava nyttofunktioner u är kvasikonkava.*

Bevis. Påståendet följer direkt av kvasikonkavitetsdefinitionen och sambandet

$$\{x \in X \mid x \succeq a\} = \{x \in X \mid u(x) \geq u(a)\}. \qquad \square$$

Sats 2.3.2 *Antag att X är en konvex och kompakt delmängd av $\mathbf{R}^n$ och att $\succeq$ är en kontinuerlig och kvasikonkav preferensrelation på X. Då är mängden av maximala element till preferensrelationen icke-tom, konvex och kompakt.*

Bevis. Mängden M av maximala element är icke-tom enligt sats 1.2.4. Om m är ett maximalt element så är vidare $M = \{x \in X \mid x \succeq m\}$, varför det följer av definition 2.3.1 att M är konvex och av sats 1.2.1 att M är sluten, och en sluten delmängd av en kompakt mängd är kompakt. $\square$

Vi har nu de begrepp som behövs för att kunna formulera Nashs sats.

Sats 2.3.3 (Nashs sats) *Antag att $\langle N, (A_i), (\succeq_i) \rangle$ är ett strategiskt spel och att följande villkor är uppfyllda:*

- *Varje handlingsmängd A_i är en konvex, kompakt delmängd av något $\mathbf{R}^{n_i}$.*
- *Preferensrelationerna $\succeq_i$ är kontinuerliga.*
- *För varje spelare i och varje utfall $a \in A$ är restriktionen av spelarens preferensrelation $\succeq_i$ till mängden $\{a_{-i}\} \times A_i$ kvasikonkav.*

Då har spelet en Nashjämvikt.

Anmärkning. Det sista antagandet i satsen betyder att mängderna

$$\{(a_{-i}, x_i) \in A \mid (a_{-i}, x_i) \succeq_i a\}$$

är konvexa delmängder till $\{a_{-i}\} \times A_i$ för varje utfall a, och detta gäller om och endast om mängderna $\{x_i \in A_i \mid (a_{-i}, x_i) \succeq_i a\}$ är konvexa delmängder till A_i för varje $a \in A$.

Bevis. Vi börjar med att konstatera att det följer av sats 2.3.2 att mängden M av alla maximala element (a_{-i}, m_i) i $\{a_{-i}\} \times A_i$ till preferensrelationen $\succeq_i$ är en icke-tom konvex, kompakt delmängd av $\{a_{-i}\} \times A_i$. Spelare i:s bästasvarsmängd $B_i(a_{-i})$, som är lika med projektionen av M på den i:te faktorn A_i, är därför också icke-tom, konvex och kompakt.

Sätt nu som brukligt $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ och definiera en avbildning ϕ från A till mängden $\mathcal{P}(A)$av alla delmängder av A genom att sätta

$$\phi(a) = B_1(a_{-1}) \times B_2(a_{-2}) \times \cdots \times B_n(a_{-n}).$$

En Nashjämvikt är på grund av sats 2.2.1 en punkt $a^* \in A$ som har egenskapen att $a^* \in \phi(a^*)$, och en sådan punkt kallas en *fixpunkt* till avbildningen ϕ. För att bevisa existensen av en fixpunkt till ϕ kommer vi att använda oss av Kakutanis fixpunktssats, som formuleras längre ner och bevisas i appendix 2.

Vi konstaterar för den skull att

1. A är en icke-tom, kompakt, konvex delmängd av något $\mathbf{R}^m$.
2. För alla $a \in A$ är $\phi(a)$ en icke-tom konvex delmängd av A.
3. Avbildningen ϕ har en *sluten graf*, dvs. mängden

$$G = \{(a, b) \mid a \in A \text{ och } b \in \phi(a)\}$$

   är sluten.

Påstående 1 följer av att varje faktor A_i är kompakt och konvex, och påstående 2 följer av att varje faktor $B_i(a_{-i})$ i definitionen av $\phi(a)$ är icketom och konvex.

En mängd är sluten om och endast om gränsvärdet till varje konvergent följd av punkter i mängden också ligger i mängden, så för att bevisa påstående 3 antar vi att $\big((a^k, b^k)\big)_1^\infty$ är en konvergent punktföljd i grafen G med gränsvärde (a, b). Detta betyder att $a^k \in A$ och $b_k \in \phi(a^k)$ för alla k, samt att $a^k \to a$ och $b^k \to b$ då $k \to \infty$. Eftersom mängden A är sluten ligger gränsvärdet a i A. För varje spelare i tillhör vidare b_i^k per definition den i:te spelarens bästasvarsmängd $B_i(a_{-i}^k)$, vilket innebär att

$$(a_{-i}^k, b_i^k) \succeq_i (a_{-i}^k, y_i)$$

för alla $y_i \in A_i$. Genom att låta $k \to \infty$ i relationen ovan får vi på grund av kontinuitet att

$$(a_{-i}, b_i) \succeq_i (a_{-i}, y_i)$$

för alla $y_i \in A_i$, vilket visar att $b_i \in B_i(a_{-i})$ för alla i och att följaktligen $b \in \phi(a)$. Så gränspunkten (a, b) ligger i G och därmed är påstående 3 bevisat.

Existensen av en fixpunkt till avbildningen ϕ följer nu omedelbart av Kakutanis fixpunktssats, som lyder som följer.

Sats 2.3.4 (Kakutanis fixpunktssats) *Antag att ϕ är en mängdvärd avbildning som är definierad på en icke-tom delmängd X av $\mathbf{R}^n$ och att följande villkor är uppfyllda:*

- *X är en kompakt, konvex mängd;*
- *$\phi(x)$ är en icke-tom konvex delmängd av X för alla $x \in X$;*
- *avbildningen ϕ har en sluten graf.*

Då har ϕ en fixpunkt, dvs. det finns ett $x^* \in X$ sådant att $x^* \in \phi(x^*)$.

Kakutanis fixpunktssats bevisas i appendix 2. □

Som ytterligare exempel på hur Kakutanis fixpunktssats kan användas visar vi ett resultat för symmetriska spel.

Definition 2.3.2 Ett strategiskt spel $\langle\{1, 2\}, (A_i), (\succeq_i)\rangle$ för två personer kallas *symmetriskt* om $A_1 = A_2$ och

$$(a_1, a_2) \succeq_1 (b_1, b_2) \;\Leftrightarrow\; (a_2, a_1) \succeq_2 (b_2, b_1)$$

för alla (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$.

I ett symmetriskt spel har således båda spelarna samma handlingsmängder, och spelare 1 värderar utfallet (a_1, a_2) på samma sätt som spelare 2 värderar utfallet (a_2, a_1). Om preferenserna representeras av nyttofunktioner u_1 och u_2 kan vi därför anta att $u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$ för alla handlingspar (a_1, a_2). För spelarnas bästasvarsmängder gäller att $B_1(x) = B_2(x)$ för alla $x \in A_1$.

Sats 2.3.5 *Betrakta ett symmetriskt strategiskt tvåpersonersspel, och antag att de båda spelarnas gemensamma handlingsmängd A är konvex och kompakt, att spelare 1:s preferensrelation $\succeq_1$ är kontinuerlig samt att restriktionen av preferensrelationen till mängden $A \times \{a\}$ är kvasikonkav för alla handlingar $a \in A$. Då har spelet en* symmetrisk Nashjämvikt*, dvs. en Nashjämvikt av typen (a^*, a^*).*

Bevis. Låt ϕ vara den mängdvärda avbildning som är definierad på handlingsmängden A av att $\phi(a) = B_1(a)$ för alla $a \in A$, där $B_1(a)$ är spelare 1:s bästasvarsmängd när spelare 2 väljer handlingen a. Avbildningen ϕ uppfyller förutsättningarna i Kakutanis fixpunktssats och har därför en fixpunkt a^*. Eftersom spelet är symmetriskt innebär $a^* \in B_1(a^*)$ att utfallet (a^*, a^*) är en Nashjämvikt. □

Övningar

2.7 Är den lexikografiska ordningen på $\mathbf{R}^2$ kvasikonkav?

2.8 Avgör om följande mängdvärda avbildningar ϕ, definierade på intervallet $[0,1]$, har slutna grafer.

a) $\phi(x) = [0,x]$

b) $\phi(x) = [0,x[$

c) $\phi(x) = \begin{cases} [0,x] & \text{om } 0 \le x < 1, \\ \{0\} & \text{om } x = 1 \end{cases}$

d) $\phi(x) = \begin{cases} [\frac{3}{4},1] & \text{om } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ [x,1] & \text{om } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

e) $\phi(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{om } x = 0, \\ \{\sin\frac{1}{x}\} & \text{om } 0 < x \le 1 \end{cases}$

f) $\phi(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{om } x = 0, \\ \{\sin\frac{1}{x}\} & \text{om } 0 < x \le 1 \end{cases}$

2.4 Maxminimering

I varje ändligt spel med preferenser givna av nyttofunktioner finns det för varje spelare en nyttonivå, spelarens säkerhetsnivå, som spelaren garanterat minst kan få, oavsett hur motspelarna spelar.

Exempel 2.4.1 Betrakta spelet

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
r_1	$(2,1)$	$(4,3)$	$(7,2)$	$(7,4)$	$(0,5)$	$(3,2)$
r_2	$(4,0)$	$(5,4)$	$(1,6)$	$(0,4)$	$(0,3)$	$(5,1)$
r_3	$(1,3)$	$(5,3)$	$(3,2)$	$(4,1)$	$(1,0)$	$(4,3)$
r_4	$(4,3)$	$(2,5)$	$(4,0)$	$(1,0)$	$(1,5)$	$(2,1)$

från exempel 2.2.6 och låt oss studera vad utfallet blir för spelare 2, om han är extremt pessimistisk och utgår ifrån att vad han än gör, så har motspelaren valt det för honom värsta alternativet.

Om spelare 2 väljer k_1 så är sämsta utfallet 0, väljer han k_2 är sämsta utfallet 3, alternativen k_3, k_4 och k_5 ger som minst 0 och alternativet k_6 ger som minst 1. Genom att välja k_2 har spelare 2 garanterat sig en utdelning av minst 3 nyttoenheter, oberoende av vad spelare 1 gör, och det är också den bästa garanterade nivån. Talet 3 är därför spelarens säkerhetsnivå, och handlingen k_2, som garanterar honom säkerhetsnivån, kallas spelarens maxminhandling. Handlingen k_2 maximerar funktionen

$$f_2(y) = \min_{x \in A_1} u_2(x,y).$$

Analogt finner vi spelare 1:s säkerhetsnivå och maxminhandling genom att maximera funktionen

$$f_1(x) = \min_{y \in A_2} u_1(x,y)$$

över alla $x \in A_1$. Spelare 1 har två maxminhandlingar, nämligen r_3 och r_4, som båda garanterar honom nyttan 1, som är spelare 1:s säkerhetsnivå.

Om båda spelarna väljer sina maxminhandlingar, dvs. handlingsvektorn (r_3, k_2) eller handlingsvektorn (r_4, k_2), så blir nyttoutfallet $(5, 3)$ resp. $(2, 5)$, som för spelare 1:s del i båda fallen är bättre än hans säkerhetsnivå, och som för spelare 2:s del är bättre än hans säkerhetsnivå i det andra fallet. □

Resonemanget i exempel 2.4.1 kan generaliseras och leder till följande allmänna definition.

Definition 2.4.1 Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett strategiskt spel och definiera för varje spelare i funktionen f_i på A_i genom att sätta

$$f_i(a_i) = \inf\{u_i(x_{-i}, a_i) \mid x_{-i} \in A_{-i}\}.$$

Kvantiteten

$$\ell_i = \sup\{f_i(a_i) \mid a_i \in A_i\}$$

kallas *säkerhetsnivån* för spelare i. Om det finns en handling $\hat{a}_i \in A_i$ där supremum antas, dvs. sådan att $f_i(\hat{a}_i) = \ell_i$, så kallas $\hat{a}_i$ en *maxminhandling* för spelare i.

Om spelare i har en maxminhandling, så kan vi naturligtvis skriva $\ell_i = \max\{f_i(a_i) \mid a_i \in A_i\}$ istället för $\ell_i = \sup\{f_i(a_i) \mid a_i \in A_i\}$.

En spelares säkerhetsnivå är inte nödvändigtvis ett ändligt tal utan kan vara $+\infty$ eller $-\infty$, och ändlighet garanterar naturligtvis inte att supremum antas, dvs. att det finns en maxminhandling. Spelare i har dock under alla omständigheter för varje tal $s < \ell_i$ säkert en handling som garanterar honom en utbetalning som är större än s, och i de fall då det finns en maxminhandling $\hat{a}_i$, garanterar denna hanling honom en utbetalning som är minst lika med ℓ_i.

De spel som är av störst intresse för oss är antingen ändliga spel eller spel med kompakta handlingsmängder A_i och kontinuerliga utbetalningsfunktioner u_i. I dessa fall antas förstås samtliga infima och suprema som förekommer i definitionerna av funktionerna f_i och säkerhetsnivåerna ℓ_i, vi kan ersätta inf med min och sup med max överallt, och samtliga spelare har maxminhandlingar.

Maxminhandlingarna i ett spel är definierade med hjälp av spelarnas nyttofunktioner, men eftersom sambandet mellan två ordinala nyttofunktioner som representerar samma preferensrelation beskrivs av en strängt växande transformation, beror en spelares maxminhandling $\hat{a}_i$ i själva verket enbart av den underliggande preferensrelationen $\succsim_i$. Däremot beror självfallet säkerhetsnivån av valet av nyttofunktion – om $u'_i = F \circ u_i$ och spelarens säkerhetsnivå är ℓ'_i med avseende på nyttofunktionen u'_i och säkerhetsnivån är ℓ_i med avseende på nyttofunktionen u_i, så är förstås $\ell'_i = F(\ell_i)$.

Sats 2.4.1 *Antag att spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ har en Nashjämvikt a^*, och att ℓ_i är säkerhetsnivån för spelare i. Då är*

$$u_i(a^*) \geq \ell_i.$$

En spelares utbetalning i en Nashjämvikt är med andra ord minst lika stor som spelarens säkerhetsnivå.

Bevis. För alla $a_i \in A_i$ är

$$f_i(a_i) = \inf\{u_i(x_{-i}, a_i) \mid x_{-i} \in A_{-i}\} \leq u_i(a^*_{-i}, a_i),$$

så det följer omedelbart av definitionen av säkerhetsnivå och Nashjämvikt att

$$\begin{aligned}\ell_i &= \sup\{f_i(a_i) \mid a_i \in A_i\} \leq \sup\{u_i(a^*_{-i}, a_i) \mid a_i \in A_i\}\\ &= u_i(a^*_{-i}, a^*_i) = u_i(a^*).\end{aligned}$$ □

Exempel 2.4.2 Spelet i exempel 2.4.1 har två Nashlösningar (r_3, k_2) och (r_4, k_5), där spelarnas utbetalningar ges av talparen $(5, 3)$ resp. $(1, 5)$. I båda fallen får spelarna utbetalningar som är minst lika stora som deras säkerhetsnivåer 1 resp. 3. □

Övningar

2.9 Bestäm eventuella Nashjämvikter samt de båda spelarnas maxminhandlingar och säkerhetsnivåer i följande spel:

	k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	$(3,4)$	$(2,1)$	$(0,6)$	$(1,4)$
r_2	$(2,0)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(1,2)$
r_3	$(2,3)$	$(5,1)$	$(1,1)$	$(3,3)$
r_4	$(4,3)$	$(2,5)$	$(2,2)$	$(3,2)$

2.10 Bestäm maxminhandlingarna och säkerhetsnivåerna för spelet Dela pengar i exempel 2.2.7.

2.11 Visa att det inte finns någon Nashjämvikt i spel där någon spelares säkerhetsnivå är $+\infty$.

2.5 Strikt konkurrensinriktade spel

Begreppet strategiskt spel är alltför generellt för att det ska kunna finnas några intressanta allmängiltiga resultat om Nashjämvikter. För att erhålla sådana resultat måste man inskränka sig till någon mindre klass av spel, och en viktig sådan klass är spel för två personer där de båda spelarna har diametralt motsatta intressen.

Definition 2.5.1 Ett strategiskt spel $\langle\{1,2\},(A_i),(\succsim_i)\rangle$ med två spelare kallas *strikt konkurrensinriktat* om

$$(1) \qquad (a_1,a_2)\succsim_1(b_1,b_2) \;\Leftrightarrow\; (b_1,b_2)\succsim_2(a_1,a_2)$$

för alla utfall (a_1,a_2) och (b_1,b_2).

Exempel 2.5.1 Spelet Krona eller klave i exempel 2.1.3 är strikt konkurrensinriktat, ty för spelarnas preferenser för de olika utfallen gäller att

$$(Kr,Kr)\sim_1(Kl,Kl)\succ_1(Kr,Kl)\sim_1(Kl,Kr)$$
$$(Kl,Kr)\sim_2(Kr,Kl)\succ_2(Kl,Kl)\sim_2(Kr,Kr)$$

vilket betyder att villkoret (1) är uppfyllt. □

Om nyttofunktionen u_1 representerar preferensrelationen $\succsim_1$, så medför villkoret (1) att

$$(b_1,b_2)\succsim_2(a_1,a_2) \;\Leftrightarrow\; u_1(a_1,a_2)\geq u_1(b_1,b_2) \;\Leftrightarrow\; -u_1(b_1,b_2)\geq -u_1(a_1,a_2),$$

vilket betyder att $-u_1$ är en nyttofunktion som representerar preferensrelationen $\succsim_2$. I strikt konkurrensinriktade spel kan vi således välja de två spelarnas ordinala nyttofunktioner u_1 och u_2 så att de uppfyller $u_1+u_2=0$.

Definition 2.5.2 Tvåpersonersspel $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ med kardinala nyttofunktioner u_1 och u_2 som uppfyller $u_1+u_2=0$ kallas *nollsummespel*.

Nollsummespel är strikt konkurrensinriktade. Varje utfall ger den ena spelaren samma nyttobelopp som den andra spelaren förlorar. Vi kan således betrakta utfallet som en överföring av nyttoenheter från den ena spelaren till den andra; ingen nytta försvinner eller tillförs utifrån.

I nollsummespel räcker det naturligtvis att specificera den ena spelarens nyttofunktion, och i ändliga nollsummespel kommer vi att göra detta genom att ange radspelarens (spelare 1:s) utbetalningsmatris, som vi också kommer att kalla för *spelets utbetalningsmatris*.

Nashjämvikterna i ett strikt konkurrensinriktat spel är naturligtvis helt bestämda av en spelares preferensrelation. Det följer omedelbart av definitionen av Nashjämvikt och ekvivalensen (1) att utfallet (a_1^*,a_2^*) är en Nashjämvikt om och endast om

$$(a_1^*,a_2)\succsim_1(a_1^*,a_2^*)\succsim_1(a_1,a_2^*)$$

för alla $(a_1,a_2)\in A_1\times A_2$.

Detta villkor kan förstås också uttryckas med hjälp av nyttofunktioner; om u_1 är spelare 1:s nyttofunktion, så är (a_1^*,a_2^*) en Nashjämvikt om och endast om *sadelpunktsolikheten*

$$(2) \qquad u_1(a_1^*,a_2)\geq u_1(a_1^*,a_2^*)\geq u_1(a_1,a_2^*)$$

gäller för alla $(a_1,a_2)\in A_1\times A_2$.

I strikt konkurrensinriktade spel $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ är varje Nashjämvikt med andra ord en sadelpunkt till spelare 1:s nyttofunktion u_1. Omvänt är varje sadelpunkt (a_1^*,a_2^*) till u_1 med egenskapen att a_1^* maximerar funktionen $u_1(\cdot,a_2^*)$ och a_2^* minimerar funktionen $u_1(a_1^*,\cdot)$ en Nashjämvikt.

För att verifiera sadelpunktsolikheten (2) räcker det naturligtvis att kontrollera att

$$u_1(a_1^*,a_2) \geq u_1(a_1,a_2^*)$$

för alla utfall (a_1,a_2), ty genom att speciellt välja $a_1 = a_1^*$ får vi den vänstra delen och genom att välja $a_2 = a_2^*$ får vi den högra delen av olikheten (2).

I strikt konkurrensinriktade spel $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ är båda spelarnas maxminhandlingar också fullständigt bestämda av den ena spelarens nyttofunktion. En maxminhandling för spelare 1 är per definition en handling $\hat{a}_1 \in A_1$ som uppfyller

$$\inf_{a_2\in A_2} u_1(\hat{a}_1,a_2) = \sup_{a_1\in A_1}\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2),$$

och en maxminhandling för spelare 2 är analogt en handling $\hat{a}_2 \in A_2$ sådan att

$$\inf_{a_1\in A_1} u_2(a_1,\hat{a}_2) = \sup_{a_2\in A_2}\inf_{a_1\in A_1} u_2(a_1,a_2),$$

men vi kan ersätta funktionen u_2 med funktionen $-u_1$ i den sista likheten, ty $-u_1$ är, som vi konstaterade ovan, också en nyttofunktion för spelare 2. Genom att utnyttja det generella sambandet $\inf -f = -\sup f$ mellan supremum av en godtycklig funktionen f och infimum av $-f$, drar vi slutsatsen att maxminhandlingen $\hat{a}_2$ också fås som lösning till problemet

$$\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,\hat{a}_2) = \inf_{a_2\in A_2}\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2).$$

Det är denna likhet som vi i fortsättningen kommer att utnyttja för att karakterisera spelare 2:s maxminhandlingar i strikt konkurrensinriktade spel.

Vi övergår nu till att behandla sambande mellan Nashjämvikter och maxminhandlingar i strikt konkurrensinriktade spel.

Sats 2.5.1 *Låt $\hat{a}_1$ och $\hat{a}_2$ vara maxminhandlingar för spelare 1 och spelare 2, respektive, i ett strikt konkurrensinriktat spel $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$, och antag att*

$$\inf_{a_2\in A_2} u_1(\hat{a}_1,a_2) = \sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,\hat{a}_2).$$

Då är utfallet $(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ en Nashjämvikt.

Bevis. Antagandet i satsen medför att

$$u_1(\hat{a}_1,a_2) \geq \inf_{a_2\in A_2} u_1(\hat{a}_1,a_2) = \sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,\hat{a}_2) \geq u_1(a_1,\hat{a}_2)$$

för alla utfall (a_1,a_2), och detta betyder att sadelpunktsolikheten (2) satisfieras av utfallet $(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$. □

Sats 2.5.2 *Antag att* (a_1^*, a_2^*) *är en Nashjämvikt i ett strikt konkurrensinriktat strategiskt spel* $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$. *Då gäller:*

(i) a_1^* *och* a_2^* *är maxminhandlingar för spelarna 1 och 2, respektive;*

(ii) $\sup\limits_{a_1\in A_1}\inf\limits_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) = \inf\limits_{a_2\in A_2}\sup\limits_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2)$*;*

(iii) $u_i(a_1^*, a_2^*)$ *är spelare* i*:s säkerhetsnivå för* $i = 1, 2$.

Bevis. Vi börjar med att bevisa olikheten

$$\sup_{a_1\in A_1}\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) \le \inf_{a_2\in A_2}\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2), \tag{3}$$

för godtyckliga funktioner $u_1\colon A_1 \times A_2 \to \mathbf{R}$. Låt för den skull $a_1 \in A_1$ vara godtyckligt och ta infimum av funktionen $u_1(a_1,\cdot)$. Detta resulterar i olikheten

$$\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) \le u_1(a_1,a_2),$$

som gäller för alla $a_2 \in A_2$ och alla $a_1 \in A_1$. Genom att betrakta båda sidorna av denna olikhet som funktioner av a_1 och jämföra deras suprema, ser vi nu att

$$\sup_{a_1\in A_1}\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) \le \sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2)$$

för alla $a_2 \in A_2$. Den högra sidan av denna olikhet är en funktion av a_2, och funktionens infimum är per definition större än eller lika med den vänstra sidan, vilket är precis vad olikheten (3) säger.

Genom att använda sadelpunktsolikheten (2) för Nashjämvikten (a_1^*, a_2^*) erhåller vi följande kedja av olikheter:

$$\begin{aligned}\sup_{a_1\in A_1}\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) &\ge \inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1^*,a_2) = u_1(a_1^*,a_2^*)\\ &= \sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2^*) \ge \inf_{a_2\in A_2}\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2).\end{aligned}$$

Kombinera nu denna olikhet med den omvända olikheten (3) med slutsatsen att ytterleden i ovanstående olikhet är lika. Det följer att likhet råder på alla platser i olikheten, och följaktligen är

$$\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1^*,a_2) = \sup_{a_1\in A_1}\inf_{a_2\in A_2} u_1(a_1,a_2) = u_1(a_1^*,a_2^*)$$

och

$$\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2^*) = \inf_{a_2\in A_2}\sup_{a_1\in A_1} u_1(a_1,a_2) = u_1(a_1^*,a_2^*),$$

vilket bevisar satsens påståenden (i) och (ii) samt att $u_1(a_1^*, a_2^*)$ är spelare 1:s säkerhetsnivå. Av symmetriskäl är säkerhetsnivån för spelare 2 lika med $u_2(a_1^*, a_2^*)$. □

Nästa sats är ett korollarium till föregående två satser.

Sats 2.5.3 *Följande påståenden gäller för strikt konkurrensinriktade spel som har en Nashjämvikt.*

(i) Ett utfall (a_1^*, a_2^*) är en Nashjämvikt om och endast om a_1^* och a_2^* är maxminhandlingar för spelare 1 och spelare 2, respektive.

(ii) En spelare har samma utbetalning i alla spelets Nashjämvikter.

(iii) Om (a_1^*, a_2^*) och $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ är två Nashjämvikter, så är också de två utfallen $(a_1^*, \hat{a}_2)$ och $(\hat{a}_1, a_2^*)$ Nashjämvikter.

Bevis. (i) Handlingarna i en Nashjämvikt är maxminhandlingar för båda spelarna enligt sats 2.5.2 (i). Eftersom spelet antas ha åtminstone en Nashjämvikt vet vi vidare på grund av påstående (ii) i samma sats att

$$\sup_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2) = \inf_{a_2 \in A_2} \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2),$$

och det implicerar att

$$\inf_{a_2 \in A_2} u_1(\hat{a}_1, a_2) = \sup_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, \hat{a}_2),$$

om $\hat{a}_1$ är en maxminhandling för spelare 1 och $\hat{a}_2$ är en maxminhandling för spelare 2. Det följer nu av sats 2.5.1 att varje par $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ av maxminhandlingar för de två spelarna är en Nashjämvikt.

(ii) Enligt sats 2.5.2 är en spelares utbetalning i en Nashjämvikt lika med spelarens säkerhetsnivå.

(iii) Låt (a_1^*, a_2^*) och $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ vara två Nashjämvikter. Påstående (i) säger oss att a_1^* and $\hat{a}_1$ är maxminhandlingar för spelare 1 och att a_2^* and $\hat{a}_2$ är maxminhandlingar för spelare 2, och att följaktligen de två utfallen $(a_1^*, \hat{a}_2)$ och $(\hat{a}_1, a_2^*)$ är Nashjämvikter. □

Exempel 2.5.2 Tvåpersonersspelet G med följande utbetalningstabell

	k_1	k_2	k_3	k_4	
r_1	$(2, -2)$	$(-5, 5)$	$(7, -7)$	$(-1, 1)$	-5
r_2	$(3, -3)$	$(4, -4)$	$(3, -3)$	$(5, -5)$	3
r_3	$(1, -1)$	$(6, -6)$	$(-3, 3)$	$(2, -2)$	-3
	3	6	7	5	

är strikt konkurrensinriktat. Kolumnen längst till höger innehåller talen $\min_j u_1(r_i, k_j)$ och den sista raden talen $\max_i u_1(r_i, k_j)$. Det största av talen $\min_j u_1(r_i, k_j)$, dvs. 3, är lika med det minsta av talen $\max_i u_1(r_i, k_j)$. Radspelarens maxminhandling r_2 och kolonnspelarens maxminhandling k_1 uppfyller således villkoret i sats 2.5.1, så vi drar slutsatsen att (r_2, k_1) är spelets unika Nashjämvikt.

Om vi förutsätter att nyttofunktionerna i spelet är kardinala, så är G ett nollsummespel med utbetalningsmatris

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Kom ihåg vår konvention för ändliga nollsummespel att det är radspelarens utbetalningsmatris som är spelets utbetalningsmatris.) Det är naturligtvis enkelt att beräkna eventuella Nashjämvikter genom att bara titta på utbetalningsmatrisen. Ett utfall (r_i, k_j) som satisfierar sadelpunktsolikheten (2) svarar mot en plats (i, j) i utbetalningsmatrisen U, där elementet u_{ij} är störst i sin kolumn och minst i sin rad. Här ser vi att talet 3 på plats $(2, 1)$ uppfyller detta villkor. Följaktligen är (r_2, k_1) en Nashjämvikt, och det finns inga andra. $\square$

Övningar

2.12 Bestäm eventuella Nashjämvikter för nollsummespelen med utbetalningsmatriserna

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.13 Konstruera ett konkurrensinriktat spel med fyra Nashjämvikter och där de båda spelarna har tre handlingsalternativ var.

Kapitel 3

Två oligopolmodeller

Konkurrensen mellan företag på en marknad kan modelleras som ett strategiskt spel. I det här avsnittet ska vi studera två modeller för oligopol från 1800-talets mitt; den första beskrevs av ekonomen Augustin Cournot.

3.1 Cournots modell

Oligopol är en marknadsform där ett antal företag konkurrerar med varandra. Normalt brukar man anta att antalet företag är relativt litet, men denna begränsning spelar ingen roll för vår diskussion.

Så betrakta en situation där en homogen vara bjuds ut på marknaden av n företag. Kostnaderna för företag i att tillverka, marknadsföra och sälja q_i enheter av varan är $C_i(q_i)$, där C_i är en växande funktion. Alla varorna säljs till ett enhetligt pris, och styckpriset $P(Q)$ beror av det totala utbudet $Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Ett ökat utbud pressar priset nedåt, så därför förutsätter vi att funktionen P, som brukar kallas den *inversa efterfrågefunktionen*, är avtagande.

Företagen antas vara vinstmaximerande, men kruxet är förstås att ett företags intäkter och vinst inte bara beror av det egna företagets utbud utan också av de övriga företagens. Intäkterna för företag i som tillverkar och säljer q_i enheter är nämligen $q_iP(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$ och vinsten följaktligen

$$V_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = q_iP(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - C_i(q_i).$$

Fallet $n = 1$ med endast ett företag på marknaden är förstås speciellt. Då råder monopol, och företaget har full kontroll över situationen. Problemet är helt enkelt att maximera envariabelfunktionen $V(x) = xP(x) - C(x)$, där C är företagets kostnadsfunktion.

Ett oligopol med $n \geq 2$ inblandade företag kan uppfattas som ett strategiskt spel med företagen som de n spelarna. Företag i:s handlingsmängd A_i består av mängden av alla möjliga utbud q_i för företaget; A_i är förstås någon delmängd av de icke-negativa reella talen $\mathbf{R}_+$, och i fortsättningen antar vi för enkelhets skull att $A_i = \mathbf{R}_+$. Företagets nyttofunktion är dess vinstfunktion V_i.

Under lämpliga förutsättningar har detta strategiska spel en Nashjämvikt. Cournot kom i sin analys fram till Nashjämvikten som en rimlig lösning på företagens problem att välja optimala utbudskvantiteter, men han kunde förstås inte använda sig av spelteoretisk terminologi. Nash å sin sida tycks inte ha känt till Cournots ekonomiska arbeten då han utvecklade sin teori runt 1950.

Vi kan bestämma eventuella Nashjämvikter $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ i oligopolspelet genom att utnyttja att q_i^* är det i:te företagets bästa svar givet att de andra företagen valt kvantiteterna q_{-i}^*. Vektorn q^* är med andra ord en Nashjämvikt om och endast om det för varje företag i gäller att q_i^* maximerar vinstfunktionen

$$x_i \mapsto V_i(q_{-i}^*, x_i) = x_i P(q_1^* + \cdots + x_i + \cdots + q_n^*) - C_i(x_i).$$

Låt oss anta att $q_i^* > 0$ samt att funktionerna P och C_i är deriverbara i punkterna Q^* och q_i^*, där $Q^* = q_1^* + \cdots + q_n^*$. Då är derivatan till företag i:s vinstfunktion lika med noll i maximipunkten q_i^*, så det följer efter derivering att Nashjämvikten q^* är en lösning till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} P(Q) + q_1 P'(Q) = C_1'(q_1) \\ P(Q) + q_2 P'(Q) = C_2'(q_2) \\ \qquad \vdots \\ P(Q) + q_n P'(Q) = C_n'(q_n) \\ q_1 + q_2 + \cdots + q_n = Q. \end{cases} \tag{1}$$

I den fortsatta analysen antar vi att företagen har identiska linjära kostnadsfunktioner, dvs. att $C_i(q_i) = cq_i$ för någon positiv konstant c, samt att $P'(Q^*) < 0$. Den inversa efterfrågefunktionen P är alltså strängt avtagande i punkten Q^*. Under dessa förutsättningar är Nashjämvikten q^* symmetrisk, dvs. $q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^*$.

För att bevisa detta behöver vi bara subtrahera den första ekvationen i ekvationssystemet (1) från ekvation nummer i, vilket leder till följande likhet för Nashjämvikten

$$(q_i^* - q_1^*)P'(Q^*) = c - c = 0,$$

med slutsatsen att $q_i^* - q_1^* = 0$ för alla i.

I Nashjämvikten är därför det totala utbudet $Q^* = nq_1^*$, och vi kan nu bestämma q_1^* i genom att lösa ekvationen

$$P(nx) + xP'(nx) = c, \tag{2}$$

som bara innehåller en variabel x.

Exempel 3.1.1 Låt oss bestämma Nashjämvikten i Cournots oligopolspel i det fall då företagen har en gemensam linjär kostnadsfunktion $C(q_i) = cq_i$ och den inversa efterfrågefunktionen har formen

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{för } 0 \le Q \le a \\ 0 & \text{för } Q > a. \end{cases}$$

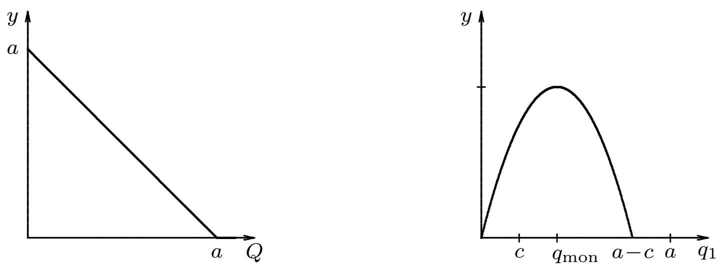
Vi förutsätter att $a > c$, ty annars är alla utbud olönsammma.

Alla utbudsvektorer $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ med totalt utbud $Q > a - c$ är förlustbringande för alla företag i med positivt utbud q_i, och ett sådant företag kan ensidigt förbättra sin situation genom att skära ned sitt utbud till noll. I en Nashjämvikt q^* är därför det totala utbudet $Q^* \le a - c$, vilket betyder att den inversa efterfrågefunktionen i en omgivning av Nashjämvikten är $P(Q) = a - Q$.

I monopolfallet $n = 1$ ges det enda företagets vinst för $Q = q_1 \le a - c$ av uttrycket

$$V_1(q_1) = q_1(a - q_1) - cq_1 = q_1(a - c - q_1).$$

Vinstfunktionens graf visas i figur 3.1.



Figur 3.1. Till vänster visas grafen till den inversa efterfrågefunktionen i exempel 3.1.1. Till höger visas monopolföretagets vinstkurva $y = V_1(q_1)$.

$V_1(q_1)$ är ett andragradspolynom med maximum i punkten

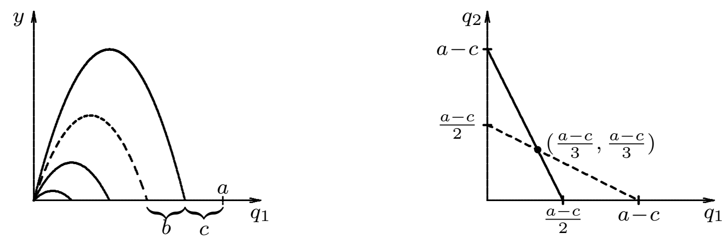
$$q_{\text{mon}} = \frac{1}{2}(a - c).$$

Detta är också precis den lösning som vi får av ekvation (2), som för $n = 1$, $P(Q) = a - Q$ och $C(q_1) = cq_1$ får formen

$$a - x - x = c.$$

Monopolföretagets optimala pris blir $P(q_{\text{mon}}) = \frac{1}{2}(a+c)$ och företagets vinst är lika med $\frac{1}{4}(a - c)^2$.

Vi övergår nu till att behandla oligopolsituationen med $n > 1$ företag. (Duopolfallet $n = 2$ illustreras i figur 3.2.) Vår inledande analys är giltig eftersom företagen har identiska linjära kostnadsfunktioner. I en Nashjämvikt



Figur 3.2. I den vänstra figuren visas det ena duopolföretagets vinstkurvor $y = V_1(q_1, q_2)$ för fyra olika värden på konkurrentföretagets utbud q_2; den yttersta kurvan svarar mot $q_2 = 0$ och den streckade kurvan mot $q_2 = b$. Den högra figuren visar företagens bästasvarsfunktioner; den heldragna linjen visar företaget 1:s bästa svar som funktion av q_2, den streckade linjen visar företag 2:s bästa svar som funktion av q_1. Linjerna skär varandra i Nashjämvikten.

q^* är därför alla koordinaterna q_j^* lika och lösningar till ekvation (2), som i detta fall är

$$a - nx - x = c.$$

I Nashjämvikten är således varje företags utbud

$$q_i^* = \frac{1}{n+1}(a-c).$$

Det totala utbudet blir därför $Q^* = \frac{n}{n+1}(a-c)$, utbudspriset är $P(Q^*) = \frac{1}{n+1}(a+nc)$, och den sammanlagda vinsten är $\frac{n}{(n+1)^2}(a-c)^2$.

Observera att priset $P(Q^*) = \frac{1}{n+1}(a+nc)$ avtar när n växer, och konvergerar mot c då antalet företag går mot oändligheten. Det totala utbudet konvergerar mot $a-c$, och den totala vinsten går monotont mot 0. När antalet oligopolföretag blir stort uppstår med andra ord en situation som är nära den som råder vid fri konkurrens.

I Nashjämvikten tar oligopolföretagen ut ett lägre pris än vad monopolföretaget gör, företagens sammanlagda produktion är större men deras sammanlagda vinst är lägre än monopolföretagets. Oligopolföretagen skulle med andra ord tjäna på att bilda en kartell, ta ut monopolpriset och dela på vinsten. Det är därför som det finns lagstiftning mot kartellbildning. □

Slutsatserna i föregående stycke gäller mycket allmänt. Vi har nämligen följande resultat.

Sats 3.1.1 *I en marknad, där den inversa efterfrågefunktionen P är strängt avtagande med negativ derivata och intäktsfunktionen $x \mapsto xP(x)$ för monopolföretaget är konkav, är det totala utbudet i Nashjämvikten för oligopolföretag med identiska linjära kostnadsfunktioner större än det optimala utbudet för ett monopolföretag med samma linjära kostnadsfunktion.*

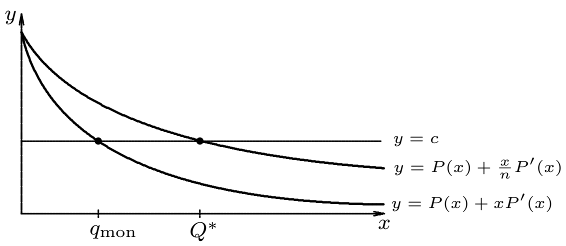
Bevis. Av ekvation (2) följer att n oligopolföretags totala Nashjämviktsutbud Q^* $(= nq_1^*)$ fås som lösning till ekvationen

$$P(x) + \frac{1}{n}xP'(x) = c,$$

medan monopolföretagets optimala utbud q_{mon} fås som lösning till samma ekvation i fallet $n = 1$, dvs. ekvationen

$$P(x) + xP'(x) = c.$$

Kurvan $y = P(x) + xP'(x)$ är avtagande, ty derivatan av en konkav funktion är avtagande, och $P(x) + xP'(x)$ är intäktsfunktionens derivata. Eftersom $P'(x) < 0$ är vidare $xP'(x) < \frac{1}{n}xP'(x)$ för $x > 0$, så den avtagande kurvan $y = P(x) + xP'(x)$ ligger under kurvan $y = P(x) + \frac{1}{n}xP'(x)$. Skärningspunkten mellan kurvan $y = P(x) + xP'(x)$ och linjen $y = c$ ligger därför till vänster om skärningspunkten mellan kurvan $y = P(x) + \frac{1}{n}xP'(x)$ och samma linje; se figur 3.3. Detta betyder att monopolföretagets utbud q_{mon} är mindre än det sammanlagda utbudet Q^* hos oligopolföretagen. Monopolföretagets pris är följaktligen också högre än oligopolpriset. □



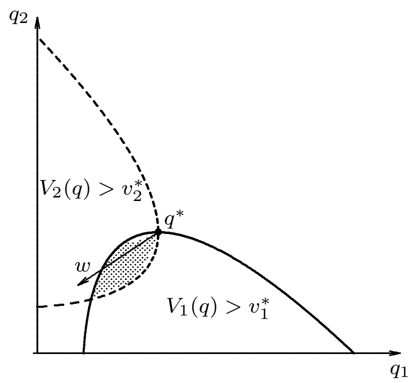
Figur 3.3. Monopolföretagets utbud q_{mon} är mindre än oligopolföretagens samlade Nashjämviktsutbud Q^*.

Utbuden i en Nashjämvikt är i allmänhet inte de mest lönsamma för oligopolföretagen, utan samtliga företag kan under tämligen allmänna villkor få en större vinst genom att sänka sina utbud en smula.

Sats 3.1.2 *Betrakta en oligopolmarknad, där företagen har godtyckliga deriverbara kostnadsfunktioner C_i, och antag att q^* är en Nashjämvikt med positiva koordinater q_i^* samt att den inversa efterfrågefunktionens derivata P' är negativ i punkten $Q^* = q_1^* + \cdots + q_n^*$. Då finns det ett tal $\epsilon > 0$ så att vinsten för samtliga företag i är större för utbud q_i som uppfyller $q_i^* - \epsilon < q_i < q_i^*$ än för jämviktsutbudet q_i^*.*

Bevis. Betrakta vinstfunktionen för företag 1:

$$V_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) = q_1P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - C_1(q_1).$$



Figur 3.4. Figuren illustrerar hur duopolföretag tjänar på lägre utbud än utbuden i Nashjämvikten. Utefter den heldragna kurvan är vinsten $V_1(q)$ för företag 1 lika med företagets vinst v_1^* i Nashjämvikten q^*, och under kurvan är vinsten större. Utefter den streckade kurvan är vinsten $V_2(q)$ för företag 2 lika med företagets vinst v_2^* i Nashjämvikten, och i området till vänster om kurvan är vinsten större. I det skuggade området är båda företagens vinst större än i Nashjämvikten.

Eftersom q^* är en Nashjämvikt har funktionen $q_1 \mapsto V_1(q_1, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ ett maximum för $q_1 = q_1^*$, vilket medför att

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1}(q^*) = 0.$$

För $i \geq 2$ är vidare på grund av våra antaganden

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_i}(q^*) = q_1^* P'(Q^*) < 0.$$

I Nashjämvikten q^* är därför alla koordinaterna i vinstfunktionens gradient $\nabla V_1 = (\frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V_1}{\partial q_n})$ strikt negativa med undantag för den första som är 0.

Låt nu $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vara en vektor i $\mathbf{R}^n$ med idel *negativa* koordinater, och betrakta funktionen

$$g(t) = V_1(q^* + tw) = V_1(q_1^* + w_1 t, \ldots, q_n^* + w_n t)$$

för t i en omgivning av 0. (Jmf figur 3.4.) Vi kan beräkna derivatan av g i origo med hjälp av kedjeregeln och får

$$g'(0) = \frac{\partial V_1}{\partial q_1} w_1 + \frac{\partial V_1}{\partial q_2} w_2 + \cdots + \frac{\partial V_1}{\partial q_n} w_n = \nabla V_1 \cdot w,$$

där de partiella derivatorna ska utvärderas i punkten q^*. Det följer att $g'(0) > 0$, ty i summan är alla termerna $\frac{\partial V_1}{\partial q_j} w_j$ utom den första positiva och den första termen är noll. Funktionen g är därför strikt växande i punkten $t = 0$, vilket medför att det finns ett positivt tal t_1 så att

$$V_1(q^* + tw) > V_1(q^*)$$

för alla t i intervallet $0 < t < t_1$. Motsvarande gäller förstås också för de andra vinstfunktionerna V_i. För alla tillräckligt små $t > 0$ är därför samtliga företags vinster större i punkten $q^* + tw$ än i Nashjämvikten q^*, och $q_j^* + tw_j < q_j^*$ eftersom $w_j < 0$. Det är således fördelaktigt för alla företag att sänka sina utbud en smula från Nashjämviktsutbudet. □

Övningar

3.1 Bestäm Nashjämvikten i Cournots oligopolmodell med invers efterfrågefunktion $P(Q) = 2c(1 + Q)^{-1}$, linjära kostnadsfunktioner och samma styckkostnad c för alla företag.

3.2 Bestäm Nashjämvikten i Cournots duopolmodell om den inversa efterfrågefunktionen definieras av att

$$P(Q) = \begin{cases} \frac{1}{4}Q^2 - 5Q + 26 & \text{för } 0 \le Q \le 10, \\ 1 & \text{för } Q \ge 10. \end{cases}$$

Kostnaden för att producera en enhet är 1 för båda firmorna.

3.3 Bestäm Nashjämvikterna i Cournots duopolmodel med invers efterfrågefunktion

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{om } 0 \le Q \le a, \\ 0 & \text{om } Q > a \end{cases}$$

och följande kostnadsfunktioner:

a) $C_i(q_i) = c_i q_i$, där $0 < c_1 < c_2 < a$.

b) $C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{om } q_i = 0, \\ b + cq_i & \text{om } q_i > 0, \end{cases}$ där $b > 0$ och $0 < c < a$.

3.2 Bertrands modell

I Cournots modell är det den utbjudna kvantiteten som är företagets strategiska variabel. Joseph Bertrand missuppfattade Cournot på den punkten i en recension 1883 av Cournots bok och utgick från att det var varans pris som var konkurrensmedlet. Av det skälet brukar man associera Bertrands namn till den modell för oligopol som använder prissättning som företagens beslutsvariabel.

I Bertrandmodellen förutsätter vi alltså, liksom i Cournots modell, att n företag bjuder ut en identisk vara på marknaden, men företagen kan nu välja att prissätta varan olika. Vi låter p_i beteckna det enhetspris som företag i sätter på varan. Kostnaden för att tillverka och sälja en enhet av varan förutsätts vara densamma för alla företag och lika med c. Konsumenternas efterfrågan bestäms helt och hållet av det lägsta av priserna p_i, som vi betecknar $p_{\min}$, och är lika med $D(p_{\min})$; funktionen D kallas *efterfrågefunktionen.* Konsumenterna handlar enbart av det eller de företag som har det lägsta priset, och dessa företag är skyldiga att tillmötesgå konsumenternas efterfrågan även i de fall då detta medför att företagen gör förlust på affären. Om det är fler företag som har samma lägsta pris, fördelas inköpen lika mellan dessa. Företagen förutsätts drivas enligt vinstmaximeringsprincipen.

Om m företag har samma lägsta pris, så gäller för vinsten V_i för företag i att

$$V_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{cases} 0 & \text{om } p_i > p_{\min} \\ \frac{1}{m}(p_i - c)D(p_i) & \text{om } p_i = p_{\min}. \end{cases}$$

Om företagets pris p_i är större än det minsta priset får det nämligen inte sälja någonting men har heller inte några kostnader, och om $p_i = p_{\min}$ delas den totala försäljningen $D(p_i)$ lika mellan de företag som har samma lägsta pris, och vinsten per enhet är $p_i - c$, vilket i fallet $p_i < c$ förstås innebär förlust.

Vi kan tolka Bertrands modell som ett strategiskt spel med de n företagen som spelare, de möjliga prissättningarna som spelarnas handlingsmängder och vinstfunktionerna som deras nyttofunktioner. Vi förutsätter att vilka positiva reella tal som helst är möjliga som priser.

Vi kan ge en enkel analys av Bertrands modell under mycket generella förutsättningar på efterfrågefunktionen D; de enda förutsättningar som behövs är att den är positiv och att efterfrågan inte plötsligt minskar drastiskt när priset sänks. Närmare bestämt förutsätter vi att det för varje $x > c$ finns någon konstant $k > \frac{1}{2}$ och tal $y < x$ godtyckligt nära x som uppfyller olikheten $D(y) > kD(x)$. Detta gäller säkert om efterfrågefunktionen är avtagande, vilket är ett rimligt ekonomiskt antagande, eller om den är kontinuerlig. (I båda fallen kan vi välja $k = \frac{3}{4}$.)

I Cournots modell beror Nashjämvikten på ett ganska komplicerat sätt av den inversa efterfrågefunktionen och kostnadsfunktionerna. I Bertrands modell är däremot bilden mycket enkel:

Prissättningen $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ är en Nashjämvikt i Bertrands oligopolmodell om och endast om $p_{min}^* = c$ och $p_i^* = c$ för minst två företag. I ett duopol är därför prissättningen (c, c) den unika Nashjämvikten.

Resultatet är ju inte speciellt uppmuntrande för företagen; inget av dem gör någon vinst om de väljer den prissättning som Nashlösningen förespråkar.

Beviset för att Nashjämvikterna p^* ser ut som de gör är enkelt. För det första kan inte lägsta priset $p^*_{\min}$ vara strikt mindre än c. Om $p^*_{\min} < c$ och exempelvis $p_1^* = p^*_{\min}$, så är nämligen företag 1:s vinst $V_1(p^*)$ negativ, varför företaget tjänar på att höja sitt pris till c, något som under alla omständigheter gör att förlusten förvandlas till ett nollresultat.

Det lägsta priset kan inte heller vara strikt större än c. Om $p^*_{\min} > c$ och i är ett företag med högre pris p^*_i än $p^*_{\min}$, så tjänar nämligen detta företag på att sänka sitt pris till p_i i intervallet $]c, p^*_{\min}[$, ty därigenom kapar det åt sig all försäljning och får en positiv vinst istället för ett nollresultat. Om det inte finns något sådant företag, dvs. om alla företag har samma pris $p^*_{\min} > c$, så tjänar företag 1 (liksom varje företag) på att ensidigt sänka sitt pris en smula, vilket gör att det får hela vinsten istället för att dela den med alla övriga företag. (Här behövs vår förutsättning att efterfrågan inte sjunker drastiskt när priset faller!)

Följaktligen är $p^*_{\min} = c$. Vidare måste minst två företag ha samma lägsta pris, ty om exempelvis $c = p^*_1 < p^*_i$ för $i = 2, 3, \dots, n$, så kan företag 1 öka sin vinst från 0 till ett positivt tal genom att höja priset men inte mer än att det nya priset p_1 fortfarande är lägst.

Å andra sidan är alla prissättningar p^* med $p^*_{\min} = c$ och där minst två företag har samma lägsta pris en Nashjämvikt, ty i detta fall är samtliga företags vinst lika med 0 och inget företag kan erhålla positiv vinst genom att ensidigt ändra sitt pris.

Övning

3.4 Antag i Bertrands modell för duopol att efterfrågefunktionen D är konstant på intervallet $[c, p_0[$ och att den sedan gör ett språng i punkten p_0 så att $D(p_0) = 2D(c)$. (Antagandet är inte helt orealistiskt – om priset ligger under en viss punkt kanske konsumenterna tror att varan inte är bra, men när denna kritiska punkt passeras stiger efterfrågan kraftigt.) Ett exempel på en sådan funktion skulle kunna vara

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 < x < p_0 \\ 2p_0/x & \text{om } x \geq p_0. \end{cases}$$

Visa att förutom (c, c) är nu också (p_0, p_0) en Nashjämvikt.

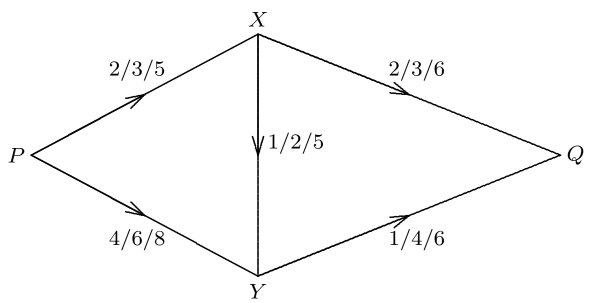
Kapitel 4

Trängselspel och potentialspel

4.1 Trängselspel

Trängselspel är en klass av spel med Nashjämvikt som infördes och studerades av Rosenthal 1973. Vi börjar med ett illustrativt exempel.

Exempel 4.1.1 Tre personer, Arvid, Bodil och Carin, ska ta sig från punkt P till punkt Q med hjälp av vägnätet i figur 4.1.



Figur 4.1. Ett vägnät som trafikeras av tre personer.

Kostnaden (t.ex. i tid) för att utnyttja en delsträcka är trängselberoende, dvs. beroende av hur många som utnyttjar den. Exempelvis kostar det 2 enheter att använda vägsträckan PX om en person trafikerar den, 3 enheter per person om två personer använder den och 5 enheter per person om tre personer använder den, vilket i figuren angivits som 2/3/5 intill sträckan. Kostnaderna för de övriga delsträckorna PY, XY, XQ och YQ har angivits på motsvarande sätt i figuren. Den totala resekostnaden för en person fås genom att addera personens kostnader för de vägsträckor som personen trafikerar under resan från P till Q.

Arvid och Bodil får använda vilken väg som helst (i pilarnas riktning) från P till Q, men Carin har ett fordon som gör att hon inte kan utnyttja vägsträckan PY. Alla är intresserade av att erhålla lägsta möjliga kostnad.

Vi kan se det hela som ett strategiskt spel, där Arvid har tre handlingsmöjligheter: alternativet x att utnyttja vägarna PX och XQ, alternativet y att utnyttja vägarna PY och YQ och alternativet z att utnyttja vägarna PX, XY och YQ. Bodil har samma handlingsmöjligheter x, y och z som Arvid, medan Carin bara kan använda sig av alternativen x och z.

Om exempelvis Arvid och Bodil båda använder sig av alternativet z och Carin utnyttjar alternativet x, kommer sträckan PX att utnyttjas av tre personer till en kostnad av 5 för var och en, sträckorna XY och YQ att användas av två personer till en kostnad av 2 resp. 4 för vardera nyttjare, och sträckan XQ bara av en person (Carin) till en kostnad av 2 för henne. Arvids totala kostnad blir därför 5+2+4= 11, Bodil har samma kostnad, medan Carins kostnad är 5+2=7. De tre personernas kostnadsvektor för handlingsvektorn (z, z, x) är således lika med $(11, 11, 7)$.

Om Arvid nu byter till alternativet y medan Bodil håller kvar vid z och Carin vid x, så blir den nya kostnadsvektorn för de tre personerna $(8, 8, 5)$ vilket är bättre för Arvid (och även för de två övriga deltagarna). Alternativet (z, z, x) kan med andra ord inte vara en Nashjämvikt. Det är inte heller (y, z, x), ty om Bodil byter till x, så blir den nya kostnadsvektorn för (y, x, x) lika med $(5, 6, 6)$. Det är lätt att kontrollera att ingen spelare nu ensidigt kan förbättra sin kostnad, så (y, x, x) är en Nashjämvikt. Naturligtvis är av symmetriskäl också handlingsvektorn (x, y, x) en Nashjämvikt med motsvarande kostnadsvektor $(6, 5, 6)$. □

En generell definition av trängselmodeller liknande den i exempel 4.1.1 ser ut så här.

Definition 4.1.1 En *trängselmodell* $M = \langle N, R, (A_i)_{i\in N}, (\kappa_j)_{j\in R}\rangle$ består av

- en mängd $N = \{1, 2, \dots, n\}$ av spelare;
- en ändlig mängd R av *resurser*;
- för varje spelare i en icke-tom mängd A_i av delmängder till R;
- för varje resurs $r \in R$ en vektor $\kappa_r = (\kappa_r(1), \kappa_r(2), \dots, \kappa_r(n))$ bestående av reella tal.

Exempel 4.1.2 I trängselmodellen i exempel 4.1.1 är

- $N = \{1, 2, 3\} = \{\text{Arvid, Bodil, Carin}\}$;
- $R = \{PX, XQ, XY, PY, YQ\}$;
- $A_1 = A_2 = \{\{PX, XQ\}, \{PY, YQ\}, \{PX, XY, YQ\}\}$ och $A_3 = \{\{PX, XQ\}, \{PX, XY, YQ\}\}$
- $\kappa_{PX} = (2, 3, 5)$, $\kappa_{XQ} = (2, 3, 6)$, $\kappa_{XY} = (1, 2, 5)$, $\kappa_{PY} = (4, 6, 8)$ och $\kappa_{YQ} = (1, 4, 6)$. □

I trängselmodellen $M = \langle N, R, (A_i)_{i\in N}, (\kappa_j)_{j\in R}\rangle$ är alltså varje element i mängden A_i är en mängd av resurser, och vi kommer att tolka en spelares val av alternativet $a_i \in A_i$ som hans val att använda sig av de resurser som ingår i a_i.

Talet $\kappa_r(k)$ ska tolkas som kostnaden för en spelare att använda resursen r om exakt k spelare använder resursen, dvs. om $r \in A_i$ för exakt k stycken spelare i.

För varje utfall $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ och varje resurs $r \in R$ sätter vi vidare

$$n_r(a) = \text{antalet } i \in N \text{ med egenskapen att } r \in a_i,$$

dvs. $n_r(a)$ anger hur många spelare som använder resursen r då utfallet är a.

Totalkostnaden $c_i(a)$ för spelare i, givet att spelarna väljer alternativen $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, får vi genom att summera kostnaderna för de resurser som spelare i utnyttjar, och den är

$$c_i(a) = \sum_{r\in a_i} \kappa_r(n_r(a)).$$

Varje spelare i förutsätts vilja minimera sin totalkostnad $c_i(a)$, dvs. maximera $-c_i(a)$, vilket spelaren får försöka göra som deltagare i det strategiska spelet $\langle N, (A_i)_{i\in N}, (-c_i)_{i\in N}\rangle$, som kallas det till trängselmodellen hörande *trängselspelet.*

Trängselspelet i exempel 4.1.1 har en Nashjämvikt, och det är ingen tillfällighet, ty vi har följande generella sats.

Sats 4.1.1 *Varje trängselspel har en Nashjämvikt.*

Bevis. Vi använder beteckningarna i och efter definition 4.1.1 och ska alltså visa att det finns ett utfall a^* med egenskapen att

$$c_i(a^*_{-i}, a_i) \geq c_i(a^*)$$

för alla spelare i och alla handlingar $a_i \in A_i$. Vi ska göra detta genom att konstruera en funktion $\Phi\colon A \to \mathbf{R}$ med egenskapen att

$$c_i(a_{-i}, x_i) - c_i(a) = \Phi(a_{-i}, x_i) - \Phi(a) \tag{1}$$

för alla spelare i, alla $a \in A$ och alla $x_i \in A_i$.

Antag för ett ögonblick att vi har en sådan funktion Φ. Eftersom funktionen är definierad på en ändlig mängd har den ett minimum som antas i någon punkt $a^* \in A$ (som förstås inte behöver vara unik). Handlingsvektorn a^* är en Nashjämvikt, ty på grund av ekvation (1) är

$$c_i(a^*_{-i}, a_i) - c_i(a^*) = \Phi(a^*_{-i}, a_i) - \Phi(a^*) \geq 0$$

för alla spelare i och alla handlingar $a_i \in A_i$.

Det återstår att definiera funktionen Φ och det gör vi genom att för $a \in A$ sätta

$$\Phi(a) = \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(a)} \kappa_r(k).$$

För att beräkna $\Phi(a)$ ska vi alltså för varje resurs r först bestämma hur många spelare som använder sig av resursern r, vilket ger oss talet $n_r(a)$, och sedan bestämma summan S_r av kostnaderna för att använda resursen 1, 2,..., $n_r(a)$ gånger. Slutligen ska vi addera alla summorna S_r.

Låt oss nu jämföra $n_r(a) = n_r(a_{-i}, a_i)$ med $n_r(a_{-i}, x_i)$ när x_i är en godtycklig handling i A_i. Vi påminner om att x_i och a_i är delmängder till resursmängden R, och att $n_r(a_{-i}, x_i)$ är lika med antalet spelare $k \in N \setminus \{i\}$ som använder resursen r (dvs. för vilka $r \in a_k$), ökat med 1 om också spelare i använder resursen r. Därför är uppenbarligen

$$n_r(a_{-i}, x_i) = \begin{cases} n_r(a_{-i}, a_i) & \text{om } r \in x_i \cap a_i, \\ n_r(a_{-i}, a_i) & \text{om } r \notin x_i \cup a_i, \\ n_r(a_{-i}, a_i) + 1 & \text{om } r \in x_i \setminus a_i, \\ n_r(a_{-i}, a_i) - 1 & \text{om } r \in a_i \setminus x_i. \end{cases}$$

Det följer att

$$\begin{aligned} c_i(a_{-i}, x_i) - c_i(a_{-i}, a_i) &= \sum_{r \in x_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, x_i)) - \sum_{r \in a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i)) \\ &= \sum_{r \in x_i \setminus a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, x_i)) + \sum_{r \in x_i \cap a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, x_i)) \\ &\quad - \sum_{r \in a_i \setminus x_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i)) - \sum_{r \in x_i \cap a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i)) \\ &= \sum_{r \in x_i \setminus a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i) + 1) - \sum_{r \in a_i \setminus x_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i)) \end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned} \Phi(a_{-i}, x_i) - \Phi(a_{-i}, a_i) &= \sum_{r \in R} \Big(\sum_{k=1}^{n_r(a_{-i}, x_i)} \kappa_r(k) - \sum_{k=1}^{n_r(a_{-i}, a_i)} \kappa_r(k) \Big) \\ = \Big(\sum_{r \in R \setminus (x_i \cup a_i)} + \sum_{r \in x_i \setminus a_i} + \sum_{r \in a_i \setminus x_i} + \sum_{r \in x_i \cap a_i} \Big) &\Big(\sum_{k=1}^{n_r(a_{-i}, x_i)} \kappa_r(k) - \sum_{k=1}^{n_r(a_{-i}, a_i)} \kappa_r(k) \Big) \\ = \sum_{r \in x_i \setminus a_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i) + 1) - \sum_{r \in a_i \setminus x_i} \kappa_r(n_r(a_{-i}, a_i)). \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att

$$c_i(a_{-i}, x_i) - c_i(a_{-i}, a_i) = \Phi(a_{-i}, x_i) - \Phi(a_{-i}, a_i),$$

dvs. att ekvation (1) gäller. □

EXEMPEL 4.1.3 Funktionen Φ i beviset ovan är ett exempel på en s.k. potentialfunktion, och sådana funktioner ska vi studera utförligt i nästa avsnitt, men låt oss avsluta den här delen med att beräkna potentialfunktionen Φ för trängselspelet i exempel 4.1.1.

I utfallet $a = (x, x, x)$, då samtliga spelare väljer sträckorna PX och XQ, utnyttjas resurserna $r = PX$ och $r = XQ$ tre gånger var, medan övriga resurser inte utnyttjas alls, så

$$\Phi(x, x, x) = \sum_{k=1}^{3} \kappa_{PX}(k) + \sum_{k=1}^{3} \kappa_{XQ}(k) = (2 + 3 + 5) + (2 + 3 + 6) = 21.$$

Övriga 17 potentialfunktionsvärden beräknas på motsvarande sätt, men vi bör förstås utnyttja symmetrin som innebär att $\Phi(a') = \Phi(a'')$ om utfallen a' och a'' är permutationer av varandra. Vi får följande tabell över funktionsvärdena.

a	(x,x,x)	(x,x,z)	(x,y,x)	(x,y,z)	(x,z,x)	(x,z,z)
$\Phi(a)$	21	17	15	17	17	20

a	(y,x,x)	(y,x,z)	(y,y,x)	(y,y,z)	(y,z,x)	(y,z,z)
$\Phi(a)$	15	17	19	24	17	23

a	(z,x,x)	(z,x,z)	(z,y,x)	(z,y,z)	(z,z,x)	(z,z,z)
$\Phi(a)$	17	20	17	23	20	29

Potentialfunktionen antar sitt minimivärde 15 för utfallen (x, y, x) och (y, x, x), som därför är Nashjämvikter. □

Övning

4.1 Betrakta trängselspelet i exempel 4.1.1 och antag att den tredje spelaren Carin också kan använda vägsträckan PY och därmed har tillgång till samma handlingsalternativ x, y och z som de övriga två spelarna. Bestäm under dessa förutsättningar minimipunkterna till potentialfunktionen och därmed också spelets Nashjämvikter.

4.2 Potentialspel

Att varje trängselspel har en Nashjämvikt är, som framgår av beviset för satsen, en direkt konsekvens av att det finns en funktion Φ på mängden av möjliga utfall som uppfyller ekvation (1). Detta gör det möjligt att direkt generalisera resultatet till spel där det finns en motsvarande funktion, vilket motiverar följande definitioner.

Definition 4.2.1 En funktion $\Phi\colon A \to \mathbf{R}$ på mängden $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ av alla möjliga utfall till ett strategiskt spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ kallas en

- *(exakt) potentialfunktion* om
$$u_i(a_{-i}, x_i) - u_i(a_{-i}, a_i) = \Phi(a_{-i}, x_i) - \Phi(a_{-i}, a_i)$$
för alla spelare $i \in N$, alla utfall $a \in A$ och alla handlingar $x_i \in A_i$;
- *ordinal potentialfunktion* om
$$u_i(a_{-i}, x_i) - u_i(a_{-i}, a_i) > 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi(a_{-i}, x_i) - \Phi(a_{-i}, a_i) > 0$$
för alla spelare $i \in N$, alla utfall $a \in A$ och alla handlingar $x_i \in A_i$.

Om ett strategiskt spel har en exakt potentialfunktion kallas spelet ett *potentialspel*, och om ett strategiskt spel har en ordinal potentialfunktion kallas spelet ett *ordinalt potentialspel.*

Potentialspel introducerades och studerades av Dov Monderer och Lloyd Shapley 1996. Varje potentialspel är naturligtvis ett ordinalt potentialspel, och beviset för sats 4.1.1 visar att varje trängselspel är ett potentialspel. Omvänt har Monderer och Shapley visat att varje potentialspel är ekvivalent med ett trängselspel.

Sats 4.2.1 *Varje maximipunkt till potentialfunktionen i ett ordinalt potentialspel är en Nashjämvikt till spelet. Speciellt har varje ändligt ordinalt potentialspel minst en Nashjämvikt.*

Bevis. Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett strategiskt spel med ordinal potentialfunktion Φ och antag att a^* är en maximipunkt till Φ som inte är en Nashjämvikt. Då finns det en spelare i och en handling $x_i \in A_i$ sådan att $u_i(a^*_{-i}, x_i) - u_i(a^*_{-i}, a^*_i) > 0$. Men då är också $\Phi(a^*_{-i}, x_i) - \Phi(a^*_{-i}, a^*_i) > 0$, vilket strider mot att $a^* = (a^*_{-i}, a^*_i)$ är en maximipunkt till funktionen Φ. Utfallet a^* måste följaktligen vara en Nashjämvikt.

Om spelet är ändligt, så har naturligtvis potentialfunktionen Φ en maximipunkt eftersom definitionsmängden är ändlig, och spelet har följaktligen minst en Nashjämvikt. □

Exempel 4.2.1 Fångarnas dilemma, dvs. spelet med nyttofunktioner givna av tabellen

	Neka	*Erkänn*
Neka	$(-1,-1)$	$(-5,0)$
Erkänn	$(0,-5)$	$(-3,-3)$

är ett potentialspel. Det är enkelt att verifiera att funktionen Φ, som definieras av att $\Phi(\textit{Neka,Neka}) = 0$, $\Phi(\textit{Neka,Erkänn}) = \Phi(\textit{Erkänn,Neka}) = 1$ och $\Phi(\textit{Erkänn,Erkänn}) = 3$, är en exakt potentialfunktion. Funktionen antar sitt maximum för utfallet (*Erkänn,Erkänn*), som följaktligen är en Nashjämvikt. □

Exempel 4.2.2 I Cournots modell, som vi studerade i avsnitt 3.1, konkurrerar n vinstmaximerande företag med en vara på en gemensam marknad. Om varje företag i producerar q_i enheter av varan, så kan den säljas till styckpriset $P(Q)$, där P är den inversa efterfrågefunktionen och $Q = q_1+q_2+\cdots+q_n$. Antag att produktionskostnaden per enhet är konstant lika med c för samtliga företag, vilket innebär att vinsten för företag i är

$$V_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = q_i P(Q) - cq_i.$$

Antag slutligen att samtliga företag i har $A_i =]0, +\infty[$ som handlingsmängd. Under dessa förutsättningar är

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = q_1 q_2 \cdots q_n (P(Q) - c)$$

en ordinal potentialfunktion, ty

$$\Phi(q_{-i}, x_i) - \Phi(q_{-i}, q_i) = \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{q_i} \big(V_i(q_{-i}, x_i) - V_i(q_{-i}, q_i)\big),$$

varav följer att

$$V_i(q_{-i}, x_i) - V_i(q_{-i}, q_i) > 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi(q_{-i}, x_i) - \Phi(q_{-i}, q_i) > 0.$$

Cournotmodellen är med andra ord ett ordinalt potentialspel.

Antag nu att den inversa efterfrågefunktionen P är kontinuerlig, att $P(Q) > c$ för något utbud Q och att $P(Q) < c$ för alla tillräckligt stora utbud Q. Under dessa högst realistiska antaganden har den ordinala potentialfunktionen Φ säkert ett maximum, ty den kontinuerliga funktionen Φ är negativ utanför en tillräckligt stor hyperkub $[0, K]^n$ och positiv i någon punkt i kuben. I maximipunkten $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$ är vidare $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \cdots = \bar{q}_n$, ty det följer av olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde att

$$\Phi(\hat{q}, \hat{q}, \ldots, \hat{q}) \geq \Phi(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n)$$

om $\hat{q} = (\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \cdots + \bar{q}_n)/n$, med sträng olikhet om inte alla $\bar{q}_i$ är lika. Under våra antaganden har därför Cournots modell på grund av sats 4.2.1 en symmetrisk Nashjämvikt $\bar{q}$, och om den inversa efterfrågefunktionen är deriverbar, så får vi $\bar{q}_1$ som lösning till ekvationen

$$xP'(nx) + P(nx) = c. \qquad \square$$

Definition 4.2.2 Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett godtyckligt strategiskt spel och sätt som vanligt $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Med en *väg γ från $a \in A$ till $b \in A$* menas en följd $(a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$ av utfall med $a^{(0)} = a$ och $a^{(m)} = b$, som är sådan att koordinaterna $a_i^{(k-1)}$ och $a_i^{(k)}$ i två konsekutiva utfall $a^{(k-1)}$ och $a^{(k)}$ är lika för samtliga platsindex i utom ett, som vi betecknar i_k. Detta betyder att spelare i_k är den enda spelare som byter handling i steget från $a^{(k-1)}$ till $a^{(k)}$.

Vägen γ:s *längd* är lika med m, dvs. lika med antalet utfall i vägen minskat med 1.

Vägen kallas en *cykel* om den börjar och slutar i samma utfall, dvs. om $a = b$.

En väg från a till b kallas *enkel* om alla utfallen i vägen är skilda, utom eventuellt startpunkten a och slutpunkten b.

Vi tillåter vägar av längd 0. En sådan väg består av bara ett utfall och är då också en enkel cykel. Om a och b är två utfall som bara skiljer sig åt i en koordinat, så är också (a, b, a) en enkel cykel.

Givet en väg $\gamma_1 = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ från a till b och en väg $\gamma_2 = (b^{(0)}, b^{(1)}, \dots, b^{(k)})$ från b till c, där alltså speciellt $a^{(m)} = b = b^{(0)}$, betecknar $\gamma_1 + \gamma_2$ den väg från a till c som fås genom att börja med vägen γ_1 och sedan fortsätta utefter vägen γ_2, dvs. vägen $(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}, b^{(1)}, \dots, b^{(k)})$ från a till c.

Med $-\gamma_1$ menas förstås vägen γ_1 genomlöpt baklänges från b till a, dvs. vägen $(a^{(m)}, a^{(m-1)}, \dots, a^{(1)}, a^{(0)})$.

Definition 4.2.3 Vägen $\gamma = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ kallas en *förbättringsväg* om det för varje k med $1 \le k \le m$ gäller att $u_{i_k}(a^{(k)}) > u_{i_k}(a^{(k-1)})$.

Utefter en förbättringsväg ökar med andra ord nyttan för den spelare i_k som vid övergången från utfallet $a^{(k-1)}$ till utfallet $a^{(k)}$ byter handling.

En förbättringsväg från a till b kan uppenbarligen förlängas som förbättringsväg från slutpunkten b om och endast om b inte är en Nashjämvikt. Varje förbättringsväg som inte går att förlänga som förbättringsväg måste därför sluta i en Nashjämvikt.

Definition 4.2.4 Ett spel säges ha *FIP-egenskapen* (finite improvement path-egenskapen) om det inte finns någon förbättringsväg som kan förlängas till godtyckligt långa förbättringsvägar.

Eftersom en maximalt förlängd förbättringsväg måste sluta i en Nashjämvikt, har spel med FIP-egenskapen minst en Nashjämvikt.

Förbättringsvägar ger spelarna i spel med FIP-egenskapen som spelas ett upprepat antal gånger en möjlighet att finna en Nashjämvikt, om varje gång en av spelarna ges tillfälle att förbättra sin nytta genom att byta handling. Spelet kommer då så småningom att sluta i en Nashjämvikt.

Sats 4.2.2 *Varje ändligt ordinalt potentialspel har FIP-egenskapen.*

Bevis. I ett spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ med ordinal potentialfunktion Φ är följden $\big(\Phi(a^{(k)})\big)_{k=0}^{m}$ strikt växande för varje förbättringsväg $(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ eftersom $u_{i_k}(a^{(k)}) > u_{i_k}(a^{(k-1)})$ medför att $\Phi(a^{(k)}) > \Phi(a^{(k-1)})$.

I ett ändligt ordinalt potentialspel är därför varje förbättringsvägs längd begränsad av antalet element i Φ:s definitionsmängd A. □

EXEMPEL 4.2.3 Spelet Krona eller klave med nyttotabellen

	Kr	Kl
Kr	$(1,-1)$	$(-1,1)$
Kl	$(-1,1)$	$(1,-1)$

saknar FIP-egenskapen, ty förbättringscykeln

$$\gamma = \big((Kr, Kr), (Kr, Kl), (Kl, Kl), (Kl, Kr), (Kr, Kr)\big)$$

kan förlängas med hur många varv som helst till en förbättringsväg $\gamma + \gamma + \cdots + \gamma$ av godtycklig längd. Spelet saknar ju också Nashjämvikt. □

Definition 4.2.5 Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett godtyckligt strategiskt spel. Till varje väg $\gamma = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ i A associerar vi ett tal $I(\gamma)$, vägens *index*, genom att sätta

$$I(\gamma) = \sum_{k=1}^{m} \big(u_{i_k}(a^{(k)}) - u_{i_k}(a^{(k-1)})\big),$$

där som tidigare i_k är den unika plats där vektorerna $a^{(k-1)}$ och $a^{(k)}$ skiljer sig åt.

För en trivial väg, som bara består av ett utfall, är ovanstående summa tom och index per definition därför lika med 0.

Uppenbarligen är $I(-\gamma) = -I(\gamma)$, och för summan $\gamma_1 + \gamma_2$, där den första vägen slutar där den andra börjar, gäller att $I(\gamma_1 + \gamma_2) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$.

Om spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ har en exakt potentialfunktion Φ, så är

$$u_{i_k}(a^{(k)}) - u_{i_k}(a^{(k-1)}) = \Phi(a^{(k)}) - \Phi(a^{(k-1)}),$$

och för varje väg $\gamma = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)})$ från $a = a^{(0)}$ till $b = a^{(m)}$ är därför

$$I(\gamma) = \sum_{k=1}^{m} \big(\Phi(a^{(k)}) - \Phi(a^{(k-1)})\big) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2}$$

Om ett spel har en potentialfunktion Φ så är uppenbarligen också $\Phi + C$ en potentialfunktion för varje konstant C. Detta är också det enda sättet att bilda nya exakta potentialfunktioner, ty vi har följande resultat.

Sats 4.2.3 *Om Φ och Ψ är två exakta potentialfunktioner till ett strategiskt spel, så finns det en konstant C sådan att $\Psi = \Phi + C$.*

Bevis. Fixera ett utfall $a \in A$ och välja givet $b \in A$ en väg γ_b från a till b. Då är på grund av ekvation (2)

$$\Psi(b) - \Psi(a) = I(\gamma_b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

dvs. $\Psi(b) = \Phi(b) + \Psi(a) - \Phi(a)$, så satsen gäller med $C = \Psi(a) - \Phi(a)$. □

Korollarium 4.2.4 *I ett potentialspel finns det för varje utfall a en entydigt bestämd potentialfunktion Ψ_a sådan att $\Psi_a(a) = 0$. För varje utfall b och varje väg γ_b från a till b är $\Psi_a(b) = I(\gamma_b)$.*

Bevis. Låt Φ vara en godtycklig potentialfunktion i spelet. Då är också $\Psi_a = \Phi - \Phi(a)$ en potentialfunktion och $\Psi_a(a) = 0$, och enligt ekvation (2) är $I(\gamma_b) = \Psi_a(b) - \Psi_a(a) = \Psi_a(b)$ för varje väg från a till b. □

Den som har studerat lite fysik bör notera följande analogi mellan vägindex och det fysiska begreppet arbete. Låt mängden A av alla möjliga utfall svara mot det fysiska rummet, nyttovektorerna $(u_1(a), u_2(a), \dots, u_n(a))$ svara mot krafter i rummet, och vägarna γ svara mot kurvor i rummet. Då motsvaras vägindex $I(\gamma)$ av det arbete som kraftfältet uträttar utefter kurvan, och matematiskt ges detta arbete av en kurvintegral. För konservativa kraftfält, dvs. kraftfält som inte uträttar något arbete utefter slutna kurvor, finns det en potentialfunktion med vars hjälp arbetet utefter en godtycklig kurva ges som differensen av potentialfunktionens värden i slut- och begynnelsepunkterna. Nästa sats beskriver motsvarande spelteoretiska resultat, och satsen bevis är helt analogt med beviset för motsvarande fysikaliska resultat.

Sats 4.2.5 *Följande fyra villkor är ekvivalenta för ett spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$:*

(i) Spelet är ett potentialspel.
(ii) Varje cykels index är lika med 0.
(iii) Varje enkel cykels index är lika med 0.
(iv) Varje enkel cykel av längd 4 har index 0.

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Antag att spelet har en potentialfunktion Φ. Då följer det omedelbart av ekvation (2) att $I(\gamma) = 0$ för varje cykel γ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) och (iii) $\Rightarrow$ (iv): Trivialt.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Antag att varje enkel cykel av längd 4 har index 0. Fixera ett utfall $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, och låt $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vara ett godtyckligt utfall.

Korollarium 4.2.4 antyder att vi får en potentialfunktion Φ genom att definiera $\Phi(b)$ som index för en godtycklig väg från a till b. Problemet är att vi inte under rådande förutsättningar kan vara säkra på att denna definition är entydig, dvs. att två olika vägar γ_b och γ'_b från a till b har samma index. Om vi hade utgått från förutsättning (ii) så hade saken varit klar, ty $\gamma'_b - \gamma_b$ är en cykel, och om alla cykler har index 0, så är $I(\gamma_b') - I(\gamma_b) = I(\gamma_b' - \gamma_b) = 0$. Vi kan komma runt denna svårighet genom att för varje utfall b definiera en unik väg från a till b och definiera $\Phi(b)$ som index för denna väg. Detta gör att vi sedan klarar oss med förutsättningen att varje enkel cykel av längd 4 har index 0 för att visa att den erhållna funktionen Φ är en potentialfunktion.

Vi definierar därför utfallen $b^{(k)}$ rekursivt för $k = 0, 1, \dots, n$ genom att sätta

$$b^{(k)} = \begin{cases} a & \text{för } k = 0, \\ (b^{(k-1)}_{-k}, b_k) & \text{för } k \geq 1. \end{cases}$$

Detta innebär att $b^{(1)} = (b_1, a_2, \dots, a_n)$, $b^{(2)} = (b_1, b_2, a_3, \dots, a_n)$, $\dots$, $b^{(n)} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = b$. Det är spelare k som, om $b_k \neq a_k$, byter handlingsalternativ i steget från $b^{(k-1)}$ till $b^{(k)}$. Om $b_k = a_k$, är $b^{(k-1)} = b^{(k)}$.

Vi definierar sedan funktionen $\Phi\colon A \to \mathbf{R}$ genom att sätta

$$\Phi(b) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(u_k(b^{(k)}) - u_k(b^{(k-1)})\bigr).$$

Funktionsvärdet $\Phi(b)$ är lika med index $I(\Gamma_b)$ för den entydigt definierade väg Γ_b från a till b som fås genom att i följden $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)}$ stryka eventuella dubbleringar. Sådana förekommer om $b_k = a_k$ för något k.

Vi ska visa att Φ är en potentialfunktion. Låt för den skull x_i vara en godtycklig handling i A_i, sätt $c = (b_{-i}, x_i)$ och notera att

$$c^{(k)} = \begin{cases} b^{(k)} & \text{för } k = 0, 1, \dots, i-1, \\ (b^{(k)}_{-i}, x_i) & \text{för } k = i, i+1, \dots, n. \end{cases}$$

Vi har att visa att

$$\Phi(c) - \Phi(b) = u_i(c) - u_i(b). \tag{3}$$

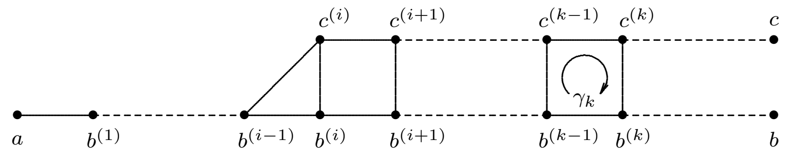
Om $x_i = b_i$ så att $c = b$ är förstås saken klar. Så antag att $x_i \neq b_i$. För alla index $k \geq i+1$ är då $b^{(k-1)} \neq c^{(k-1)}$, $b^{(k)} \neq c^{(k)}$ och $b^{(k-1)} \neq c^{(k)}$, ty $b_i^{(k-1)} = b_i^{(k)} = b_i$ och $c_i^{(k-1)} = c_i^{(k)} = x_i$. Eftersom $b_k^{(k-1)} = c_k^{(k-1)} = a_k$ och $b_k^{(k)} = c_k^{(k)} = b_k$ är vidare $b^{(k-1)} \neq b^{(k)}$ och $c^{(k-1)} \neq c^{(k)}$ om $b_k \neq a_k$.

För $k \geq i+1$ och $b_k \neq a_k$ är därför $\gamma_k = (b^{(k-1)}, c^{(k-1)}, c^{(k)}, b^{(k)}, b^{(k-1)})$ en enkel cykel av längd 4. Se figur 4.2. Cykelns index är

$$\begin{aligned} I(\gamma_k) &= \bigl(u_i(c^{(k-1)}) - u_i(b^{(k-1)})\bigr) + \bigl(u_k(c^{(k)}) - u_k(c^{(k-1)})\bigr) \\ &\quad + \bigl(u_i(b^{(k)}) - u_i(c^{(k)})\bigr) + \bigl(u_k(b^{(k-1)}) - u_k(b^{(k)})\bigr), \end{aligned}$$

och eftersom enkla cykler av längd 4 har index 0, är $I(\gamma_k) = 0$ vilket efter omstuvning ger oss sambandet

$$\begin{aligned} u_k(c^{(k)}) - u_k(c^{(k-1)}) &= \bigl(u_k(b^{(k)}) - u_k(b^{(k-1)})\bigr) \\ &\quad + \bigl(u_i(c^{(k)}) - u_i(b^{(k)})\bigr) - \bigl(u_i(c^{(k-1)}) - u_i(b^{(k-1)})\bigr). \end{aligned} \tag{4}$$



Figur 4.2. Illustration till beviset för sats 4.2.5. För den övre vägen Γ_c från a till c är $\Phi(c) = I(\Gamma_c)$, och för den undre vägen Γ_b från a till b är $\Phi(b) = I(\Gamma_b)$.

Detta samband är trivialt uppfyllt för $k \geq i+1$ också i fallet $b_k = a_k$, ty då är $b^{(k-1)} = b^{(k)}$ och $c^{(k-1)} = c^{(k)}$.

Genom att addera likheterna i ekvation (4) för $k = i+1, i+2, \dots n$ samt notera att $c^{(n)} = c$ och $b^{(n)} = b$ erhåller vi följande resultat:

$$\begin{aligned}\sum_{k=i+1}^{n} \bigl(u_k(c^{(k)}) - u_k(c^{(k-1)})\bigr) = \sum_{k=i+1}^{n} \bigl(u_k(b^{(k)}) - u_k(b^{(k-1)})\bigr) + \bigl(u_i(c) - u_i(b)\bigr) \\ - \bigl(u_i(c^{(i)}) - u_i(b^{(i)})\bigr).\end{aligned}$$

För $k < i$ är $c^{(k)} = b^{(k)}$, vilket medför att

$$\sum_{k=1}^{i-1} \bigl(u_k(c^{(k)}) - u_k(c^{(k-1)})\bigr) = \sum_{k=1}^{i-1} \bigl(u_k(b^{(k)}) - u_k(b^{(k-1)})\bigr).$$

Addera nu summan ovan från 1 till $i-1$ till summan från $i+1$ till n, och lägg till den saknade termen $\bigl(u_i(c^{(i)}) - u_i(c^{(i-1)})\bigr)$, samt notera att $c^{(i-1)} = b^{(i-1)}$. Detta ger oss slutresultatet

$$\begin{aligned}\Phi(c) &= \sum_{k=1}^{n} \bigl(u_k(c^{(k)}) - u_k(c^{(k-1)})\bigr) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \bigl(u_k(b^{(k)}) - u_k(b^{(k-1)})\bigr) + \bigl(u_i(c) - u_i(b)\bigr) - \bigl(u_i(c^{(i)}) - u_i(b^{(i)})\bigr) \\ &\quad + \bigl(u_i(c^{(i)}) - u_i(c^{(i-1)})\bigr) - \bigl(u_i(b^{(i)}) - u_i(b^{(i-1)})\bigr) \\ &= \Phi(b) + u_i(c) - u_i(b),\end{aligned}$$

som innebär att ekvation (3) gäller och visar att Φ är en potentialfunktion. □

Exempel 4.2.4 I avsnitt 2.1 diskuterade vi spelet Hjortjakten. Det är ett strategiskt spel med n spelare, där varje spelare har två handlingsalternativ, Ha: att jaga hare, och Hj: att jaga hjort. Varje spelare föredrar att samtliga spelare jagar hjort, men det är bättre för varje spelare att jaga hare än att jaga hjort om inte alla jagar hjort. Preferensen hos spelare i beskrivs av följande nyttofunktion u_i:

$$u_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 2 & \text{om } a_j = \mathit{Hj} \text{ för alla spelare } j, \\ 1 & \text{om } a_i = \mathit{Ha}, \\ 0 & \text{om } a_i = \mathit{Hj} \text{ och } a_j = \mathit{Ha} \text{ för någon spelare } j. \end{cases}$$

I en enkel cykel av längd 4 i Hjortjakten är bara två spelare aktivt inblandade, och dessa byter omväxlande mellan alternativen *Hj* och *Ha*. Låt oss utan inskränkning anta att det är spelarna 1 och 2 som är inblandade, att cykeln startar med att båda har valt alternativet *Hj* samt att det är spelare 1 som börjar byta. Cykeln γ har då följande utseende:

$$\big((\mathit{Hj}, \mathit{Hj}, b), (\mathit{Ha}, \mathit{Hj}, b), (\mathit{Ha}, \mathit{Ha}, b), (\mathit{Hj}, \mathit{Ha}, b), (\mathit{Hj}, \mathit{Hj}, b)\big),$$

där b är en godtycklig handlingsvektor för övriga $n-2$ spelare. Beroende på om vektorn b bara innehåller alternativet *Hj* eller innehåller minst ett *Ha* är cykelindex $I(\gamma) = -1+1-1+1 = 0$ resp. $I(\gamma) = 1+1-1-1 = 0$.

Samtliga enkla cykler av längd 4 har med andra ord index 0, så Hjortjakten är ett potentialspel, och vi får en potentialfunktion Φ genom att definiera $\Phi(a) = I(\gamma_a)$ för en godtycklig väg γ_a från $a^{\mathit{Hj}} = (\mathit{Hj}, \mathit{Hj}, \ldots, \mathit{Hj})$ till $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Om $a_i = \mathit{Ha}$ för exakt k spelare i, där $1 \le k \le n$, så kan a nås från a^{Hj} med hjälp av en väg γ_a av längd k, där varje steg innebär att en ny spelare byter handling från *Hj* till *Ha*, vilket ökar nyttan med 1 i alla steg utom i det första, då nyttan istället minskar med 1. Vägindex $I(\gamma_a)$ är därför lika med $-1+(k-1)$, dvs. $I(\gamma_a) = k-2$. Detta ger oss följande potentialfunktion

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} 0 & \text{om } a_i = \mathit{Hj} \text{ för samtliga spelare } i, \\ k-2 & \text{om } a_i = \mathit{Ha} \text{ för } k \ge 1 \text{ stycken spelare } i. \end{cases} \qquad \square$$

Övningar

4.2 Är följande spel i avsnitt 2.1 potentialspel? Bestäm i förekommande fall en potentialfunktion.

a) Spelet Kampen mellan könen i exempel 2.1.2.

b) Spelet Hök eller duva i exempel 2.1.4.

4.3 Visa att spelet med utbetalningstabellen

	V	H
T	$(1,0)$	$(2,0)$
B	$(2,0)$	$(0,1)$

har FIP-egenskapen men inte är ett ordinalt potentialspel.

Kapitel 5

Blandade strategier

Betrakta den klassiska handleken *Sten-sax-påse* med utbetalningstabellen

	sten	*sax*	*påse*
sten	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
sax	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
påse	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Det är självklart att om man spelar detta spel många gånger, bör man byta alternativ då och då, eftersom motspelaren annars genast lär sig hur han ska göra för att vinna varje gång. Båda spelarna bör således välja sina alternativ slumpmässigt.

Antag att radspelaren väljer alternativen *sten, sax, påse* slumpmässigt med sannolikheterna α_1, α_2, α_3 och att kolonnspelaren väljer samma alternativ slumpmässigt och oberoende av radspelaren med sannolikheterna β_1, β_2, β_3. Sannolikheten att de ska välja alternativet $(\mathit{sten}, \mathit{sten})$ blir då $\alpha_1\beta_1$, sannolikheten för $(\mathit{sten}, \mathit{sax})$ blir $\alpha_1\beta_2$, osv. Den förväntade utbetalningen (genomsnittliga utbetalningen om spelet upprepas många gånger) till radspelaren blir då lika med

$$\tilde{u}_1(\alpha,\beta) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_3\beta_2.$$

Spelet är ett strikt konkurrensinriktat spel; för kolonnspelaren är den förväntade utbetalningen $\tilde{u}_2(\alpha,\beta) = -\tilde{u}_1(\alpha,\beta)$.

För exempelvis $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ och $\beta = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ blir

$$\tilde{u}_1(\alpha,\beta) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$

och $\tilde{u}_2(\alpha,\beta) = -\frac{1}{4}$, vilket är bra för radspelaren som i genomsnitt vinner $\frac{1}{4}$ varje gång och följaktligen inte så bra för kolonnspelaren. Naturligtvis finns det bättre strategier för kolonnspelaren.

Spelet Sten-sax-påse tjänar som motivering för att studera spel där spelarna väljer sina alternativ slumpmässigt enligt någon viss sannolikhetsfördelning eller, med andra ord, där spelarnas väljer lotterier.

5.1 Blandade strategier

Vi påminner om att med ett lotteri över en ändlig mängd A menas en sannolikhetsfördelning på A, och att mängden $\mathcal{L}(A)$ av alla lotterier över en mängd A med n stycken element kan identifieras med den kompakta och konvexa delmängden $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n_+ \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$ av $\mathbf{R}^n$. Lotterimängden $\mathcal{L}(A)$ är således kompakt och konvex.

De n stycken hörnpunkterna $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, …, $(0, 0, \dots, 1)$ i M svarar mot de "säkra" lotterierna δ_a i $\mathcal{L}(A)$, som ger elementet a med sannolikhet 1. Som vi nämnde redan i avsnitt 1.3 kommer vi att identifiera lotteriet δ_a med elementet a och använda samma beteckning, utom i de fall då vi behöver vara särskilt tydliga. Detta gör att A kan uppfattas som en delmängd av lotterimängden $\mathcal{L}(A)$.

Definition 5.1.1 Med en *blandad strategi* för spelare i i det ändliga strategiska spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ menas ett lotteri p_i över mängden A_i. Mängden av spelarens alla blandade strategier, dvs. alla lotterier över A_i, kommer som tidigare att betecknas $\mathcal{L}(A_i)$.

Med en *ren strategi* för spelare i menas ett lotteri av typen δ_{a_i}, dvs. ett lotteri som ger resultatet $a_i \in A_i$ helt säkert.

Antag att spelarna i spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ väljer sina handlingar i mängderna A_i *oberoende av varandra* med hjälp av lotterierna $p_i \in \mathcal{L}(A_i)$. Detta betyder att sannolikheten för att handlingsvektorn

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ska bli vald är

$$P(a) = p_1(a_1)p_2(a_2)\cdots p_n(a_n).$$

Funktionen P är ett sannolikhetsmått, dvs. med vår terminologi ett *lotteri*, på produktmängden $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, och vi kallar detta lotteri för *produktlotteriet* av de givna lotterierna p_i och skriver

$$P = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n.$$

Observera speciellt att för $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ är produktlotteriet av de säkra lotterierna δ_{a_1}, δ_{a_2}, …, δ_{a_n} lika med det säkra lotteriet δ_a på A, som resulterar i utfallet a med sannolikhet 1.

Om u är en funktion som är definierad på produktmängden A, kan vi förstås bilda väntevärdet av funktionen u med avseende på produktlotteriet $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$. Detta väntevärde betecknas $\tilde{u}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, och enligt definitionen av väntevärde är

$$\tilde{u}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \dots \sum_{a_n \in A_n} u(a_1, a_2, \dots, a_n) p_1(a_1) p_2(a_2) \cdots p_n(a_n).$$

Funktionen $(p_1, p_2, \dots, p_n) \mapsto \tilde{u}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ är definierad på produktmängden $\mathcal{L}(A_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(A_n)$, som kan uppfattas som en konvex, kompakt delmängd av något $\mathbf{R}^m$. Funktionen är kontinuerlig och affin i varje variabel för sig, dvs.

$$\tilde{u}(p_{-i}, \alpha p_i + \beta q_i) = \alpha\tilde{u}(p_{-i}, p_i) + \beta\tilde{u}(p_{-i}, q_i)$$

om α och β är icke-negativa tal med summa 1.

Om samtliga spelare i väljer rena strategier δ_{a_i}, så blir förstås väntevärdet $\tilde{u}(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n})$ av funktionen u lika med $u(a_1, a_2, \dots, a_n)$, dvs. med konventionen att identifiera säkra lotterier med motsvarande handlingar är

$$\tilde{u}(a_1, a_2, \dots, a_n) = u(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

En strategikombination, som vi ibland kommer att betrakta, är den att spelare i väljer en blandad strategi p_i medan alla övriga spelare k väljer rena strategier a_k. Väntevärdet $\tilde{u}(a_{-i}, p_i)$ av funktionen u blir nu

$$\tilde{u}(a_{-i}, p_i) = \sum_{a_i \in A_i} u(a_{-i}, a_i) p_i(a_i).$$

I termer av dessa kan vi nu uttrycka väntevärdet $\tilde{u}(q_{-i}, p_i)$ för en godtycklig vektor q_{-i} av blandade strategier som

$$\tilde{u}(q_{-i}, p_i) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \tilde{u}(a_{-i}, p_i) q_1(a_1) \cdots \widehat{q_i(a_i)} \cdots q_n(a_n),$$

där cirkumflexen över $q_i(a_i)$ betyder att den termen i produkten ska utelämnas. Väntevärdet $\tilde{u}(q_{-i}, p_i)$ är med andra ord ett viktat medelvärde av alla väntevärden $\tilde{u}(a_{-i}, p_i)$ som fås genom att låta a_{-i} genomlöpa A_{-i}, och härav följer att

$$\tilde{u}(q_{-i}, p_i) \geq \min_{a_{-i} \in A_{-i}} \tilde{u}(a_{-i}, p_i) \tag{1}$$

för alla blandade strategivektorer q_{-i}.

5.2 Den blandade utvidgningen

Definition 5.2.1 Låt $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ vara ett ändligt strategiskt spel med kardinala nyttofunktioner u_i. Spelet $\widetilde{G} = \langle N, (\mathcal{L}(A_i)), (\tilde{u}_i) \rangle$

- med samma mängd N av spelare;
- för varje spelare $i \in N$ lotterimängden $\mathcal{L}(A_i)$ som handlingsmängd;
- för varje spelare $i \in N$ den förväntade nyttan $\tilde{u}_i$ som nyttofunktion;

kallas den *blandade utvidgningen av spelet* G.

Vi förutsätter alltså här och i fortsättningen att nyttofunktionerna u_i i ursprungsspelet G är kardinala, ty annars är det inte särskilt meningsfullt att bilda den förväntade nyttan $\tilde{u}_i$.

Med hjälp av den blandade utvidgningen kan vi nu omedelbart generalisera ett antal begrepp och resultat för handlingar i strategiska spel G till att gälla för blandade strategier, som ju inte är någonting annat än handlingar i utvidgningen $\widetilde{G}$.

Definition 5.2.2 Med en *blandad Nashjämvikt* $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ i ett ändligt strategiskt spel $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ menas en Nashjämvikt i spelets blandade utvidgning $\widetilde{G} = \langle N, (\mathcal{L}(A_i)), (\tilde{u}_i)\rangle$

En blandad Nashjämvikt som bara består av rena strategier kallas en *ren Nashjämvikt.*

Blandade Nashjämvikter kan förstås karakteriseras med hjälp av bästasvarsmängder i $\widetilde{G}$. Givet en vektor p_{-i} av blandade strategier för samtliga spelare utom spelare i definierar vi spelare i:s *bästasvarsmängd* $\widetilde{B}_i(p_{-i})$ *av blandade strategier* som spelarens bästasvarsmängd i det utvidgade spelet, dvs.

$$\widetilde{B}_i(p_{-i}) = \{q_i \in \mathcal{L}(A_i) \mid \tilde{u}_i(p_{-i}, q_i) \geq \tilde{u}_i(p_{-i}, r_i) \quad \text{för alla } r_i \in \mathcal{L}(A_i)\}.$$

Det följer nu omedelbart av sats 2.2.1 att en vektor p^* av blandade strategier i spelet $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ är en blandad Nashjämvikt om och endast om $p_i^* \in \widetilde{B}_i(p_{-i}^*)$ för alla spelare i.

Satsen med stort S i teorin för ändliga strategispel är följande existenssats av John Nash.

Sats 5.2.1 *Varje ändligt strategiskt spel har (minst) en blandad Nashjämvikt.*

Bevis. Satsen är ett korollarium till Nashs sats (sats 2.3.3) eftersom den blandade utvidgningen till spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ uppfyller förutsättningarna i Nashs sats; mängderna $\mathcal{L}(A_i)$ är konvexa och kompakta, och de förväntade nyttofunktionerna $\tilde{u}_i$ är kontinuerliga och affina i den i:te variabeln och följaktligen kvasikonkava. □

Vi ska nu illustrera Nashs sats genom att bestämma samtliga blandade Nashjämvikter i några enkla strategispel med två spelare. Vi kommer att utnyttja karakteriseringen av Nashjämvikten i termer av bästasvarsmängder. I de fall då båda spelarna har två handlingsalternativ får man en enkel grafisk lösning.

Exempel 5.2.1 Betrakta följande spel

	V	H
T	$(3,3)$	$(0,2)$
B	$(2,1)$	$(5,5)$

Spelet har två Nashjämvikter, nämligen (T,V) och (B,H). För att bestämma alla blandade Nashjämvikter låter vi $p_1 = (\alpha, 1-\alpha)$ och $p_2 = (\beta, 1-\beta)$ vara två godtyckliga blandade strategier för rad- respektive kolonnspelaren. Motsvarande förväntade nyttofunktioner är

$$\tilde{u}_1(p_1,p_2) = 3\alpha\beta + 2(1-\alpha)\beta + 5(1-\alpha)(1-\beta) = 5 - 3\beta + (6\beta-5)\alpha$$

och

$$\begin{aligned}\tilde{u}_2(p_1,p_2) &= 3\alpha\beta + 2\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)\beta + 5(1-\alpha)(1-\beta)\\ &= 5 - 3\alpha + (5\alpha-4)\beta.\end{aligned}$$

Bästasvarsmängden $\widetilde{B}_1(p_2)$ består av de lotterier p_1 som maximerar funktionen $\tilde{u}_1(p_1,p_2)$, och $\tilde{u}_1(p_1,p_2) = 5 - 3\beta + (6\beta-5)\alpha$ maximeras uppenbarligen av $\alpha = 1$ om $\beta > \frac{5}{6}$, av alla tal $0 \le \alpha \le 1$ om $\beta = \frac{5}{6}$, och av $\alpha = 0$ om $\beta < \frac{5}{6}$. Detta innebär att

$$\widetilde{B}_1(\beta, 1-\beta) = \begin{cases}\{(0,1)\} & \text{om } \beta < \frac{5}{6},\\ \{(\alpha, 1-\alpha) \mid 0 \le \alpha \le 1\} & \text{om } \beta = \frac{5}{6},\\ \{(1,0)\} & \text{om } \beta > \frac{5}{6}.\end{cases}$$

Helt analogt fås

$$\widetilde{B}_2(\alpha, 1-\alpha) = \begin{cases}\{(0,1)\} & \text{om } \alpha < \frac{4}{5},\\ \{(\beta, 1-\beta) \mid 0 \le \beta \le 1\} & \text{om } \alpha = \frac{4}{5},\\ \{(1,0)\} & \text{om } \alpha > \frac{4}{5}.\end{cases}$$

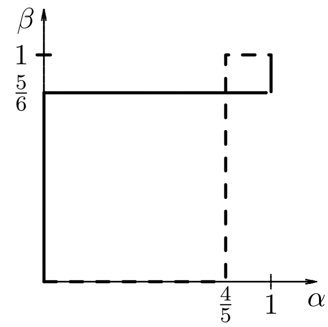
I ett koordinatsystem ritar vi nu de båda kurvorna

$$\{(\alpha,\beta) \mid (\alpha, 1-\alpha) \in \widetilde{B}_1(\beta, 1-\beta)\} \text{ och } \{(\alpha,\beta) \mid (\beta, 1-\beta) \in \widetilde{B}_2(\alpha, 1-\alpha)\}.$$

I figur 5.1 är den förstnämnda kurvan heldragen och den andra kurvan streckad.

De båda kurvornas skärningspunkter (α,β) svarar mot blandade strategier $p_1 = (\alpha, 1-\alpha)$ och $p_2 = (\beta, 1-\beta)$ för vilka $p_1 \in \widetilde{B}_1(p_2)$ och $p_2 \in \widetilde{B}_2(p_1)$, dvs. mot de blandade Nashjämvikterna.

I det aktuella exemplet skär kurvorna varandra i tre punkter, nämligen $(\alpha,\beta) = (0,0)$, $(\frac{4}{5}, \frac{5}{6})$ och $(1,1)$, och det innebär att spelet har de tre blandade Nashjämvikterna $\big((0,1),(0,1)\big)$, $\big((1,0),(1,0)\big)$ och $\big((\frac{4}{5},\frac{1}{5}),(\frac{5}{6},\frac{1}{6})\big)$. De båda förstnämnda Nashjämvikterna består av rena strategier, nämligen (δ_B, δ_H) och (δ_T, δ_V), och innebär att spelarna ska välja handlingsvektorn (B,H) resp. handlingsvektorn (T,V) helt säkert.



Figur 5.1. Bästasvarsmängderna i exempel 5.2.1.

I de rena Nashjämvikterna är den förväntade nyttan för de båda spelarna

$$\tilde{u}_1(B,H) = u_1(B,H) = 5 \quad \text{och} \quad \tilde{u}_2(B,H) = u_2(B,H) = 5,$$

respektive

$$\tilde{u}_1(T,V) = u_1(T,V) = 3 \quad \text{och} \quad \tilde{u}_2(T,V) = u_2(T,V) = 3.$$

I den tredje blandade Nashjämvikten $(p_1^*, p_2^*) = \big((\frac{4}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})\big)$ är den förväntade nyttan

$$\tilde{u}_1(p_1^*, p_2^*) = \tfrac{5}{2} \quad \text{och} \quad \tilde{u}_2(p_1^*, p_2^*) = \tfrac{13}{5}.$$

Båda spelarnas förväntade nytta är således mindre i den blandade Nashjämvikten än i de rena Nashjämvikterna. □

I exemplet ovan överlevde det ursprungliga spelets två Nashjämvikter som rena Nashjämvikter i den blandade utvidgningen av spelet. Detta är ingen tillfällighet; vi har nämligen följande allmänna resultat.

Sats 5.2.2 *I ett ändligt strategispel är utfallet $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ en Nashjämvikt om och endast om motsvarande utfall $(\delta_{a_1^*}, \delta_{a_2^*}, \dots, \delta_{a_n^*})$ är en ren Nashjämvikt i spelets blandade utvidgning.*

Bevis. I fortsättningen använder vi samma beteckning $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ för ett utfall i det ursprungliga spelet G och för utfallet $(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n})$ i spelets blandade utvidgning $\widetilde{G}$, och skriver således också $\tilde{u}_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$, eller kortare $\tilde{u}_i(a)$, istället för $\tilde{u}_i(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \dots, \delta_{a_n})$.

Antag nu först att a^* är en ren Nashjämvikt i den blandade utvidgningen. Då är per definition

$$u_i(a^*) = \tilde{u}_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq \tilde{u}_i(a_{-i}^*, p_i)$$

för alla spelare i och alla lotterier $p_i \in \mathcal{L}(A_i)$, och speciellt gäller detta för alla säkra lotterier av typen $p = \delta_{a_i}$, vilket betyder att

$$u_i(a^*) \geq \tilde{u}_i(a_{-i}^*, a_i) = u_i(a_{-i}^*, a_i) \tag{2}$$

för alla $a_i \in A_i$. Detta visar att utfallet a^* är en Nashjämvikt i det ursprungliga spelet.

Antag omvänt att utfallet a^* är en Nashjämvikt i G, dvs. att olikheten (2) gäller för alla spelare i och alla $a_i \in A_i$. Låt nu p_i vara en godtycklig blandad strategi för spelare i, dvs. ett godtyckligt lotteri över A_i. Genom att multiplicera olikheten (2) med $p_i(a_i)$ samt addera de erhållna olikheterna då a_i genomlöper mängden A_i får man den nya olikheten

$$(3) \qquad \sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(a^*)p_i(a_i) \geq \sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(a^*_{-i}, a_i)p_i(a_i) = \sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(a^*_{-i}, \delta_{a_i})p_i(a_i).$$

Nu är

$$\sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(a^*)p_i(a_i) = \tilde{u}_i(a^*) \sum_{a_i \in A_i} p_i(a_i) = \tilde{u}_i(a^*)$$

och

$$\sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(a^*_{-i}, \delta_{a_i})p_i(a_i) = \tilde{u}_i\big(a^*_{-i}, \sum_{a_i \in A_i} p_i(a_i)\delta_{a_i}\big) = \tilde{u}_i(a^*_{-i}, p_i),$$

varför olikheten (3) betyder att $\tilde{u}_i(a^*) \geq \tilde{u}_i(a^*_{-i}, p_i)$ för alla lotterier p_i i $\mathcal{L}(A_i)$. Detta visar att utfallet a^* är en ren Nashjämvikt i den blandade utvidgningen av spelet. □

Övningar

5.1 Bestäm samtliga blandade Nashjämvikter i spelet Fångarnas dilemma.

5.2 Beräkna samtliga blandade Nashjämvikter i spelet Kampen mellan könen.

5.3 Bestäm samtliga blandade Nashjämvikter i följande spel

	V	H
T	$(2,2)$	$(0,2)$
B	$(2,1)$	$(6,6)$

5.3 Likgiltighetsprincipen

I exempel 5.2.1 bestämde vi Nashjämvikterna till spelet

	V	H
T	$(3,3)$	$(0,2)$
B	$(2,1)$	$(5,5)$

och fann att det förutom de två rena Nashjämvikterna (T, V) och (B, H) också har en blandad Nashjämvikt p^* med $p_1^* = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ och $p_2^* = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.

Om spelare 2 väljer sin Nashstrategi p_2^*, så erhåller spelare 1 samma förväntade nytta oavsett om han väljer handlingen T eller handlingen B, ty

$$3 \cdot \tfrac{5}{6} + 0 \cdot \tfrac{1}{6} = 2 \cdot \tfrac{5}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{2}.$$

På motsvarande sätt får spelare 2 samma förväntade utdelning när spelare 1 väljer sin Nashstrategi, oavsett om spelare 2 väljer V eller H, eftersom

$$3 \cdot \tfrac{4}{5} + 1 \cdot \tfrac{1}{5} = 2 \cdot \tfrac{4}{5} + 5 \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{13}{5}.$$

Att så är fallet är inte någon tillfällighet på grund av följande allmängiltiga ”likgiltighetsprincip” för Nashjämvikter.

Sats 5.3.1 (Likgiltighetsprincipen) *Låt $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ vara en vektor av blandade strategier för spelarna i ett ändligt spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$.*

(i) Om p^* är en blandad Nashjämvikt, så gäller det för varje spelare i och varje handling $a_i \in A_i$ att

$$p_i^*(a_i) > 0 \ \Rightarrow\ \tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) = \tilde{u}_i(p^*).$$

Alla handlingar som förekommer med positiv sannolikhet i spelarens jämviktsstrategi ger honom således samma förväntade nytta.

(ii) Omvänt, om det för varje spelare i finns en konstant c_i så att

$$\begin{cases} p_i^*(a_i) > 0 \ \Rightarrow\ \tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) = c_i \\ p_i^*(a_i) = 0 \ \Rightarrow\ \tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) \le c_i \end{cases} \tag{4}$$

så är p^* en blandad Nashjämvikt.

Bevis. (i) Sätt $B_i = \{a_i \in A_i \mid p_i^*(a_i) > 0\}$; då är

$$\sum_{a_i \in B_i} p_i^*(a_i) = 1 \qquad \text{och} \qquad p_i^* = \sum_{a_i \in A_i} p_i^*(a_i)\delta_{a_i} = \sum_{a_i \in B_i} p_i^*(a_i)\delta_{a_i}.$$

På grund av linearitet är därför

$$\tilde{u}_i(p^*) = \tilde{u}_i(p_{-i}^*, p_i^*) = \sum_{a_i \in B_i} \tilde{u}_i(p_{-i}^*, \delta_{a_i}) p_i^*(a_i) = \sum_{a_i \in B_i} \tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) p_i^*(a_i). \tag{5}$$

Eftersom p^* är en blandad Nashjämvikt är speciellt $\tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) \le \tilde{u}_i(p^*)$ för alla $a_i \in B_i$, och om det råder strikt olikhet för något sådant a_i, så följer det genom insättning i ekvation (5) att

$$\tilde{u}_i(p^*) < \sum_{a_i \in B_i} \tilde{u}_i(p^*) p_i^*(a_i) = \tilde{u}_i(p^*) \sum_{a_i \in B_i} p_i^*(a_i) = \tilde{u}_i(p^*),$$

vilket förstås är en motsägelse. Alltså är $\tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) = \tilde{u}_i(p^*)$ för alla $a_i \in B_i$.

(ii) Antag omvänt att villkoret i (ii) är uppfyllt. För varje blandad strategi q_i för spelare i och varje handling $a_i \in A_i$ får vi då, genom att multiplicera olikheterna och likheterna i (4) med det icke-negativa talet $q_i(a_i)$, olikheterna

$$\tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i)q_i(a_i) \le c_i q_i(a_i),$$

och för den speciella strategin p^*_i gäller likhet för alla a_i:

$$\tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i)p^*_i(a_i) = c_i p^*_i(a_i).$$

Genom att nu summera dessa olikheter och likheter då a_i genomlöper A_i erhåller vi som resultat olikheten

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(p^*_{-i}, q_i) &= \sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i)q_i(a_i) \le \sum_{a_i \in A_i} c_i q_i(a_i) = c_i \\ &= \sum_{a_i \in A_i} c_i p^*_i(a_i) = \sum_{a_i \in A_i} \tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i)p^*_i(a_i) = \tilde{u}_i(p^*),\end{aligned}$$

som visar att p^* är en blandad Nashjämvikt. □

Exempel 5.3.1 Vi använder likgiltighetsprincipen för att bestämma Nashjämvikterna i spelet

	V	H
T	$(3,1)$	$(1,2)$
B	$(2,4)$	$(4,3)$

Vi konstaterar först att det inte finns några rena Nashjämvikter. Det finns heller på grund av likgiltighetsprincipen inte någon Nashjämvikt med exakt en ren strategi. Exempelvis är (T, p_2) inte en Nashjämvikt för något val av blandad strategi p_2 för spelare 2 beroende på att $u_2(T, V) = 1 \ne 2 = u_2(T, H)$, och de andra tre alternativen med en ren strategi är uteslutna av motsvarande skäl.

I en Nashjämvikt (p^*_1, p^*_2), där $p^*_1 = (\alpha, 1-\alpha)$ och $p^*_2 = (\beta, 1-\beta)$, är därför $0 < \alpha < 1$ och $0 < \beta < 1$, och det följer nu av likgiltighetsprincipen att $\tilde{u}_1(T, p^*_2) = \tilde{u}_1(B, p^*_2)$ och $\tilde{u}_2(p^*_1, V) = \tilde{u}_2(p^*_1, H)$, vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{aligned}3\beta + (1-\beta) &= 2\beta + 4(1-\beta)\\ \alpha + 4(1-\alpha) &= 2\alpha + 3(1-\alpha)\end{aligned}$$

med lösningen $\alpha = \frac{1}{2}$ och $\beta = \frac{3}{4}$. Spelet har således en unik blandad Nashjämvikt, nämligen den blandade strategivektorn $\big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\big)$. □

Övningar

5.4 Betrakta spelet

	k_1	k_2	k_3
r_1	$(2,*)$	$(1,*)$	$(5,*)$
r_2	$(1,*)$	$(3,*)$	$(4,*)$
r_3	$(4,*)$	$(0,*)$	$(2,*)$

där kolonnspelarens nyttovärden gått förlorade. Däremot vet man att radspelarens blandade strategi $p_1^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ ingår i en Nashjämvikt. Bestäm med ledning härav den blandade strategi $p_2^* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ för kolonnspelaren som gör (p_1^*, p_2^*) till en Nashjämvikt.

5.5 Samma fråga som i föregående övning om man istället vet att $p_1^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ är radspelarens blandade strategi i en Nashjämvikt.

5.4 Dominans

Ibland kan en spelare utesluta ett handlingsalternativ därför att det finns andra alternativ som ger honom större nytta oavsett hur motspelarna spelar.

Exempel 5.4.1 Betrakta spelet

	k_1	k_2	k_3
r_1	$(2,*)$	$(1,*)$	$(2,*)$
r_2	$(3,*)$	$(4,*)$	$(1,*)$
r_3	$(3,*)$	$(2,*)$	$(3,*)$

där kolonnspelarens nyttovärden utelämnats eftersom de inte spelar någon roll för resonemanget. I detta spel är $u_1(r_3, k_i) > u_1(r_1, k_i)$ för varje val av k_i, så oavsett vilket handlingsalternativ kolonnspelaren väljer är alternativet r_3 bättre för radspelaren än alternativet r_1. Man uttrycker detta genom att säga att handlingen r_1 är *strikt dominerad* av handlingen r_3.

En rationell spelare skulle aldrig välja en strikt dominerad handling, och en sådan handling kan, som vi ska visa längre fram, inte heller ingå som komponent i någon Nashjämvikt. □

Exempel 5.4.2 I spelet med utbetalningstabellen

	k_1	k_2	k_3
r_1	$(2,*)$	$(1,*)$	$(3,*)$
r_2	$(1,*)$	$(3,*)$	$(4,*)$
r_3	$(4,*)$	$(0,*)$	$(3,*)$

domineras ingen av radspelarens handlingar strikt av någon annan handling. Däremot är

$$u_1(r_1, k_i) < \tfrac{1}{2}u_1(r_2, k_i) + \tfrac{1}{2}u_1(r_3, k_i) \tag{6}$$

för vart och ett av kolonnspelarens tre handlingsalternativ k_1, k_2, k_3, eftersom $2 < \frac{1}{2}(1 + 4)$, $1 < \frac{1}{2}(3 + 0)$ och $3 < \frac{1}{2}(4 + 3)$.

Låt nu $\hat{p}_1$ vara radspelarens blandade strategi $\hat{p}_1(r_1) = 0$, $\hat{p}_1(r_2) = \hat{p}_1(r_3) = \frac{1}{2}$, och betrakta radspelarens förväntade nyttofunktion $\tilde{u}_1$. Eftersom $\tilde{u}_1(\hat{p}_1, k_i) = \frac{1}{2}u_1(r_2, k_i) + \frac{1}{2}u_1(r_3, k_i)$, betyder olikheten (6) att

$$u_1(r_1, k_i) < \tilde{u}_1(\hat{p}_1, k_i)$$

för alla kolonnspelarens rena strategier k_i. Varje blandad strategi p_2 för kolonnspelaren är emellertid en konvex kombination av hans rena strategier, så därför följer det nu också på grund av linearitet av olikheten ovan att

$$\tilde{u}_1(r_1, p_2) < \tilde{u}_1(\hat{p}_1, p_2)$$

för alla blandade strategier p_2. I den blandade utvidgningen av det aktuella spelet är således radspelarens rena strategi r_1 strikt dominerad av hans blandade strategi $\hat{p}_1$. En rationell radspelare bör därför inte välja den rena strategin r_1 eftersom den ger honom mindre förväntad vinst än den blandade strategin $\hat{p}_1$, oavsett hur kolonnspelaren agerar. □

Exemplen ovan får tjäna som motivering för följande allmänna definition.

Definition 5.4.1 Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett ändligt strategiskt spel. Handlingen $a_i \in A_i$ säges vara *strikt dominerad* om spelare i har någon blandad strategi p_i som ger honom strikt större förväntad nytta än den rena strategin a_i, oavsett vilka handlingsalternativ de andra spelarna väljer, dvs. om

$$u_i(x_{-i}, a_i) < \tilde{u}_i(x_{-i}, p_i)$$

för alla $x_{-i} \in A_{-i}$.

Anmärkning. Om handlingen a_i domineras strikt av den blandade strategin p_i så domineras den också strikt av den blandade strategi $\hat{p}_i$ som definieras av att $\hat{p}_i(a_i) = 0$ och $\hat{p}_i(x_i) = p_i(x_i)/(1 - p_i(a_i))$ för alla $x_i \in A_i \setminus \{a_i\}$. Det är därför ingen inskränkning att i definitionen ovan anta att $p_i(a_i) = 0$.

Sats 5.4.1 *Antag att $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ är en blandad Nashjämvikt i det ändliga strategiska spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ och att spelare i:s handling a_i är strikt dominerad. Då är $p_i^*(a_i) = 0$.*

En strikt dominerad handling kan med andra ord inte förekomma med positiv sannolikhet i en spelares Nashjämviktsstrategi.

Bevis. Eftersom handlingen a_i är strikt dominerad har spelare i en blandad strategi $\hat{p}_i$ med egenskapen att

$$u_i(x_{-i}, a_i) < \tilde{u}_i(x_{-i}, \hat{p}_i)$$

för alla $x_{-i} \in A_{-i}$. Om $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ är en godtycklig strategivektor, så fås de förväntade nyttorna $\tilde{u}_i(p_{-i}, a_i)$ och $\tilde{u}_i(p_{-i}, \hat{p}_i)$ som väntevärden av funktionerna $x_{-i} \mapsto u_i(x_{-i}, a_i)$ och $x_{-i} \mapsto \tilde{u}_i(x_{-i}, \hat{p}_i)$ med avseende på det mot strategivektorn p_{-i} svarande produktmåttet på A_{-i}. Det följer därför av olikheten ovan att

$$\tilde{u}_i(p_{-i}, a_i) < \tilde{u}_i(p_{-i}, \hat{p}_i).$$

Vi använder denna olikhet då p är den blandade Nashjämvikten p^* och får då speciellt att

$$\tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i) < \tilde{u}_i(p^*_{-i}, \hat{p}_i) \leq \tilde{u}_i(p^*).$$

Det följer nu av likgiltighetsprincipen att $p^*_i(a_i) = 0$, ty om $p^*_i(a_i) > 0$ så är $\tilde{u}_i(p^*_{-i}, a_i) = \tilde{u}_i(p^*)$ vilket ger en motsägelse i olikheten ovan. □

Definition 5.4.2 Spelet $G' = \langle N, (A'_i), (u'_i)\rangle$ är ett *delspel* till det strategiska spelet $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ om det för varje spelare $i \in N$ gäller att $A'_i \subseteq A_i$ och nyttofunktionen u'_i är lika med restriktionen av nyttofunktionen u_i till mängden $A' = A'_1 \times A'_2 \times \cdots \times A'_n$, dvs. $u'_i(a) = u_i(a)$ för alla utfall $a \in A'$.

Eftersom nyttofunktionerna i ett delspel är restriktioner av nyttofunktionerna i det ursprungliga spelet, kan det inte ge upphov till några missförstånd att använda samma beteckning för delspelets nyttofunktioner som för ursprungsspelets nyttofunktioner, vilket vi kommer att göra fortsättningsvis. Delspelen till ett spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ kommer således att skrivas på formen $\langle N, (A'_i), (u_i)\rangle$ med mängderna A'_i som delmängder till mängderna A_i.

Om ett utfall a^* i A' är en Nashjämvikt i spelet G, så är det uppenbarligen också en Nashjämvikt i delspelet G', ty likheterna $u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i)$ gäller naturligtvis för alla $a_i \in A'_i$ om de gäller för alla a_i i den större mängden A_i.

En blandad strategi p_i för spelare i i delspelet G' kan också uppfattas som en blandad strategi i spelet G. Man utvidgar helt enkelt definitionen av p_i till hela mängden A_i genom att sätta $p_i(a_i) = 0$ för alla $a_i \in A_i \setminus A'_i$. Omvänt kan förstås varje blandad strategi p_i i spelet G med egenskapen att $p_i(a_i) = 0$ för alla $a_i \in A_i \setminus A'_i$ uppfattas som en blandad strategi i spelet G'. Detta gör att vi kan uppfatta en spelares strategimängd $\mathcal{L}(A'_i)$ i spelet G' som en delmängd av samma spelares strategimängd $\mathcal{L}(A_i)$ i spelet G

Detta innebär att den blandade utvidgningen av delspelet G' är ett delspel till den blandade utvidgningen av G. Den triviala observationen ovan om Nashjämvikter i spel och delspel, tillämpad på de blandade utvidgningarna, ger därför omedelbart följande sats.

Sats 5.4.2 *Antag att G' är ett delspel till spelet G, att $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ är en vektor av blandade strategier i delspelet G' och att p^* är en blandad Nashjämvikt i spelet G. Då är p^* också en Nashjämvikt i delspelet G'.*

Itererad elimination av strikt dominerade handlingar

Exempel 5.4.3 Betrakta följande strategiska spel G:

	k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,3)$	$(4,2)$
r_2	$(4,2)$	$(3,3)$	$(0,2)$	$(2,1)$
r_3	$(1,4)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(3,1)$
r_4	$(1,0)$	$(2,1)$	$(5,5)$	$(3,2)$

Radspelarens handling r_3 domineras strikt av handlingen r_1 och kommer följaktligen inte att väljas om spelaren är rationell. Låt oss därför stryka handlingen r_3, vilket ger oss följande delspel G^1:

	k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,3)$	$(4,2)$
r_2	$(4,2)$	$(3,3)$	$(0,2)$	$(2,1)$
r_4	$(1,0)$	$(2,1)$	$(5,5)$	$(3,2)$

Nu ser vi att kolonnspelarens handling k_1 är strikt dominerad av k_2, samt att k_4 är strikt dominerad av k_3. Vi eliminerar därför k_1 och k_4 från spelet eftersom dessa handlingar inte kommer att väljas av någon rationell kolonnspelare i spelet G^1. Detta ger följande delspel G^2 till spelet G^1:

	k_2	k_3
r_1	$(2,4)$	$(2,3)$
r_2	$(3,3)$	$(0,2)$
r_4	$(2,1)$	$(5,5)$

I spelet G^2 domineras handlingen r_1 strikt av radspelarens blandade strategi $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, som ger honom en förväntad nytta av $\frac{5}{2}$ oberoende av kolonnspelarens val. Vi eliminerar därför även handlingen r_1 och får då delspelet G^3:

	k_2	k_3
r_2	$(3,3)$	$(0,2)$
r_4	$(2,1)$	$(5,5)$

I G^3 är inget handlingsalternativ strikt dominerat.

Rationella spelare av spelet G bör, om de tror att motspelaren också är rationell, genom att resonera som vi har gjort, komma fram till att de endast bör välja bland de handlingsalternativ som förekommer i delspelet G^3, dvs. radspelaren ska välja r_2 eller r_4 och kolonnspelaren ska välja k_2 eller k_3. I kapitel 7 ska vi ge ytterligare stöd för denna slutsats. □

Resonemanget i exemplet ovan kan förstås generaliseras, vilket leder till följande definition.

Definition 5.4.3 Låt $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett strategiskt spel. Vi säger att delmängden $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ av $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar* om det finns en ändlig följd $A^t = A_1^t \times A_2^t \times \cdots \times A_n^t$, där $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, av produktmängder med följande egenskaper:

- $A^0 = A$ och $A^T = B$;
- $A^{t+1} \subseteq A^t$ för $t = 0, 1, \ldots, T-1$;
- För $t = 0, 1, \ldots, T-1$ är handlingarna i mängderna $A_i^t \setminus A_i^{t+1}$ strikt dominerade i spelet $G^t = \langle N, (A_i^t), (u_i)\rangle$;
- Ingen handling i spelet $G^T = \langle N, (B_i), (u_i)\rangle$ är strikt dominerad.

Det följer av anmärkningen efter definition 5.4.1 att vi i punkt tre av definitionen ovan kan anta att varje handling i $A_i^t \setminus A_i^{t+1}$ är strikt dominerad av någon blandad strategi som tillhör spelet G^{t+1}.

I kapitel 7 kommer vi att visa att mängden $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ av överlevande utfall är unik, något som inte är självklart eftersom det kan finnas flera olika möjligheter att utföra eliminationerna av strikt dominerade handlingar. (Se korollarium 7.2.3.) Naturligtvis kan det hända att $B = A$, dvs. att det inte finns några strikt dominerade handlingar i G.

Om B endast består av ett utfall $\hat{a}$ brukar man säga att det ursprungliga spelet är *lösbart genom upprepad strikt dominans* med $\hat{a}$ som lösning.

Exempel 5.4.4 I spelet i exempel 5.4.3 är utfallen i delspelet G^3 de överlevande utfallen under itererad elimination av strikt dominerade handlingar. □

Sats 5.4.3 *Låt $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett ändligt strategiskt spel och antag att mängden $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar. Låt vidare $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$ vara en vektor av blandade strategier i spelet G. Då är följande två påståenden ekvivalenta:*

(i) p^* en blandad Nashjämvikt i spelet G.

(ii) För alla spelare i och för alla $a_i \in A_i \setminus B_i$ är $p_i^*(a_i) = 0$, och p^* är en blandad Nashjämvikt i delspelet $H = \langle N, (B_i), (u_i)\rangle$.

Handlingar som försvinner under itererad elimination av strikt dominerade handlingar kan således inte förekomma med positiv sannolikhet i någon Nashjämviktsstrategi.

Bevis. Låt $G^0 = G$, G^1, G^2, …, G^{T-1}, $G^T = H$ vara den kedja av delspel som förekommer i definition 5.4.3. På grund av induktion räcker det att visa att följande två påståenden är ekvivalenta för en godtycklig strategivektor p^* i spelet G^t:

(a) p^* är en blandad Nashjämvikt i spelet G^t.

(b) För alla $i \in N$ och alla $a_i \in A_i^t \setminus A_i^{t+1}$ är $p_i^*(a_i) = 0$, och p^* är en blandad Nashjämvikt i delspelet G^{t+1}.

Antag först att (a) gäller och att a_i är en handling i $A_i^t \setminus A_i^{t+1}$. Då är handlingen a_i strikt dominerad i spelet G^t, så det följer av sats 5.4.1 att $p_i^*(a_i) = 0$. Strategin p_i^* kan därför uppfattas som en blandad strategi i delspelet G^{t+1} för spelare i, och enligt sats 5.4.2 är strategivektorn p^* en Nashjämvikt i delspelet G^{t+1}. Därmed har vi visat att (a) medför (b).

Antag omvänt att (b) gäller. På grund av likgiltighetsprincipen gäller då för varje spelare i och alla handlingar $a_i \in A_i^{t+1}$ att

$$\tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) \begin{cases} = \tilde{u}_i(p_{-i}^*, p_i^*) & \text{om } p_i^*(a_i) > 0, \\ \le \tilde{u}_i(p_{-i}^*, p_i^*) & \text{om } p_i^*(a_i) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

För varje handling $a_i \in A_i^t \setminus A_i^{t+1}$ har spelare i en blandad strategi $\hat{p}_i$ i delspelet G^{t+1} som dominerar a_i strikt, vilket medför att

$$\tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) < \tilde{u}_i(p_{-i}^*, \hat{p}_i) \le \tilde{u}_i(p_{-i}^*, p_i^*). \tag{8}$$

Eftersom vidare $p_i^*(a_i) = 0$ för alla $a_i \in A_i^t \setminus A_i^{t+1}$, innebär olikheterna (7) och (8) att strategivektorn p^* uppfyller likgiltighetsprincipen i spelet G^t, och följaktligen är p^* en Nashjämvikt i G^t. □

Exempel 5.4.5 I spelet G i exempel 5.4.3 är r_2, r_4 och k_2, k_3 de överlevande handlingarna. En blandad Nashjämvikt (p_1^*, p_2^*) i spelet karakteriseras därför av att $p_1^*(r_1) = p_1^*(r_3) = 0$, $p_2^*(k_1) = p_2^*(k_4) = p_2^*(k_5) = 0$ och att restriktionen av p_1^* och p_2^* till delspelet G^3 är en Nashjämvikt i delspelet. Man ser omedelbart att delspelet har två rena Nashjämvikter, nämligen (r_2, k_2) och (r_4, k_3). Spelet har också en blandad Nashjämvikt som kan bestämmas med hjälp av likgiltighetsprincipen och består av att radspelaren väljer r_2 och r_4 med sannolikheterna $\frac{4}{5}$ resp. $\frac{1}{5}$, och kolonnspelaren väljer k_2 och k_3 med sannolikheterna $\frac{5}{6}$ resp. $\frac{1}{6}$. Detta ger oss slutsatsen att det ursprungliga spelet G har tre Nashjämvikter, nämligen de två rena jämvikterna (r_2, k_2) och (r_4, k_3) samt den blandade Nashjämvikten bestående av strategierna $(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$ och $(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0)$. □

Exempel 5.4.6 I spelet med utbetalningstabellen

	k_1	k_2	k_3
r_1	$(2,5)$	$(1,3)$	$(2,2)$
r_2	$(4,1)$	$(3,2)$	$(0,1)$
r_3	$(1,4)$	$(0,3)$	$(1,4)$

domineras rad 3 strikt av rad 1. Elimination av rad 3 leder till ett spel där kolonn 3 domineras strikt av kolonn 2. Elimination av kolonn 3 leder till ett spel där rad 2 dominerar rad 1 strikt. Efter att ha eliminerat den första raden återstår ett delspel där kolonn 2 dominerar kolonn 1 strikt. Efter itererad elimination av strikt dominerade handlingar återstår således endast det triviala delspelet

	k_2
r_2	$(3,2)$

Härav kan vi dra slutsatsen att det ursprungliga spelet har en unik Nashjämvikt, nämligen den rena Nashjämvikten (r_2, k_2). □

Svag dominans

Definition 5.4.4 Låt $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ vara ett ändligt strategiskt spel. Handlingen $a_i \in A_i$ säges vara *svagt dominerad* om spelare i har någon blandad strategi p_i som ger honom minst lika stor förväntad nytta som den rena strategin a_i, oavsett vilka handlingsalternativ de andra spelarna väljer, och större förväntad nytta i åtminstone något fall, dvs. om

$$u_i(x_{-i}, a_i) \leq \tilde{u}_i(x_{-i}, p_i)$$

för alla $x_{-i} \in A_{-i}$ med strikt olikhet för åtminstone något x_{-i}.

Exempel 5.4.7 I spelet

	V	H
T	$(1,2)$	$(0,3)$
M	$(2,1)$	$(0,1)$
B	$(2,4)$	$(1,2)$

domineras handlingen T svagt av M och handlingen M svagt av B, medan T domineras strikt av B. □

Elimination av svagt dominerade handlingar ger inte lika tillfredsställande resultat som elimination av strikt dominerade handlingar. Exempelvis kan det hända att Nashjämvikter försvinner. Däremot är varje Nashjämvikt i ett delspel som återstår efter elimination av svagt dominerade handlingar en Nashjämvikt också i det ursprungliga spelet.

Exempel 5.4.8 I spelet

	V	H
T	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(0,0)

är (B, H) en Nashjämvikt trots att radspelarens handling B är svagt dominerad av handlingen T och kolonnspelarens handling H är svagt dominerad av handlingen V. □

Vilka handlingar som överlever upprepad elimination av svagt dominerade handlingar kan också vara beroende av i vilken ordning eliminationerna genomförs. Betrakta följande exempel.

Exempel 5.4.9 I spelet med utbetalningstabellen

	V	H
T	$(1,1)$	$(0,0)$
M	$(1,1)$	$(2,1)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

kan vi genom elimination av svagt dominerade handlingar först eliminera T och sedan V, vilket lämnar oss kvar med alternativen (M,H) och (B,H) med en säker utdelning på $(2,1)$. Om vi eliminerar B först och sedan H, så återstår (T,V) och (M,V) med en säker utdelning på $(1,1)$. □

Övningar

5.6 Lös spelet Fångarnas dilemma genom itererad elimination av strikt dominerade handlingar.

5.7 Bestäm delmängden som överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar för spelet

	k_1	k_2	k_3	k_4
r_1	$(3,1)$	$(1,4)$	$(3,2)$	$(2,2)$
r_2	$(4,0)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(3,2)$
r_3	$(3,2)$	$(1,0)$	$(2,2)$	$(2,2)$
r_4	$(4,1)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,2)$

Bestäm också samtliga blandade Nashjämvikter.

5.8 Betrakta spelet Gissa 2/3 av medelvärdet i övning 2.5.
a) Finns det någon strikt dominerad handling i spelet?
b) Vilka utfall överlever upprepad elimination av svagt dominerade handlingar?

5.5 Maxminstrategier

Definition 5.5.1 Med en spelares *blandade säkerhetsnivå* i ett ändligt strategiskt spel G menas spelarens säkerhetsnivå i spelets blandade utvidgning $\widetilde{G}$. En blandad strategi i spelet G kallas en *blandad maxminstrategi* om den är en maxminhandling i utvidgningen $\widetilde{G}$.

En blandad maxminstrategi $\hat{p}_i$ för spelare i är med andra ord en blandad strategi (dvs. ett lotteri över A_i) som maximerar funktionen

$$f_i(p_i) = \min_{q_{-i}} \tilde{u}_i(q_{-i}, p_i),$$

där minimum ska tas över alla strategivektorer q_{-i} för de övriga spelarna.

Problemet att beräkna en spelares blandade säkerhetsnivå och blandade maxminstrategier är ett rent optimeringsproblem, och vi kan förenkla det genom att notera att

$$f_i(p_i) = \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \tilde{u}_i(a_{-i}, p_i) = \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \sum_{a_i\in A_i} u_i(a_{-i}, a_i)p_i(a_i).$$

Enligt olikheten (1) i avsnitt 5.1 är nämligen

$$\tilde{u}_i(q_{-i}, p_i) \geq \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \tilde{u}_i(a_{-i}, p_i)$$

för alla strategivektorer q_{-i}, vilket visar att minimum av $\tilde{u}_i(q_{-i}, p_i)$ antas då q_{-i} är en vektor av rena strategier.

Vi lämnar som övning att verifiera att funktionerna f_i är *konkava*, dvs. att $f_i(\alpha p_i + \beta q_i) \geq \alpha f_i(p_i) + \beta f_i(q_i)$ för alla positiva tal α, β med summa 1 och alla blandade strategier p_i, q_i. Problemet att bestämma maxminstrategierna, dvs. att maximera funktionen f_i över den konvexa mängden $\mathcal{L}(A_i)$, är därför ett s. k. konvext optimeringsproblem. Det är till och med bättre än så eftersom problemet enkelt kan omformuleras till ett *linjärt programmeringsproblem.*

Det minsta talet av ett antal tal $t_1, t_2, \dots, t_m$ är nämligen lika med det största tal v som uppfyller olikheterna $v \leq t_1$, $v \leq t_2$, ..., $v \leq t_m$. Funktionsvärdet $f_i(p_i)$ är därför lika med det största av alla tal v som uppfyller samtliga olikheter

$$v \leq \sum_{a_i\in A_i} u_i(a_{-i}, a_i)p_i(a_i)$$

som fås genom att låta a_{-i} genomlöpa mängden A_{-i}. Den blandade säkerhetsnivån ℓ_i, dvs. maximivärdet av $f_i(p_i)$, och maxminstrategierna fås därför genom att lösa optimeringsproblemet

(9)
$$\text{Maximera } v \text{ då}$$
$$\begin{cases} v \leq \sum_{a_i\in A_i} u_i(a_{-i}, a_i)p_i(a_i) & \text{för alla } a_{-i} \in A_{-i} \\ p_i \in \mathcal{L}(A_i) \end{cases}$$

Om A_i består av m alternativ $e_1, e_2, \dots, e_m$ och vi inför variablerna x_1, x_2, ..., x_m genom att sätta $x_k = p_i(e_k)$, så är problemet ovan ett problem i de $m+1$ variablerna $x_1, x_2, \dots, x_m$ och v med linjära olikheter och likheter som bivillkor, eftersom det sista villkoret $p_i \in \mathcal{L}(A_i)$ är ekvivalent med att $x_k \geq 0$ för $k = 1, 2, \dots, m$ och $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$. Problemet (9) är därför ett typiskt linjärprogrammeringsproblem, och för sådana problem finns det effektiva lösningsalgoritmer, t. ex. simplexalgoritmen.

Exempel 5.5.1 Vi ska beräkna spelarnas blandade maxminstrategier för spelet i exempel 5.2.1:

	V	H
T	$(3,3)$	$(0,2)$
B	$(2,1)$	$(5,5)$

Låt p_1 vara en blandad strategi för radspelaren, och sätt $x_1 = p_1(T)$ och $x_2 = p_1(B)$. Lotterimängden $\mathcal{L}(A_1)$ kan då identifieras med sträckan

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

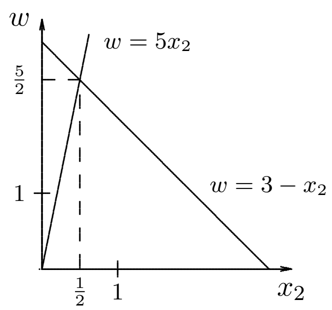
mellan punkterna $(0,1)$ och $(1,0)$, och spelarens maxminproblem går ut på att maximera funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \min_{a_2 \in A_2} \sum_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)\, p_1(a_1) \\ &= \min\bigl(u_1(T,V)p_1(T) + u_1(B,V)p_1(B), u_1(T,H)p_1(T) + u_1(B,H)p_1(B)\bigr) \\ &= \min(3x_1 + 2x_2, 0x_1 + 5x_2) \end{aligned}$$

då $(x_1, x_2) \in X$. Det ekvivalenta linjärprogrammeringsproblemet har formen

$$\text{Maximera } v \text{ då} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq v \\ 0x_1 + 5x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

men i det här fallet är det förstås enklast att eliminera variabeln x_1 $(= 1 - x_2)$ ur funktionen f_1 och sedan lösa problemet grafiskt. Av figur 5.2 framgår att $f_1(1 - x_2, x_2) = \min(3 - x_2, 5x_2)$ antar sitt största värde $\frac{5}{2}$ för $x_2 = \frac{1}{2}$. Den blandade strategin $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är med andra ord spelare 1:s blandade maxminstrategi, och hans blandade säkerhetsnivå är lika med $\frac{5}{2}$.



Figur 5.2. Grafisk lösning till maximeringsproblemet i exempel 5.5.1.

På motsvarande sätt ska kolonnspelaren maximera funktionen

$$f_2(y_1, y_2) = \min(3y_1 + 2y_2, y_1 + 5y_2) = \min(3 - y_2, 1 + 4y_2)$$

då $y_1 + y_2 = 1$ och $y_1, y_2 \geq 0$. Maximum fås för $y_2 = \frac{2}{5}$, så spelarens blandade maxminstrategi består av att välja V med sannolikhet $\frac{3}{5}$ och H med sannolikhet $\frac{2}{5}$. Hans blandade säkerhetsnivå är $\frac{13}{5}$. $\square$

I exemplet ovan sammanfaller spelarnas blandade säkerhetsnivåer $\frac{5}{2}$ och $\frac{13}{5}$ med deras förväntade nyttor i den blandade Nashjämvikten. En spelares förväntade nytta i en Nashjämvikt kan aldrig vara lägre än spelarens säkerhetsnivå. Vi har nämligen följande allmänna resultat som är en direkt konsekvens av sats 2.4.1 tillämpad på ett spels blandade utvidgning.

Sats 5.5.1 *I en blandad Nashjämvikt är varje spelares förväntade nytta större än eller lika med spelarens blandade säkerhetsnivå.*

Övning

5.9 Bestäm spelarnas blandade säkerhetsnivåer och maxminstrategier för spelet i övning 5.3.

Kapitel 6

Tvåpersoners nollsummespel

I avsnitt 2.5 studerade vi strikt konkurrensinriktade tvåpersonersspel. En speciell klass av sådana spel är *tvåpersoners nollsummespel*, som karakteriseras av att spelarnas preferenser ges av kardinala nyttofunktioner vars summa är identiskt lika med noll. I det här kapitlet ska vi studera den blandade utvidgningen av ändliga nollsummespel och framförallt karakterisera deras blandade Nashjämvikter.

6.1 Optimala strategier och spelets värde

Ett ändligt tvåpersoners nollsummespel är fullständigt definierat av spelets utbetalningsmatris $A = [a_{ij}]$, som i resten av det här kapitlet antas vara en matris med m rader och n kolonner, om inte annat sägs explicit. Spelare 1, radspelaren, väljer en rad i i matrisen, och spelare 2, kolonnspelaren, väljer samtidigt, och ovetandes om radspelarens val, en kolonn j i matrisen. Därefter sker utbetalningen a_{ij} från kolonnspelaren till radspelaren, vilket i fallet $a_{ij} < 0$ förstås betyder att kolonnspelaren får $-a_{ij}$ av radspelaren.

Spelets eventuella rena Nashjämvikter karakteriseras av sadelpunktsolikheten (2) i avsnitt 2.5. Paret (i, j) är en Nashjämvikt om och endast om matriselementet a_{ij} är störst i sin kolonn och minst i sin rad. Att en matris har en sadelpunkt hör emellertid till undantagen, och detta är en anledning att studera blandade utvidgningar av nollsummespel.

I det här kapitlet låter vi X beteckna radspelarens lotterimängd och Y kolonnspelarens. Ett element x i X är en sannolikhetsfördelning på mängden av rader i utbetalningsmatrisen, dvs. $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, där alla komponenterna x_i är icke-negativa reella tal och $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Talet x_i står för radspelarens sannolikhet att välja rad i. Elementet $y \in Y$ har på motsvarande sätt formen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ med $y_j \geq 0$ för alla j och $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Mängderna X och Y är de båda spelarnas handlingsmängder i den blandade utvidningen av det ändliga nollsummespelet. Radspelarens förväntade utbetalning är hans nyttofunktion i utvidgningen; den förväntade utbetalningen U är definierad på produktmängden $X \times Y$ och ges av formeln

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Kolonnspelarens förväntade utbetalning är förstås lika med $-U$, så den blandade utvidgningen är också ett nollsummespel.

Vi kan nu tillämpa Nashs existenssats (sats 5.2.1) och karakteriseringen av Nashjämvikter i strikt konkurrensinriktade spel (sats 2.5.2 och sats 2.5.3) och får då omedelbart följande resultat.

Sats 6.1.1 (Maxminsatsen)

(i) *Varje ändligt nollsummespel G har en blandad Nashjämvikt.*

(ii) *En blandad strategivektor (x^*, y^*) i nollsummespelet G är en blandad Nashjämvikt om och endast om x^* är en blandad maxminstrategi för radspelaren och y^* är en blandad maxminstrategi för kolonnspelaren.*

(iii) *Radspelarens förväntade nytta i en blandad Nashjämvikt är lika med hans blandade säkerhetsnivå. Kolonnspelarens blandade säkerhetsnivå är lika med radspelarens blandade säkerhetsnivå med ombytt tecken.*

Definition 6.1.1 Med ett ändligt nollsummespels *värde* menas radspelarens blandade säkerhetsnivå. Spelet kallas *rättvist* om dess värde är lika med noll.

Enligt sats 6.1.1 är spelets värde lika med radspelarens förväntade nytta i en godtycklig blandad Nashjämvikt.

Maxminsatsen visar att Nashjämvikten är ett stabilt och tillfredsställande lösningsbegrepp för nollsummespel. Radspelaren kan bestämma sin komponent x^* i en Nashjämvikt utan att snegla på kolonnspelaren, ty x^* är en maxminstrategi, och genom att välja denna har han en garanterad förväntad utbetalning som är minst lika stor som spelets värde. Motsvarande gäller för kolonnspelaren, som kan försäkra sig om att i genomsnitt inte förlora mer än spelets värde till radspelaren. Av den anledningen kallar vi också strategierna som ingår i en blandad Nashjämvikt för spelarnas *optimala strategier*.

Observera dock att maxminsatsen handlar om väntevärden; i enskilda spel kan utbetalningarna till radspelaren naturligtvis vara mindre än spelets värde.

Likgiltighetsprincipen gäller naturligtvis speciellt också för nollsummespel och får då följande form.

Sats 6.1.2 (Likgiltighetsprincipen) *I ett ändligt nollsummespel med utbetalningsmatris $A = [a_{ij}]$ är de blandade strategierna x^* och y^* optimala (dvs. (x^*, y^*) är en blandad Nashjämvikt) och är v^* spelets värde, om och endast* *om följande fyra implikationer gäller:*

$$\begin{aligned}
x_i^* > 0 \ &\Rightarrow \ \sum_j a_{ij} y_j^* = v^* \\
x_i^* = 0 \ &\Rightarrow \ \sum_j a_{ij} y_j^* \le v^* \\
y_j^* > 0 \ &\Rightarrow \ \sum_i a_{ij} x_i^* = v^* \\
y_j^* = 0 \ &\Rightarrow \ \sum_i a_{ij} x_i^* \ge v^*.
\end{aligned}$$

EXEMPEL 6.1.1 Spelet Krona eller klave med utbetalningstabellen

	Kr	*Kl*
Kr	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Kl	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

är ett tvåpersoners nollsummespel med utbetalningsmatris

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen saknar sadelpunkt, så det finns inga rena Nashjämvikter. En blandad Nashjämvikt (x^*, y^*) med $x_1^*, x_2^* > 0$ måste på grund av likgiltighetsprincipen satisfiera ekvationen $y_1^* - y_2^* = -y_1^* + y_2^* = v^*$, och tillsammans med villkoret $y_1^* + y_2^* = 1$ ger detta att $y_1^* = y_2^* = \frac{1}{2}$ och $v^* = 0$. Av samma skäl är $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}$ om (x^*, y^*) är en blandad Nashjämvikt med $y_1^*, y_2^* > 0$. Slutsatsen blir att spelet har en unik blandad Nashjämvikt $\big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\big)$, som innebär att båda spelarna ska välja krona och klave med samma sannolikhet $\frac{1}{2}$, samt att spelet är rättvist. □

Som tillämpning på likgiltighetsprincipen ska vi ge en allmän formel för Nashjämvikten i ett tvåpersoners nollsummespel när utbetalningsmatrisen är en 2×2-matris.

Sats 6.1.3 *Betrakta ett tvåpersoners nollsummespel, där båda spelarna har två handlingsalternativ, och antag att utbetalningsmatrisen*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

saknar sadelpunkter. Då har spelet en unik blandad Nashjämvikt (x^*, y^*), *som ges av att*

$$\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{a_{22} - a_{21}}{s(A)}, \quad & x_2^* &= \frac{a_{11} - a_{12}}{s(A)}, \\
y_1^* &= \frac{a_{22} - a_{12}}{s(A)}, \quad & y_2^* &= \frac{a_{11} - a_{21}}{s(A)},
\end{aligned}$$

där

$$s(A) = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}.$$

Spelets värde är

$$v^* = \frac{\det A}{s(A)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{s(A)}.$$

Bevis. Vi visar först att $s(A) \neq 0$ och betraktar för den skull tre fall.

Fall 1: $a_{11} = a_{12}$. Vi ska visa att detta strider mot antagandet att matrisen saknar sadelpunkt. Antag därför att $a_{21} \geq a_{22}$. Om $a_{11} \geq a_{21}$ så är $(1,1)$ och $(1,2)$ sadelpunkter, om $a_{21} > a_{11} \geq a_{22}$ så är $(1,2)$ en sadelpunkt, och om slutligen $a_{21} > a_{22} > a_{11}$ så är $(2,2)$ en sadelpunkt. Detta är en motsägelse till antagandet att matrisen saknar sadelpunkt.

Helt analogt inses att antagandet $a_{21} \leq a_{22}$ leder till en motsägelse. Fall 1 är därför omöjligt.

Fall 2: $a_{11} > a_{12}$. I detta fall följer i tur och ordning att $a_{22} > a_{12}$ (eftersom $(1,2)$ inte är sadelpunkt), $a_{22} > a_{21}$ (eftersom $(2,2)$ inte är sadelpunkt), och $a_{11} > a_{21}$ (eftersom $(2,1)$ inte är en sadelpunkt).

Fall 3: $a_{11} < a_{12}$. Nu följer istället i tur och ordning att $a_{21} > a_{11}$, $a_{21} > a_{22}$ och $a_{12} > a_{22}$.

I fall 2 är kvantiteten $s(A)$ $(= (a_{11} - a_{12}) + (a_{22} - a_{21}))$ positiv, och i fall 3 är den negativ. I båda fallen är vidare talen x_1^*, x_2^*, y_1^* och y_2^* positiva, och summorna $x_1^* + x_2^*$ och $y_1^* + y_2^*$ är båda lika med 1.

Att (x^*, y^*) är en blandad Nashjämvikt följer omedelbart av likgiltighetsprincipen, ty genom insättning verifierar man lätt att

$$a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = v^*.$$

Exempelvis är

$$a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \frac{a_{11}(a_{22} - a_{12}) + a_{12}(a_{11} - a_{21})}{s(A)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{s(A)} = v^*.$$

Det återstår nu endast att visa att Nashjämvikten är unik. Antag därför att $(\hat{x}, \hat{y})$ är en annan blandad Nashjämvikt. Då är också paret $(x^*, \hat{y})$ en Nashjämvikt med samma värde v^*, och det följer därför av likgiltighetsprincipen att $a_{11}\hat{y}_1 + a_{12}\hat{y}_2 = v^*$. Naturligtvis är också $\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 1$, så $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ är en lösning till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v^* \\ \quad\; y_1 + \quad\;\, y_2 = 1. \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har emellertid entydig lösning, ty dess determinant $a_{11} - a_{12}$ är skild från noll beroende på att fall 1 ovan inte kan inträffa. Eftersom Nashlösningen y^* också löser systemet, följer det att $\hat{y} = y^*$. Analogt visar man förstås att $\hat{x} = x^*$. $\square$

Exempel 6.1.2 Betrakta nollsummespelet med utbetalningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom matrisen inte har några sadelpunkter får vi spelarnas optimala strategier x^* och y^* med hjälp av formlerna i sats 6.1.3. I det här exemplet är $s(A) = 2 - (-3) - (-1) + 0 = 6$ och

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{0-(-1)}{6} = \frac{1}{6}, \quad x_2^* = \frac{2-(-3)}{6} = \frac{5}{6}, \\ y_1^* &= \frac{0-(-3)}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_2^* = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Spelets värde är

$$v^* = \frac{2 \cdot 0 - (-3) \cdot (-1)}{6} = -\frac{1}{2}.$$

□

Övningar

6.1 I följande variant av spelet *Udda eller Jämnt* väljer båda spelarna oberoende av varandra ett av talen 1 eller 2. Om summan av de båda valda talen är udda, vinner radspelaren produkten av de båda talen av motspelaren. Om summan är jämn, förlorar han istället produkten av de båda talen till motspelaren. Sätt upp spelets utbetalningsmatris och lös spelet, dvs. bestäm spelarnas optimala strategier samt spelets värde.

6.2 Lös med hjälp av likgiltighetsprincipen spelen med följande utbetalningsmatriser.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6.3 Avgör om $\overline{x} = (\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{18}, \frac{5}{6})$ och $\overline{y} = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ är optimala strategier i spelet med utbetalningsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vad är spelets värde?

6.4 Lös spelen med utbetalningsmatriserna

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

[Ledning: Eliminera först strikt dominerade handlingar i c).]

6.2 Tvåpersoners nollsummespel och linjär programmering

För att bestämma sina blandade maxminstrategier i tvåpersonersspelet med utbetalningsmatrisen $A = [a_{ij}]$ ska radspelarne lösa optimeringsproblemet

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} U(x,y),$$

där

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j.$$

Detta kan formuleras om som ett linjärprogrammeringsproblem om vi noterar att den förväntade utbetalningen

$$U(x,y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\Big)$$

för fixt $x \in X$ är ett vägt medelvärde av de n stycken talen $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ med vikterna y_j. Ett vägt medelvärde ligger alltid mellan det minsta och det största av de tal man bildar medelvärdet av, och medelvärdet är lika med det minsta av talen om det minsta talet ges vikt 1 och alla andra tal får vikt 0. Följaktligen är

$$\min_{y\in Y} U(x,y) = \min\{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \mid j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Men det minsta av ett antal tal är lika med det största talet s som är mindre än eller lika med de givna talen. Därför är för fixt x talet $\min_{y\in Y} U(x,y)$ lika med det största reella talet s som uppfyller olikheterna

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge s$$

för alla kolonnindex j.

Radspelarens maxminproblem är därför ekvivalent med optimeringsproblemet att finna det största reella talet s som för något $x \in X$ uppfyller ovanstående olikheter. Detta innebär att radspelaren maxminstrategier fås som lösningar x till det linjära maximeringsproblemet

$$\text{(P)} \qquad \text{Maximera } s \text{ då} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge s \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge s \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge s \\ \quad x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_m = 1 \\ \qquad\qquad x_1,\, x_2, \ldots, x_m \ge 0. \end{cases}$$

Kolonnspelarens maxminproblem är analogt, men att maximera den minimala förväntade utdelningen $-U(x,y)$ är ekvivalent med problemet att minimera maximum av $U(x,y)$. Kolonnspelarens maxminstrategier fås därför som lösningar till optimeringsproblemet

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} U(x,y).$$

Med ett resonemang som är helt analogt med resonemanget ovan finner man att detta problem är ekvivalent med det linjära minimeringsproblemet

$$(\mathrm{P}') \qquad \text{Minimera } t \text{ då} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \le t \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \le t \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \le t \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ y_1,\, y_2, \dots, y_n \ge 0. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså visat följande sats.

Sats 6.2.1 *En blandad strategivektor* (x^*, y^*) *i ett ändligt tvåpersoners nollsummespel med utbetalningsmatris* $A = [a_{ij}]$ *är en Nashjämvikt om och endast om* x^* *och* y^* *är optimala lösningar till linjärprogrammeringsproblemen* (P) *respektive* (P′). *Spelets värde är lika med maximivärdet till* (P) *och minimivärdet till* (P′).

De båda problemen (P) och (P′) är exempel på så kallade *duala linjära programmeringsproblem*. Enligt en viktig sats i linjär programmering, dualitetssatsen, har duala problem (med tillåtna punkter) alltid *samma optimala värden*. Detta betyder i föreliggande fall att maxvärdet i problemet (P) är lika med minvärdet i problemet (P′). Eftersom det optimala maxvärdet är lika med radspelarens säkerhetsnivå och det optimala minvärdet är kolonnspelarens säkerhetsnivå med ombytt tecken, ger dualitetssatsen ett alternativt bevis för påstående (iii) i maxminsatsen (sats 6.1.1), och därmed också, på grund av sats 2.5.1, för existensen av en blandad Nashjämvikt i tvåpersoners nollsummespel.

Likgiltighetsprincipen följer för övrigt också av ett korollarium till dualitetssatsen (den s. k. komplementaritetssatsen).

I de fall då spelets värde är positivt kan vi skriva om maximeringsproblemet (P) på en enklare form. Eftersom vi då bara behöver betrakta positiva

s-värden kan vi efter division med s skriva bivillkoren på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1/s + a_{21}x_2/s + \ldots + a_{m1}x_m/s \geq 1 \\ a_{12}x_1/s + a_{22}x_2/s + \ldots + a_{m2}x_m/s \geq 1 \\ \qquad\vdots \\ a_{1n}x_1/s + a_{2n}x_2/s + \ldots + a_{mn}x_m/s \geq 1 \\ x_1/s + x_2/s + \ldots + x_m/s = 1/s \\ s > 0,\ \ x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0. \end{cases}$$

Att maximera s är emellertid ekvivalent med att minimera $1/s$. Om vi inför variablerna $z_i = x_i/s$ och utnyttjar oss av likheten för $1/s$ i bivillkoren, kan vi därför ersätta maximeringsproblemet (P) med minimeringsproblemet

$$\text{Minimera } \ z_1 + z_2 + \cdots + z_m \ \text{ då}$$
$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m \geq 1 \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{m2}z_m \geq 1 \\ \qquad\vdots \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m \geq 1 \\ z_1, z_2, \ldots, z_m \geq 0. \end{cases}$$

Om detta problems minimivärde är c och antas i punkten z^*, så är spelets värde v^* lika med $1/c$, och v^*z^* är en optimal strategi för radspelaren.

Antagandet att spelets värde ska vara positivt för att ovanstående omskrivningar ska vara möjliga är ingen allvarlig inskränkning. Vi kan alltid åstadkomma detta genom att addera en tillräckligt stor positiv konstant K till alla matriselementen i spelmatrisen A så att samtliga dessa blir ickenegativa. Detta ökar spelets värde med samma konstant K men påverkar inte spelarnas optimala strategier.

Exempel 6.2.1 Betrakta spelet i exempel 6.1.2 med utbetalningsmatrisen

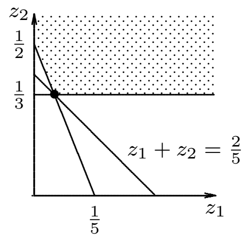
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

För att få ett spel med positivt värde adderar vi 3 till samtliga matriselement och får då ett nytt spel med matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi bestämmer radspelarens maxminstrategier genom att först lösa optimeringsproblemet

$$\text{Minimera } \ z_1 + z_2 \ \text{ då}$$
$$\begin{cases} 5z_1 + 2z_2 \geq 1 \\ 3z_2 \geq 1 \\ z_1, z_2 \geq 0. \end{cases}$$



Figur 6.1. Grafisk lösning av exempel 6.2.1.

grafiskt. Av figur 6.1 framgår att minimum antas i skärningspunkten $z^* = (\frac{1}{15}, \frac{1}{3})$ till linjerna $5z_1 + 2z_2 = 1$ och $3z_2 = 1$ och är lika med $\frac{2}{5}$. Detta innebär att det modifierade spelets värde är lika med $\frac{5}{2}$ och att radspelarens optimala strategi i såväl det modifierade spelet som det ursprungliga är $x^* = \frac{5}{2}z^* = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$. Det ursprungliga spelets värde är $\frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$.

Kolonnspelarens optimala strategi (y_1^*, y_2^*) finner man nu enklast med hjälp av likgiltighetsprincipen; enligt den är

$$\begin{cases} 2y_1^* - 3y_2^* = -\frac{1}{2} \\ -y_1^* = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

vilket ger oss $y_1^* = y_2^* = \frac{1}{2}$. □

Övning

6.5 Kalle och Rulle har tre spelkort vardera. Båda har ruter ess och spader ess. Kalle har dessutom ruter 2 och Rulle har spader 2. Spelarna spelar samtidigt var sitt kort. Kalle vinner om båda dessa kort har samma färg och förlorar i motsatt fall. Vinnaren erhåller i betalning värdet av sitt vinnande kort från förloraren, varvid ess räknas som 1. Skriv upp utbetalningsmatrisen för detta tvåpersonersspel, och formulera kolonnspelare Kalles problem att optimera den förväntade vinsten som ett LP-problem.

Kapitel 7

Rationaliserbarhet

7.1 Övertygelser

Betrakta ett strategiskt spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ och antag att spelare i vet vilken handlingsvektor a_{-i} som de övriga spelarna kommer att välja. Spelarens problem är då ett rent beslutsproblem, och om han är rationell ska han förstås välja en handling som maximerar funktionen $x_i \mapsto u_i(a_{-i}, x_i)$.

Antag att spelaren istället tror sig veta att de övriga spelarna väljer sina handlingar i mängden A_{-i} slumpmässigt enligt någon sannolikhetsfördelning μ. Sannolikheten att de övriga spelarna väljer handlingsvektorn a_{-i} är med andra ord $\mu(a_{-i})$, och spelare i:s förväntade nytta om han själv väljer alternativet $x_i \in A_i$ är

$$U_i(x_i; \mu) = \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_{-i}, x_i)\mu(a_{-i}).$$

Givet att spelare i vill maximera sin förväntade nytta är hans problem fortfarande ett renodlat beslutsproblem; nu ska han maximera funktionen $x_i \mapsto U_i(x_i; \mu)$.

Eftersom en spelare inte kan vara förvissad om att de övriga spelarna spelar enligt en viss sannolikhetsfördelning, använder vi oss av följande terminologi.

Definition 7.1.1 Med en *övertygelse* hos spelare i menas en sannolikhetsfördelning på mängden A_{-i}. En handling $a_i \in A_i$ säges vara *understödd av övertygelsen* μ om den maximerar funktionen $x_i \mapsto U_i(x_i; \mu)$.

Observera att vi inte utesluter övertygelser som innebär att motspelarna samverkar och samordnar sina aktioner. En spelares övertygelse behöver med andra ord inte vara en produkt av oberoende sannolikhetsfördelningar på motspelarnas handlingsmängder.

Exempel 7.1.1 Låt oss bestämma några övertygelser som understöder olika handlingar i tvåpersonersspelet med utbetalningsmatrisen

	V	M	H
P	$(4, 12)$	$(6, 4)$	$(2, 5)$
Q	$(8, 3)$	$(2, 6)$	$(4, 5)$
R	$(6, 5)$	$(5, 9)$	$(3, 8)$

Radspelarens övertygelse δ_M, dvs. övertygelsen att kolonnspelaren väljer sina handlingsalternativ med sannolikheterna 0, 1 resp. 0, understöder uppenbarligen handlingen P, medan övertygelsen δ_V istället understöder handlingen Q. Övertygelsen $\mu = 0.1\delta_V + 0.4\delta_M + 0.5\delta_H$ understöder handlingen R, vilket följer av beräkningen

$$\begin{aligned} U_1(P; \mu) &= 0.1 \cdot 4 + 0.4 \cdot 6 + 0.5 \cdot 2 = 3.8, \\ U_1(Q; \mu) &= 0.1 \cdot 8 + 0.4 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4 = 3.6, \\ U_1(R; \mu) &= 0.1 \cdot 6 + 0.4 \cdot 5 + 0.5 \cdot 3 = 4.1, \end{aligned}$$

som visar att $U_1(R; \mu)$ är störst.

Spelare 2 har inte någon övertygelse $\nu = \alpha_1\delta_P + \alpha_2\delta_Q + \alpha_3\delta_R$ som understöder handlingen H, ty eftersom $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ får vi genom att eliminera α_1:

$$\begin{aligned} U_2(V; \nu) &= 12\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 12 - 9\alpha_2 - 7\alpha_3, \\ U_2(M; \nu) &= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 4 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3, \\ U_2(H; \nu) &= 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 5 + 3\alpha_3. \end{aligned}$$

Man finner nu lätt att för $\alpha_2 + \alpha_3 > \frac{1}{2}$ är $U_2(M; \nu) > U_2(H; \nu)$ och att för $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \frac{1}{2}$ är $U_2(V; \nu) > U_2(H; \nu)$. Det finns med andra ord ingen övertygelse som gör $U_2(H; \nu)$ störst. □

Nästa sats visar att handlingar som inte stöds av någon övertygelse inte kan ingå i en spelares Nashjämviktsstrategi med positiv sannolikhet.

Sats 7.1.1 *Låt p^* vara en blandad Nashjämvikt i spelet $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$. Varje spelare i har en övertygelse som stöder alla handlingar $a_i \in A_i$ med $p_i^*(a_i) > 0$.*

Bevis. Låt μ vara det produktlotteri på A_{-i} som bildas genom att multiplicera lotterierna $p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*$ i strategivektorn p_{-i}^*. För $x_i \in A_i$ är då

$$U_i(x_i; \mu) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_{-i}, x_i)\mu(a_{-i}) = \tilde{u}_i(p_{-i}^*, x_i).$$

Om nu $a_i \in A_i$ är en handling med $p_i^*(a_i) > 0$, så är $\tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) = \tilde{u}_i(p^*)$ på grund av likgiltighetsprincipen och följaktligen

$$U_i(a_i; \mu) = \tilde{u}_i(p_{-i}^*, a_i) = \tilde{u}_i(p^*) \geq \tilde{u}_i(p_{-i}^*, x_i) = U_i(x_i; \mu)$$

för alla $x_i \in A_i$. Handlingen a_i stöds därför av övertygelsen μ. □

Vad blir utfallet i ett spel med ”förnuftiga” deltagare? Om en spelares handling inte understöds av någon övertygelse, bör spelaren rimligtvis inte välja handlingen ifråga. Ett naturligt förnuftskrav är att varje spelare gör sina val bland de handlingsalternativ som har stöd i någon övertygele.

Därför är det naturligt att börja med att karakterisera mängden av handlingar som saknar stöd i övertygelser.

Sats 7.1.2 *En spelares handling i ett strategiskt spel* $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ *saknar övertygelse som stöder den, om och endast om handlingen är strikt dominerad.*

Bevis. Genom omnumrering kan vi utan inskränkning anta att spelaren som vi ska visa satsens påståendet för är spelare 1.

Så låt $\hat{a}_1$ vara en handling för spelare 1; vi ska visa att spelaren saknar övertygelse som stöder $\hat{a}_1$ om och endast om handlingen är strikt dominerad. Definiera för den skull ett tvåpersoners nollsummespel

$$G' = \langle \{1, 2\}, (B_i), (v_i)\rangle$$

med $B_1 = A_1 \setminus \{\hat{a}_1\}$ som handlingsmängd för spelare 1, $B_2 = A_{-1}$ som handlingsmängd för spelare 2, och följande funktion v som spelare 1:s nyttofunktion

$$v(b_1, b_2) = u_1(b_1, b_2) - u_1(\hat{a}_1, b_2).$$

(Funktionen v är väldefinierad eftersom (b_1, b_2) och $(\hat{a}_1, b_2)$ är handlingsvektorer i spelet G.) Spelare 2:s nyttofunktion är förstås lika med $-v$.

En blandad strategi för spelare 2 i spelet G' är per definition en sannolikhetsfördelning på mängden A_{-1}, dvs. en övertygelse μ för spelare 1 i spelet G, och en blandad strategi för spelare 1 i spelet G' är detsamma som en blandad strategi p_1 för spelare 1 i spelet G med egenskapen att $p_1(\hat{a}_1) = 0$. Låt P beteckna mängden av alla blandade strategier för spelare 1, och låt M beteckna mängden av alla blandade strategier för motspelaren 2 i spelet G'.

Spelare 1:s förväntade nytta av sin blandade strategi p_1 då spelare 2 väljer den blandade strategin μ är

$$\tilde{v}(p_1, \mu) = \sum_{b_1 \in B_1} \sum_{b_2 \in B_2} v(b_1, b_2) p_1(b_1) \mu(b_2).$$

För en ren strategi $p_1 = \delta_{a_1}$ för spelare 1 (där alltså a_1 är en handling i mängden B_1) och en godtycklig blandad strategi $\mu \in M$ för spelare 2 är således speciellt

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \tilde{v}(\delta_{a_1},\mu) &= \sum_{b_2\in B_2} v(a_1,b_2)\mu(b_2) \\
&= \sum_{b_2\in A_{-1}} u_1(a_1,b_2)\mu(b_2) - \sum_{b_2\in A_{-1}} u_1(\hat{a}_1,b_2)\mu(b_2) \\
&= U_1(a_1;\mu) - U_1(\hat{a}_1;\mu).
\end{aligned}
$$

Att det inte finns någon övertygelse som stöder handlingsalternativet $\hat{a}_1$ i spelet G är ekvivalent med att det för varje sannolikhetsfördelning μ på A_{-1} finns ett handlingsalternativ a_1 för spelare 1 så att $U_1(a_1;\mu) > U_1(\hat{a}_1;\mu)$, vilket i ljuset av ekvation (1) är ekvivalent med att det för varje blandad strategi $\mu \in M$ i spelet G' finns en ren strategi $\delta_{a_1} \in P$ så att $\tilde{v}(\delta_{a_1},\mu) > 0$.

Väntevärdet $\tilde{v}(p_1,\mu)$ är för varje blandad strategi $p_1 \in P$ en konvex kombination av väntevärdena $\tilde{v}(\delta_{a_1},\mu)$, där a_1 tillhör mängden B_1. Därför finns det, givet $\mu \in M$, ett $a_1 \in B_1$ så att $\tilde{v}(\delta_{a_1},\mu) > 0$ om och endast om det finns ett $p_1 \in P$ så att $\tilde{v}(p_1,\mu) > 0$.

Vi har därför visat att det inte finns någon övertygelse μ som stöder $\hat{a}_1$ om och endast om

$$\max_{p_1\in P} \tilde{v}(p_1,\mu) > 0 \quad \text{för alla } \mu \in M,$$

vilket i sin tur är ekvivalent med villkoret

$$\min_{\mu\in M} \max_{p_1\in P} \tilde{v}(p_1,\mu) > 0.$$

Enligt maxminsatsen för nollsummespel (sats 6.1.1) är emellertid

$$\max_{p_1\in P} \min_{\mu\in M} \tilde{v}(p_1,\mu) = \min_{\mu\in M} \max_{p_1\in P} \tilde{v}(p_1,\mu).$$

Att det inte finns någon övertygelse som stöder $\hat{a}$ är därför ekvivalent med villkoret

$$\max_{p_1\in P} \min_{\mu\in M} \tilde{v}(p_1,\mu) > 0,$$

dvs. med att det finns en blandad strategi p_1^* för spelare 1 i spelet G' så att $\tilde{v}(p_1^*,\mu) > 0$ för alla övertygelser μ hos spelare 1 i spelet G.

Eftersom funktionen $\tilde{v}(p_1^*,\mu)$ är linjär med avseende på den andra variabeln och varje övertygelse μ är en konvex kombination av de säkra lotterierna $\delta_{a_{-1}}$ på mängden A_{-1}, är $\tilde{v}(p_1^*,\mu) > 0$ för alla övertygelser μ om och endast om

$$\sum_{a_1\in B_1} v(a_1,a_{-1})p_1^*(a_1) = \tilde{v}(p_1^*,\delta_{a_{-1}}) > 0$$

för alla handlingsvektorer a_{-1} i A_{-1}, dvs. om och endast om

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(p_1^*, a_{-1}) - u_1(\hat{a}_1, a_{-1}) &= \sum_{a_1 \in B_1} \big(u_1(a_1, a_{-1}) - u_1(\hat{a}_1, a_{-1})\big)p_1^*(a_1) \\ &= \sum_{a_1 \in B_1} v(a_1, a_{-1})p_1^*(a_1) > 0\end{aligned}$$

för alla $a_{-1} \in A_{-1}$, vilket betyder att handlingen $\hat{a}_1$ är strikt dominerad av den blandade strategin p_1^*.

Därmed har vi visat att det saknas övertygelser som stöder handlingen $\hat{a}_1$ om och endast om handlingen är strikt dominerad. □

Exempel 7.1.2 I spelet i exempel 7.1.1 saknar kolonnspelaren övertygelser som stöder handlingen H. Denna är således strikt dominerad. Mycket riktigt, kolonnspelarens blandade strategi $p_2 = 0.2\delta_V + 0.8\delta_M$, som innebär att han väljer alternativ V med 20% sannolikhet och alternativ M med 80% sannolikhet, dominerar H strikt eftersom

$$\begin{aligned}\tilde{u}_2(P, p_2) &= 0.2 \cdot 12 + 0.8 \cdot 4 = 5.6 > 5 = u_2(P, H) \\ \tilde{u}_2(Q, p_2) &= 0.2 \cdot 3 + 0.8 \cdot 6 = 5.4 > 5 = u_2(Q, H) \\ \tilde{u}_2(R, p_2) &= 0.2 \cdot 5 + 0.8 \cdot 9 = 8.2 > 8 = u_2(R, H).\end{aligned}$$

Däremot är ingen av radspelarens handlingar strikt dominerad eftersom samtliga har stöd i övertygelser. □

Övning

7.1 a) Visa för spelet i exempel 7.1.1 att $\big((\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)\big)$ är en blandad Nashjämvikt.

b) Verifiera att radspelarens övertygelse $\frac{1}{3}\delta_V + \frac{2}{3}\delta_M$ stöder handlingarna P och R, och att kolonnspelarens övertygelse $\frac{1}{3}\delta_P + \frac{2}{3}\delta_R$ stöder handlingarna V och M.

7.2 Rationaliserbarhet

Vi har argumenterat för att varje spelare bara bör välja handlingar som har stöd i någon övertygelse. Men alla övertygelser är inte förnuftiga. Exempelvis förefaller det inte förnuftigt för en spelare att tro att någon annan spelare ska välja ett för honom strikt dominerat alternativ med positiv sannolikhet. Den förstnämnda spelaren bör basera sina övertygelser på att alla övriga spelarna endast väljer alternativ som de i sin tur kan understödja med någon övertygelse. Varje annan spelare bör i sin tur agera på liknande sätt och den förstnämnda spelaren bör utgå ifrån att så är fallet.

Exempel 7.2.1 Betrakta spelet G med utbetalningstabellen

	V	M	H
T	$(2,2)$	$(1,1)$	$(4,0)$
B	$(1,2)$	$(4,1)$	$(3,5)$

Kolonnspelarens alternativ M domineras strikt av alternativet V, så genom elimination erhåller vi delspelet G^1 med utbetalningstabellen:

	V	H
T	$(2,2)$	$(4,0)$
B	$(1,2)$	$(3,5)$

I detta spel är radspelarens alternativ B strikt dominerat; förnyad elimination leder till spelet G^2:

	V	H
T	$(2,2)$	$(4,0)$

Nu är kolonnspelarens alternativ H strikt dominerat, så en sista elimination ger det triviala spelet G^3:

	V
T	$(2,2)$

med en enda handlingsvektor (T,V), som vi känner igen som det ursprungliga spelets unika Nashjämvikt.

Låt oss nu se vilken argumentation som behövs för att spelarna ska ledas fram till detta alternativ

1. En rationell kolonnspelare väljer inte alternativet M eftersom det är strikt dominerat av alternativet V; det finns enligt sats 7.1.2 ingen övertygelse under vilken M är bästa val.
2. Om radspelaren vet att kolonnspelaren är rationell, så inser han att kolonnspelaren inte väljer handlingen M. Han kan därför eliminera den ur diskussionen och befinner sig därmed i spelet G^1. Om han nu också själv är rationell, så väljer han inte B eftersom den handlingen är strikt dominerad av T och därför inte har stöd i någon övertygelse.
3. Om kolonnspelaren är rationell, vet att radspelaren är rationell och att radspelaren vet att kolonnspelaren är rationell, så vet kolonnspelaren att radspelaren väljer alternativ T. Därför återstår endast spelet G^2 och i det är alternativet H strikt dominerat av V. Kolonnspelaren ska således välja handlingen V, och därmed blir slutresultatet att spelarna väljer handlingsvektorn (T,V). □

Det kan vara värt att notera vilken form av kunskap som de båda spelarna måste besitta för att ovanstående resonemang ska vara giltigt. Radspelaren måste veta att kolonnspelaren är rationell. Kolonnspelaren måste veta att radspelaren vet att kolonnspelaren är rationell, vilket är en ”högre nivå” av kunskap. Det räcker inte för en spelare att veta att motspelaren är rationell, utan han måste också vara säker på att motspelaren vet att den förstnämnde spelaren är rationell. Det finns förstås ännu högre nivåer av kunskap. Jag kanske vet att min motspelare är rationell och att han vet att jag är det. Men han kanske inte vet att jag vet att han vet.

Vi ska nu precisera ovanstående resonemang genom att införa begreppet rationaliserbara handlingar. Låt oss i spelet $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ provisoriskt kalla spelare i:s övertygelse μ *förnuftig* om $\mu(a_{-i}) = 0$ för alla handlingsvektorer a_{-i} hos motståndarna som innehåller någon handling a_k som inte stöds av någon förnuftig övertygelse hos spelare k. Låt oss vidare kalla spelare i:s handling a_i *rationaliserbar* om handlingen stöds av någon förnuftig övertygelse hos spelaren.

Den rekursiva definitionen av begreppet förnuftig övertygelse kan förefalla problematisk och behöver förstås specificeras. Det kan vi göra genom att först betrakta spelare 1 och låta B_1 vara den delmängd av spelarens handlingsmängd A_1 vars handlingar har stöd av någon övertygelse. I delspelet G^1 med $A_{-1} \times B_1$ som utfallsmängd låter vi B_2 vara den delmängd av A_2 vars handlingar stöds av någon övertygelse hos spelare 2, och G^2 är delspelet med $B_1 \times B_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ som utfallsmängd. Efter n steg har vi ett delspel G^n med $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ som utfallsmängd, där B_n är de handlingar som har stöd av någon övertygelse hos spelare n i delspelet G^{n-1}. Nu börjar vi om med spelare 1 och låter C_1 vara den delmängd av B_1 som består av spelare 1:s handlingar som har stöd av övertygelser i delspelet G^n. Efter ett antal varv kommer vi att stanna i ett delspel G' med utfallsmängd $Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$, där det för varje spelare k gäller att samtliga handlingar $a_k \in Z_k$ har stöd av någon övertygelse. Dessa övertygelser är de förnuftiga övertygelserna och handlingarna i Z_k är spelare k:s rationaliserbara handlingar.

Istället för att gå omvägen över förnuftiga övetygelser är det emellertid enklare att definiera begreppet rationaliserbar handling direkt på följande sätt.

Definition 7.2.1 Spelare i:s handling a_i i spelet $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ är *rationaliserbar* om det för varje $k \in N$ finns en delmängd Z_k av A_k med följande två egenskaper:

(i) $a_i \in Z_i$.

(ii) För varje $k \in N$ och varje handling $a_k \in Z_k$ har spelare k en övertygelse μ som stöder a_k och som är noll utanför mängden Z_{-k}, dvs. $\mu(a_{-k}) = 0$ för alla $a_{-k} \notin Z_{-k}$.

Observera att om mängderna $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ uppfyller villkoren i definitionen, så är alla handlingar i Z_k rationaliserbara för varje spelare k.

Finns det då alltid rationaliserbara handlingar? Det jakande svaret ges av nästa sats.

Sats 7.2.1 *I varje ändligt spel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ finns det en unik största icke-tom produktdelmängd $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$ av $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ med följande egenskap:*

För varje spelare i och varje handling $a_i \in Z_i$ finns det en övertygelse μ som stöder a_i och är noll utanför Z_{-i}.

Bevis. Vi visar först att det finns en icke-tom produktmängd Z med den angivna egenskapen och sedan att det finns en största sådan mängd.

Låt därför p^* vara en blandad Nashjämvikt i spelet, och definiera produktmängden Z genom att för varje spelare i sätta

$$Z_i = \{a_i \in A_i \mid p_i^*(a_i) > 0\}.$$

Det följer omedelbart av beviset för sats 7.1.1 att varje handling i Z_i stöds av det produktmått μ på A_{-i} som bildas av de blandade strategierna i p^*_{-i}, och μ är noll utanför Z_{-i}.

För att visa att det finns en unik största produktmängd Z med den angivna egenskapen betraktar vi alla produktmängder som uppfyller villkoret i satsen; det finns förstås bara ändligt många så vi kan numrera dem som Z^1, Z^2, …, Z^m. Låt nu Z vara den produktmängd som fås genom att sätta $Z_i = Z_i^1 \cup Z_i^2 \cup \cdots \cup Z_i^m$ för alla spelare i. Denna produktmängd måste då också uppfylla villkoret i satsen, ty om a_i är en godtycklig handling i Z_i, så ligger a_i i mängden Z_i^k för något k, och därför finns det en övertygelse μ som stöder a_i och som är noll utanför Z_{-i}^k och därför också noll utanför den större mängden Z_{-i}. Mängden Z är naturligtvis den unika största mängden med egenskapen i satsen eftersom den innehåller alla mängderna Z^k som delmängder. □

Exempel 7.2.2 I spelet

	V	M	H
P	$(4, 12)$	$(6, 4)$	$(2, 5)$
Q	$(8, 3)$	$(2, 6)$	$(4, 5)$
R	$(7, 5)$	$(1, 9)$	$(3, 8)$

är produktmängden av spelarnas rationaliserbara handlingar lika med mängden $Z = \{P, Q\} \times \{V, M\}$. Radspelarens handling P har stöd av övertygelsen δ_M och handlingen Q har stöd av övertygelsen δ_V, och båda dessa övertygelser är noll utanför $\{V, M\}$. På motsvarande sätt har kolonnspelarens handling V stöd i övertygelsen δ_P och handlingen M har stöd av övertygelsen δ_Q. Det är också lätt att övertyga sig om att det inte finns någon större produktmängd av rationaliserbara handlingar än Z. □

Av beviset för sats 7.2.1 framgår att alla handlingar som ingår med positiv sannolikhet i en blandad Nashjämvikt är rationaliserbara. Av sats 7.1.2

följer vidare att ingen strikt dominerad handling kan vara rationaliserbar. Det precisa sambandet mellan rationaliserbarhet och strikt dominans ges av följande sats.

Sats 7.2.2 *En handling i ett ändligt strategiskt spel överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar om och endast om handlingen är rationaliserbar.*

Bevis. Låt Z vara produktmängden av rationaliserbara handlingar i spelet $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$, och antag att B är en produktmängd av handlingar som överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar. Låt vidare $G^t = \langle N, (A_i^t), (u_i)\rangle$, $t = 0, 1, \ldots, T$, beteckna kedjan av delspel som genom itererad elimination av strikt dominerade handlingar leder från $G^0 = G$ till delspelet $G^T = \langle N, (B_i), (u_i)\rangle$ (jmf med definition 5.4.3). Vi ska visa att $Z_i = B_i$ för alla spelare i.

Vi börjar med att induktivt visa att Z är ett delmängd av produktmängden $A^t = A_1^t \times \cdots \times A_n^t$ för $t = 0, 1, \ldots, T$. Startsteget $t = 0$ är klart eftersom $A^0 = A$, så antag därför att inklusion en $Z \subseteq A^t$ gäller för något $t < T$.

Alla handlingar i Z_i har per definition stöd av någon övertygelse μ som är noll utanför mängden Z_{-i}; på grund av induktionsantagandet är därför μ noll utanför den större mängden A_{-i}^t. Detta innebär att alla handlingar i Z_i har stöd av någon övertygelse i spelet G^t, och det följer därför av sats 7.1.2 att ingen handling i Z_i är strikt dominerad betraktad som handling i delspelet G^t. Alla handlingar i Z_i överlever alltså den elimination av strikt dominerade handlingar som leder från G^t till delspelet G^{t+1}, vilket betyder att $Z_i \subseteq A_i^{t+1}$ och att följaktligen Z är en delmängd till A^{t+1}.

Därmed är induktionssteget klart, och för ändpunkten $t = T$ får vi den sökta inklusionen $Z \subseteq A^T = B$.

Det återstår att visa omvändningen $B \subseteq Z$, och för den skull räcker det att visa att produktmängden $B = A^T$ uppfyller villkoret i sats 7.2.1, dvs. att varje handling $a_i \in A_i^T$ är understödd av någon övertygelse som är noll utanför A_{-i}^T, ty Z är den största delproduktmängden med denna egenskap.

Låt a_i vara en godtycklig handling i A_i^T. Eftersom a_i inte är strikt dominerad av någon strategi i spelet G^T har handlingen (enligt sats 7.1.2 tillämpad på delspelet G^T) stöd i någon övertygelse μ för spelare i som är noll utanför mängden A_{-i}^T, vilket i det här fallet innebär att a_i maximerar spelarens förväntade nytta $U_i(x_i; \mu)$ då x_i varierar över mängden A_i^T. Problemet är att vi behöver visa att handlingen a_i också har stöd av övertygelsen μ när vi betraktar a_i som en handling i det ursprungliga spelet $G = G^0$, dvs. att a_i maximerar den förväntade nyttan $U_i(x_i; \mu)$ för alla $x_i \in A_i$.

Antag att så inte är fallet; då finns det ett $t < T$ så att a_i maximerar den förväntade nyttan $U_i(x_i; \mu)$ för alla $x_i \in A_i^{t+1}$ men inte för alla $x_i \in A_i^t$. Låt b_i vara en handling i A_i^t som ger maximum; handlingen b_i är med andra ord en handling i spelet G^t som har stöd av övertygelsen μ. Eftersom $U_i(b_i;\mu) > U_i(a_i;\mu)$, kan b_i inte tillhöra mängden A_i^{t+1}, utan $b_i \in A_i^t \setminus A_i^{t+1}$. Detta betyder att handlingen b_i blir eliminerad vid övergången från spelet G^t till spelet G^{t+1}, och den är därför strikt dominerad av någon blandad strategi i spelet G^t. Detta motsäger sats 7.1.2 eftersom b_i har stöd i övertygelsen μ i samma spel.

Motsägelsen visar att a_i har stöd av övertygelsen μ även betraktad som handling i spelet G, och detta bevisar att B uppfyller villkoret i sats 7.2.1. $\square$

Korollarium 7.2.3 *Produktmängden av handlingar som överlever itererad elimination av strikt dominerade handlingar är entydigt bestämd.*

Bevis. Korollariet följer omedelbart av föregående sats eftersom spelarnas rationaliserbara handlingar är entydigt bestämda av sats 7.2.1. $\square$

Exempel 7.2.3 I spelet i exempel 7.2.2 domineras radspelarens handling R strikt av handlingen Q, och när handlingen R eliminerats är kolonnspelarens handling H strikt dominerad av den blandade strategin $0.25\delta_V + 0.75\delta_M$. Itererad elimination av strikt dominerade handlingar leder därför till delspelet

	V	M
P	$(4,12)$	$(6,4)$
Q	$(8,3)$	$(2,6)$

vilket stämmer med att P och Q är radspelarens rationaliserbara handlingar, och V och M är kolonnspelarens rationaliserbara handlingar. $\square$

Kapitel 8

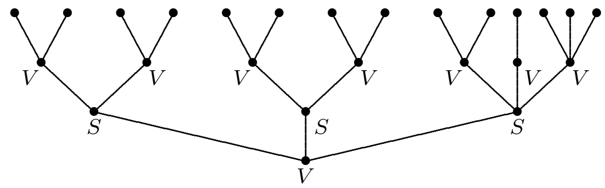
Extensiva spel med perfekt information

I strategisk form beskrivs spelsituationer på ett mycket kompakt sätt, men det är ändå möjligt att analysera många intressanta frågeställningar. Förutsättningen att alla spelarna väljer sina aktionsplaner samtidigt och en gång för alla gör emellertid att en del viktiga aspekter går förlorade. I många konfliktsituationer och spel kan deltagarna överväga och modifiera sina handlingsalternativ allteftersom läget utvecklas och inte bara i början av spelet. Den extensiva formen är ett sätt att modellera sådana spel.

8.1 Spelträd

I schack flyttar de båda spelarna Vit och Svart omväxlande sina pjäser enligt bestämda regler; detta kallas att göra drag. Vit börjar och har då 20 drag att välja på, sedan är det Svarts tur och Svart har också 20 möjliga förstadrag. Därefter är det åter Vits tur och antalet möjliga drag beror nu på spelställningen. När spelarna omväxlande gjort ett antal drag kan det uppstå en ställning där spelaren i tur att dra inte har några tillåtna drag − antingen på grund av att spelarens kung blivit schackad och det inte finns något drag som spelaren kan göra för att undgå schacken; i så fall är kungen schackmattad och motspelaren har vunnit − eller på grund av att spelaren utan att vara schackad inte har något tillåtet drag; i det fallet är spelarens kung pattsatt och spelet förklaras oavgjort eller remi. Spelet är också remi om de kvarvarande pjäserna inte räcker för att göra någon schackmatt, om samma ställning uppkommit tre gånger, eller om ingen pjäs slagits och ingen bonde flyttats under 50 drag för vardera spelare. Ett parti kan också avslutas i förtid genom att en av spelarna ger upp i en hopplös ställning eller genom att spelarna enas om remi. Alla schackpartier slutar därför efter ändligt många drag.

Vi kan illustrera schack med hjälp av ett spelträd såsom i figur 8.1.



Figur 8.1. Ett spelträd

Trädets rot symboliserar startpositionen i spelet, och grenarna från roten är Vits möjliga första drag (tjugo stycken men i figuren har vi bara ritat ut tre). Efter vart och ett av dessa uppkommer en ställning, som i spelträdet representeras av en förgreningspunkt eller nod, där det är Svarts tur att dra, och Svart har nu ett antal möjliga drag som vart och ett symboliseras av en gren (i figuren har vi ritat ett varierande antal trots att svart i verkligheten har tjugo möjliga förstadrag), osv. Trädet i figuren visar förstås bara en liten del av schacks ofantligt stora spelträd, som är så stort och komplext att det inte går att rita i praktiken.

I schack svarar varje nod i spelträdet mot en schackställning, men observera att det inte råder någon ett-ett-motsvarighet mellan noder och konfigurationer av pjäser på brädet, ty samma pjäskonfiguration kan uppkomma efter olika dragserier, och vilka drag som en spelare får göra bestäms ytterst av de tidigare dragen. (Exempelvis får en spelare inte göra specialdraget rockad om kungen eller tornet flyttats tidigare.) Schackreglerna definierar således entydigt vilka grenar som utgår från varje nod i spelträdet.

Slutställningarna i schack, dvs. ställningar där en av spelarna vunnit eller där spelet är remi, svarar mot noder från vilka det inte går några grenar. Varje ”väg” i trädet från roten upp till en slutställning svarar mot ett konkret schackparti.

Med ovanstående beskrivning av schack som modell gör vi nu följande allmänna definition.

Definition 8.1.1 Ett *spelträd* $\langle P, p_0, e\rangle$ är en struktur som består av följande komponenter:

- en icke-tom mängd P av *positioner*;
- ett speciellt element $p_0 \in P$, *startpositionen*;
- en funktion $e\colon P \to \mathcal{P}(P)$ från positionsmängden P till mängden $\mathcal{P}(P)$ av alla delmängder av P med följande egenskap:
  För varje position $p \neq p_0$ finns det en unik följd $(p_k)_{k=1}^n$ av positioner sådan att $p_n = p$ och $p_{k+1} \in e(p_k)$ för $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Positionerna i $e(p)$ kallas *efterföljare* till positionen p, och den mängdvärda funktionen e kallas *efterföljarfunktionen*. Positioner med minst en efterföljare kallas *inre positioner*, och positioner som saknar efterföljare kallas *slutpositioner*. Mängden av alla inre positioner betecknas P°.

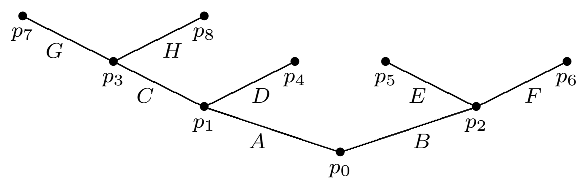
Ett par (p, q) som består av en inre position p i spelträdet och en efterföljare q till p kallas ett *drag*.

En *dragföljd* av *längd* $n-1$ från positionen p_1 i spelträdet är en följd $(p_k)_{k=1}^n$ av positioner med egenskapen att p_{k+1} är en efterföljare till p_k för $k = 1, 2, \ldots, n-1$, eller ekvivalent en följd av $n-1$ stycken drag (p_k, p_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, n-1$. En *oändlig dragföljd* från positionen p_1 är en oändlig följd $(p_k)_{k=1}^\infty$ av positioner sådana att p_{k+1} är en efterföljare till p_k för alla positiva heltal k.

En dragföljd som startar i spelträdets startposition p_0 och slutar i en slutposition eller fortgår i all oändlighet kallas ett *parti*. Mängden av alla partier i ett spelträd kommer att betecknas Π.

Vi kommer ofta att tilldela dragen i spelträd namn för att på ett bekvämt sätt kunna referera till dem. Vidare kommer vi vanligtvis att ange dragföljder genom att lista de successiva dragen istället för de successiva positionerna.

Exempel 8.1.1 Vi illustrerar spelträd genom att rita dem som "träd" med startpositionen längst ned som rot och med "grenar" i form av linjer från varje position till varje efterföljande position. Figur 8.2 visar ett spelträd med nio positioner. Positionen p_0 är startposition, positionerna p_0, p_1, p_2 och p_3 är inre positioner, och positionerna p_4, p_5, p_6, p_7 och p_8 är slutpositioner. Vi har givit dragen bokstavsnamn så att exempelvis draget (p_0, p_1) kallas A. Dragföljden p_0, p_1, p_3, p_8 är ett parti av längd 3, som också kan beskrivas som ACH. Det finns totalt fem partier, nämligen ACG, ACH, AD, BE och BF. □



Figur 8.2. Spelträdet i exempel 8.1.1.

Definition 8.1.2 Ett spelträd kallas *ändligt* om positionsmängden är ändlig. Ett spelträd säges ha *ändlig höjd* om det finns ett tal c så att inga partier är längre än c, och trädets *höjd* definieras i så fall som längden av det längsta partiet i spelträdet.

Alla ändliga spelträd har förstås ändlig höjd, men omvändningen gäller inte.

Övningar

8.1 Ge exempel på ett icke-ändligt spelträd med ändlig höjd.

8.2 Ge exempel på ett spelträd som inte har ändlig höjd men där alla partier har ändlig längd.

8.2 Spel på extensiv form

Vi har infört begreppet spelträd $\langle P, p_0, e\rangle$ men för att göra det hela till ett spel behöver vi också spelare och regler för vem som skall utföra ett drag i en given inre position. Det är enkelt; låt $N = \{1, 2, \dots, n\}$ vara mängden av spelare. Vi förutsätter att det i varje inre position p endast är en spelare som får göra ett drag; om vi kallar den spelaren för $S(p)$ så har vi därigenom också definierat en funktion S från mängden P° av inre positioner till mängden N av spelare. Det är förstås onödigt att bestämma vem som skall dra i en slutposition, eftersom det inte finns några drag att göra där.

För att ge spelarna incitament att utföra sina drag behöver vi slutligen ange deras preferenser för de olika utfallen. I schack föredrar varje spelare att vinna framför remi och remi framför förlust, vilket vi naturligtvis också kan ange med en nyttofunktion som ger 1 poäng för vinst, $\frac{1}{2}$ poäng för remi och 0 poäng för förlust.

I ett godtyckligt spel antar vi på motsvarande sätt att varje spelare i har en preferensrelation $\succeq_i$ (eller en nyttofunktion u_i) som är definierad på mängden Π av alla partier. Om det inte finns några oändliga partier, dvs. om varje parti slutar i en slutposition, så råder det en ett-ett-motsvarighet mellan partier och slutpositioner, så i det viktiga fallet kan vi lika gärna anse att preferensrelationerna är definierade på mängden av alla slutpositioner i spelträdet.

Vi är nu redo för den formella definitionen av ett extensivt spel.

Definition 8.2.1 Ett n-personers spel $\langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i)\rangle$ på *extensiv form med perfekt information* består av

- en mängd $N = \{1, 2, \dots, n\}$ av *spelare*;
- ett *spelträd* $T = \langle P, p_0, e\rangle$;
- en funktion $S\colon P^\circ \to N$, *spelarfunktionen*;
- för varje spelare $i \in N$ en preferensrelation $\succeq_i$ på mängden Π av alla partier.

Spelet säges ha *ändlig horisont* om spelträdet T har ändlig höjd, och spelet kallas *ändligt* om spelträdet är ändligt.

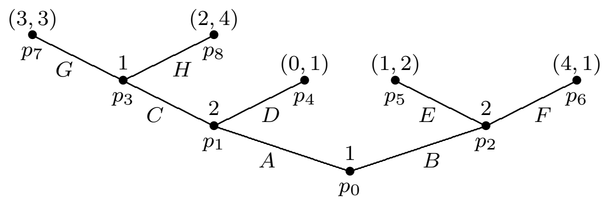
Anmärkning. Definitionen av spel kräver inte att alla spelarna i N medverkar genom att göra drag. Spelarfunktionen S behöver med andra ord inte vara surjektiv. Anledningen till att tillåta passiva spelare är att vi därigenom förenklar några induktionsresonemang som vi kommer att göra längre fram. Av samma skäl kräver vi inte att det skall finnas några inre positioner. Ett spel utan inre positioner är förstås trivialt – det består bara av startpositionen, och deltagarfunktionen är tom.

Tilläget ”perfekt information” motiveras av att spelarna varje gång de står i tur att utföra ett drag vet vilka drag som gjorts tidigare och var någonstans i spelträdet spelet befinner sig. Vi kommer i nästa kapitel att studera spel där denna information inte föreligger.

När vi illustrerar extensiva spel i figurer kommer vi att beskriva spelarfunktionen och nyttofunktionerna genom att vid varje inre position p ange spelaren $S(p)$ och vid varje slutposition p ange spelarnas nyttovärden $(u_1(p), \dots, u_n(p))$. Vi utelämnar dock nyttovärdena i de fall då dessa inte spelar någon roll för den aktuella diskussionen.

En konkret instans av ett spel går till på så sätt att spelare $S(p_0)$ börjar med att välja ett av de möjliga dragen vid startpositionen p_0, dvs. spelaren väljer en efterföljande position p_1. Därefter väljer spelaren vid p_1, dvs. spelare $S(p_1)$, en efterföljande position p_2 till p_1. Sedan väljer spelare $S(p_2)$ en efterföljare p_3 till p_2, osv. Så snart någon av de efterföljande positionerna, p_k säg, är en slutposition, är spelet slut och har resulterat i partiet $p_0, p_1, \dots, p_k$. Om spelarna hela tiden genererar inre positioner, så erhålls istället ett oändligt parti.

Exempel 8.2.1 Figur 8.3 visar ett extensivt tvåpersonersspel med trädet i figur 8.2 som spelträd. Spelare 1 gör drag i utgångspositionen p_0 och i positionen p_3, medan det är spelare 2:s tur att göra drag i positionerna p_1 och p_2.



Figur 8.3. Spelet i exempel 8.2.1.

Dragföljden ACH svarar mot partiet $p_0p_1p_3p_8$, som ger 2 nyttoenheter till spelare 1 och 4 nyttoenheter till spelare 2. Båda spelarna föredrar därför detta parti framför exempelvis partiet BE. Däremot är partiet BF bättre för spelare 1. □

Strategier

Vi skall nu definiera begreppet strategi för spel på extensiv form så att det motsvarar begreppet handling eller ren strategi i strategiska spel.

En strategi för en spelare är en plan som beskriver vad spelaren skall göra i **varje** position av spelet där det enligt reglerna är spelaren som skall utföra ett drag, och detta oavsett om spelaren kan komma till den positionen eller ej om han följer sin plan.

Detta skiljer sig från den normala användningen av begreppet strategi i exempelvis schack. Ingen schackspelare kan ha en spelplan som beskriver hur han skall göra i alla tänkbara positioner, utan spelplanen utvecklas efter hand. Goda schackspelare spelar normalt efter i förväg uppgjorda planer under öppningsspelet, dvs. under de säg första tio dragen, planer som innebär att de i förväg bestämt sig för hur alla ”vettiga drag” av motspelaren skall besvaras. De första dragen utförs därför snabbt efter invanda spår och gör att man kan tala om spansk öppning, siciliansk öppning, etc.

Rent teoretiskt kan vi emellertid tänka oss att de båda spelarna har planer för allt (inbegripet sådana ställningar som inte kan uppkomma om en spelare följer sin plan). I så fall är det förstås onödigt att de spelar igenom partiet själva; de kan istället lämna sina respektive planer till en tredje part, en domare, som sedan kan genomföra partiet efter deras intentioner och se hur det slutar.

Motsvarande gäller för alla extensiva spel om spelarna har färdiga planer för alla positioner i spelet − utgången är då helt bestämd av planerna.

Vi är nu redo för den formella definitionen.

Definition 8.2.2 Låt P_i beteckna mängden av alla positioner i det extensiva spelet $\langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i)\rangle$ där det är spelare i:s tur att göra ett drag, dvs.

$$P_i = \{p \in P^\circ \mid S(p) = i\}.$$

Med en *strategi* σ för spelare i menas en funktion $\sigma\colon P_i \to P$ med egenskapen att $\sigma(p)$ är en efterföljare till p för alla $p \in P_i$.

Mängden av alla strategier för spelare i kommer att betecknas Σ_i. Vidare sätter vi $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$.

Anmärkning. För en spelare i som inte utför några drag i spelet är mängden P_i tom, och då består spelarens strategimängd Σ_i bara av den tomma funktionen. Detta är förstås förenligt med tolkningen att spelaren inte gör någonting.

Om σ är en strategi för spelare i och p är en position i P_i, så är $(p, \sigma(p))$ per definition ett av spelarens möjliga drag vid p. Istället för att definiera strategier som funktioner skulle vi därför lika gärna kunna definiera en strategi för spelare i som en *mängd av drag* som innehåller exakt ett drag (p, p') för varje position p där det är spelarens tur att dra. Vi kommer att växla fritt mellan dessa båda ekvivalenta tolkningar och använda oss av den variant som är enklast i den aktuella situationen. I våra exempel och figurer kommer vi för det mesta att namnge drag men inte positioner, och då är det naturligast att beskriva strategier genom att lista dragen som ingår i dem.

Exempel 8.2.2 Betrakta spelet i exempel 8.2.1. Spelare 1 har fyra strategier, vilka som dragmängder betraktade är $\{A, G\}$, $\{A, H\}$, $\{B, G\}$ och $\{B, H\}$. I fortsättningen kommer vi att utelämna mängdklamrarna och beskriva strategierna genom att räkna upp de ingående dragen i godtycklig följd. Spelare 1:s strategier kan således helt kort beskrivas som AG, AH, BG och BH. Spelare 2 har också fyra strategier, och med motsvarande notation kan dessa skrivas som CE, CF, DE och DF.

Strategin AG betyder att spelare 1 skall välja draget A i startpositionen p_0 och draget G om spelet kommer till positionen p_3.

Strategin BG betyder att spelare 1 skall välja draget B i startpositionen p_0 och draget G i positionen p_3. Men om spelaren börjar med draget B kan spelet inte komma till positionen p_3. Strategin föreskriver med andra ord också ett handlingsalternativ för ett läge som inte kan uppkomma om spelaren följer sin strategi. Detta är en konsekvens av vår definition av begreppet strategi; definitionen kräver att spelaren skall ha ett handlingsalternativ i varje position där det är han som skall utföra ett drag.

Skulle man inte kunna lätta på detta krav? Nashjämviktsbegreppet, som vi strax skall studera, kan formuleras med ett mer vardagsnära strategibegrepp där strategierna bara är definierade i positioner som kan uppkomma om strategierna följs. Begreppet Nashjämvikt är emellertid inte speciellt tillfredsställande för extensiva spel, utan vi kommer att införa ett intuitivt bättre jämviktsbegrepp, och då behövs strategibegreppet i den tappning som vi givit ovan.

Ett sätt att uppfatta strategin BG, som inte gör den så orimlig, är att se den som en plan för vad spelaren skulle göra i positionen p_3 för den händelse han i startpositionen av misstag skulle ha råkat välja draget A istället för B. □

Varje strategivektor $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$ bestämmer ett entydigt parti $\pi(\sigma)$ i spelet, dvs. en dragföljd som startar i startpositionen och antingen slutar i en slutposition eller är oändlig. Avbildningen $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ är med andra ord en funktion

$$\pi\colon \Sigma \to \Pi$$

från produktmängden $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$ av spelarnas strategimängder till mängden Π av alla partier i spelet.

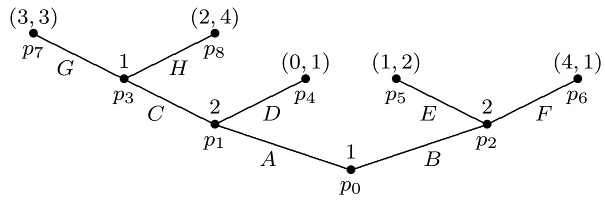
Den formella definitionen av partiet $\pi(\sigma)$, som vi kallar för *utfallet av strategivalet* σ, är rättfram och ser ut så här:

Definition 8.2.3 Låt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ vara en strategivektor i det extensiva spelet $\langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i)\rangle$.

Antag induktivt att positionsföljden $(p_j)_{j=0}^k$ redan definierats. Stoppa om p_k är en slutposition. Låt annars $i_k = S(p_k)$ vara den spelare som utför drag i positionen p_k och sätt $p_{k+1} = \sigma_{i_k}(p_k)$. Positionen p_{k+1} är med andra ord den position som följer efter positionen p_k om spelare $S(p_k)$ följer sin strategi.

Proceduren stoppar antingen med ett ändligt parti $p_0, p_1, \dots, p_k$ eller också ger den upphov till ett oändligt parti. Utfallet $\pi(\sigma)$ av strategivektorn σ definieras som det erhållna partiet.

Exempel 8.2.3 Vi fortsätter vårt studium av spelet i exempel 8.2.1 som på nytt visas i figur 8.4. Låt σ_1 vara strategin AH för spelare 1 och σ_2 vara strategin CF för spelare 2. Detta betyder att spelare 1 skall börja med draget A som leder till positionen p_1, där spelare 2 gör draget C som leder till positionen p_3, där spelare 1 gör draget H som leder till slutpositionen p_8. Utfallet $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$ är således lika med partiet $p_0p_1p_3p_8$, för vilket vi också använder beteckningen ACH.



Figur 8.4

Analogt resulterar spelare 1:s strategi σ_1 och spelare 2:s strategi $\sigma_2' = DE$ i utfallet $\pi(\sigma_1, \sigma_2') = AD$. En tabell över utfallen för alla strategikombinationer ser ut så här:

	CE	CF	DE	DF
AG	ACG	ACG	AD	AD
AH	ACH	ACH	AD	AD
BG	BE	BF	BE	BF
BH	BE	BF	BE	BF

□

Reduktion från extensiv till strategisk form

Spelarnas preferensrelationer $\succeq_i$, eller nyttofunktioner u_i, är apriori givna på mängden Π av alla partier. De ger emellertid upphov till preferensrelationer $\succeq_i'$, resp. nyttofunktioner u_i', på strategiproduktmängden Σ via följande definition:

$$\sigma \succeq_i' \tau \;\Leftrightarrow\; \pi(\sigma) \succeq_i \pi(\tau)$$

respektive

$$u_i'(\sigma) = u_i(\pi(\sigma)).$$

Man verifierar omedelbart att $\succeq_i'$ är preferensrelationer, resp. att u_i' är nyttofunktioner, på strategiproduktmängden Σ. Detta gör det möjligt att överföra ett extensivt spel $\langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i)\rangle$ till strategisk form, nämligen till det strategiska spelet $\langle N, (\Sigma_i), (\succeq_i')\rangle$. Det sistnämnda spelet kallas den *reducerade strategiska formen* av det extensiva spelet.

Exempel 8.2.4 I föregående exempel bestämde vi utfallen för alla strategikombinationer i spelet i exempel 8.2.1. Utbetalningarna till spelarna är i figur 8.4 angivna vid partiernas slutpositioner, och genom att föra in dessa i ovanstående tabell över utfall får vi följande strategiska form på spelet, där som vanligt spelare 1 är radspelaren.

	CE	CF	DE	DF
AG	$(3,3)$	$(3,3)$	$(0,1)$	$(0,1)$
AH	$(2,4)$	$(2,4)$	$(0,1)$	$(0,1)$
BG	$(1,2)$	$(4,1)$	$(1,2)$	$(4,1)$
BH	$(1,2)$	$(4,1)$	$(1,2)$	$(4,1)$

□

Nashjämvikt

Vi förutsätter att varje spelare i ett extensivt spel försöker välja sin strategi så att utfallet, dvs. partiet, blir så bra som möjligt för honom, men precis som i strategiska spel finns det i allmänhet inte något utfall som är bäst för samtliga spelare. Vi får därför nöja oss med att definiera och studera olika slags jämviktslösningar. Följande jämviktsdefinition är naturlig, givet motsvarande definition för strategiska spel.

Definition 8.2.4 En strategivektor $\sigma^* \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$ i ett extensivt spel kallas för en *Nashjämvikt* om det för alla spelare i och alla strategier $\tau_i \in \Sigma_i$ gäller att

$$\pi(\sigma^*_{-i}, \sigma^*_i) \succeq_i \pi(\sigma^*_{-i}, \tau_i).$$

Följande sats är nu en omedelbar konsekvens av definitionen av den reducerade strategiska formen av ett extensivt spel.

Sats 8.2.1 *En strategivektor $\sigma^* = (\sigma^*_1, \sigma^*_2, \dots, \sigma^*_n)$ är en Nashjämvikt i ett extensivt spel om och endast om den är en Nashjämvikt i den reducerade strategiska formen av spelet.*

Exempel 8.2.5 Spelet i exempel 8.2.1 har tre Nashjämvikter, nämligen (AG, CE), (BG, DE) och (BH, DE). Detta följer omedelbart ur utbetalningstabellen i exempel 8.2.4.

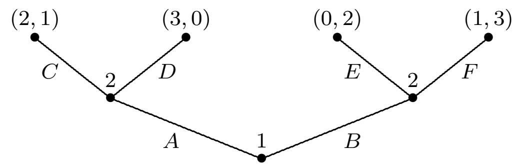
En Nashjämvikt skall ju vara en i någon mening stabil lösning, men det finns ett problem med Nashjämvikten (BG, DE) (och på motsvarande sätt med (BH, DE)) som gör den svår att motivera. Problemet syns inte i den strategiska formuleringen av spelet, men det uppstår så fort man tar hänsyn till att spelarna i ett extensivt spel väljer sina drag i följd.

Anledningen till att strategivektorn (BG, DE) är en Nashjämvikt är att spelare 2 har ett potentiellt hot som skulle kunna hindra spelare 1 från att välja strategin AG, nämligen draget D, som i så fall skulle resultera i partiet AD med utfallet 0 för spelare 1. Men detta hot är inte speciellt trovärdigt, ty om spelare 1 startar med draget A, så garanterar draget C spelare 2 minst 3 nyttoenheter vilket ju är bättre än 1 nyttoenhet för draget D. En rationell spelare skulle under sådana omständigheter inte välja D.

För att komma runt detta problem skall vi införa ett striktare jämviktsbegrepp i nästa avsnitt. □

Övningar

8.3 Betrakta det extensiva spelet i figur 8.5.
a) Lista spelarnas strategier.
b) Bestäm alla Nashjämvikter.
c) Skriv spelet på strategisk form.



Figur 8.5

8.4 Två personer skall välja ett av tre alternativ A, B och C genom att successivt utesluta ett av dem. Först utesluter person 1 ett av alternativen, och sedan utesluter person 2 ett av de två kvarvarande alternativen. Det alternativ som återstår efter dessa två ronder blir personernas val. Formulera proceduren som ett extensivt spel och bestäm Nashjämvikterna i de fall då de båda personernas preferenser för alternativen ges av att

a) $A \succ_1 B \succ_1 C$ och $C \succ_2 B \succ_2 A$ b) $A \succ_1 B \succ_1 C$ och $C \succ_2 A \succ_2 B$.

8.5 Kalle och Lisa använder följande metod för att dela på 100 kr. Kalle erbjuder Lisa x kronor, där x är ett godtyckligt heltal i intervallet $0 \le x \le 100$. Om Lisa accepterar erbjudandet får Kalle behålla resterande $100 - x$ kronor. Om Lisa förkaster erbjudandet får däremot ingen av dem några pengar. Både Kalle och Lisa bryr sig bara om det belopp som de själva får och föredrar att få så mycket som möjligt. Formulera proceduren som ett extensivt spel och bestäm Nashjämvikterna. (Spelet brukar kallas *ultimatumspelet.*)

8.6 Betrakta samma situation som i föregående övning, men antag att det erbjudna beloppet får vara ett godtyckligt reellt tal x i intervallet $[0, 100]$. Formulera denna situation som ett extensivt spel, och bestäm Nashjämvikterna. Det nya spelet är förstås inte längre ett ändligt spel.

8.3 Delspelsperfekta jämvikter

Genom att ”kapa grenen” som leder till en position p i ett spelträd får man ett nytt spelträd med p som startposition. Vi kallar detta ett delspelträd. Den formella definitionen lyder så här:

Definition 8.3.1 Låt p vara en position i spelträdet $T = \langle P, p_0, e\rangle$, och låt P' vara den mängd som består av p och alla positioner $q \in P$ som kan nås från p av någon dragföljd i spelträdet. Låt vidare e' beteckna restriktionen av efterföljarfunktionen e till mängden P', dvs. $e'(q) = e(q)$ för alla $q \in P'$. Då är $T_p = \langle P', p, e'\rangle$ ett spelträd med p som startposition, och det kallas ett *delspelträd* till T.

Varje parti π' i ett delspelträd T_p med p som startposition kan på ett entydigt sätt förlängas till ett parti π i det ursprungliga spelträdet T genom att man startar med den unika dragföljd som leder från T:s startposition p_0 till p och sedan fortsätter med partiet π'. Tillordningen $\pi' \mapsto \pi$ är uppenbarligen en injektiv avbildning från mängden Π_p av alla partier i delspelträdet T_p till mängden Π av alla partier i T.

Det är väl nu närmast självklart vad som bör menas med begreppet delspel till ett extensivt spel; ett delspel uppstår genom att man startar i en godtycklig position och ”glömmer bort” vad som hänt tidigare. Den precisa definitionen ser ut så här:

Definition 8.3.2 Låt $G = \langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i)\rangle$ vara ett extensivt spel, och låt p vara en godtycklig position i spelet. Spelet $G_p = \langle N, T_p, S', (\succeq_i')\rangle$, där

- T_p är delspelträdet till $T = \langle P, p_0, e\rangle$ med p som startposition;
- spelarfunktionen S' är restriktionen av spelarfunktionen S till mängden av alla inre positioner i T_p;
- preferensrelationerna $\succeq_i'$ i G_p är definierade på mängden Π_p av alla partier π' i T_p genom att $\pi_1' \succeq_i' \pi_2'$ om och endast om $\pi_1 \succeq_i \pi_2$, där π_1 och π_2 är de entydiga förlängningarna i T av partierna π_1' och π_2';

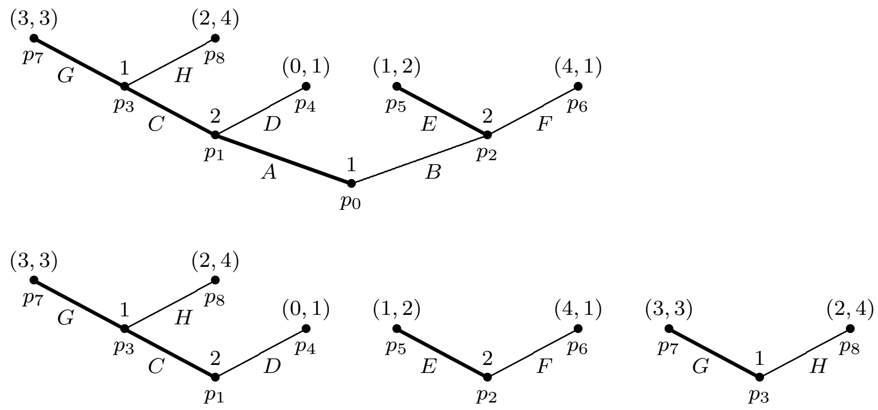
kallas ett *delspel* till G.

Varje strategi σ_i för spelare i i spelet G ger på ett naturligt sätt upphov till en strategi σ_i' i delspelet G_p; funktionen σ_i' är helt enkelt restriktionen av strategin σ_i till de positioner i delspelet G_p där det är spelarens tur att utföra ett drag.

Exempel 8.3.1 I figur 8.6 visas spelträdet T för det spel G som vi redan mött i exempel 8.2.1 och tre delspelträd T_{p_1}, T_{p_2} och T_{p_3}. Alla partierna i delträdet T_{p_1} kan på ett entydigt sätt förlängas till partier i spelträdet T; exempelvis blir förlängningen av partiet CH partiet ACH.

I spelet G är AH en strategi för spelare 1. Denna strategis restriktion till de tre delspelen G_{p_1}, G_{p_2} och G_{p_3} är strategin H, den tomma strategin, resp. strategin H. Spelare 2 har CE som en av sina strategier i spelet G; restriktionen av denna strategi till de tre delspelen är i tur och ordning C, E och den tomma strategin.

Vi skall nu resonera oss fram till en naturlig ”lösning” för spelarna i spelet G. Antag att vi av någon anledning hamnat i positionen p_3; detta innebär att vi befinner oss i startpositionen av delspelet G_{p_3} vars spelträd



Figur 8.6. Överst ett spel G (och motsvarande spelträd T), underst de tre delspelen G_{p_1}, G_{p_2} och G_{p_3} (och motsvarande delspelträd)

har höjd 1. För spelaren som står i tur att dra, dvs. spelare 1 finns det bara ett rationellt drag, draget G, ty det ger honom större nytta än det andra draget H. Spelare 1:s optimala strategi i delspelet är med andra ord strategin G. I figuren har vi markerat detta genom tjockmarkering av kanten G. Spelare 2 kan naturligtvis inte påverka utgången av delspelet G_{p_3}.

På motsvarande sätt är spelare 2:s optimala strategi i spelet G_{p_2} strategin E, som ger honom större nytta än den andra strategin F.

Antag nu att spelet fortskridit till positionen p_1, som är startposition i spelet G_{p_1}. Spelare 2 skall dra och han kan nu räkna ut att spelare 1:s optimala strategi i position p_3 består i att välja draget G som ger 3 nyttoenheter åt spelare 2, vilket är mer än vad spelare 2 erhåller genom draget D. Spelare 2:s optimala strategi i spelet G_{p_1} är således strategin C som vi har tjockmarkerat. Notera att strategivektorn (G, C) är en Nashjämvikt i spelet G_{p_1}, ty spelare 1 förlorar på att ensidigt byta från G till H, och spelare 2 förlorar på att ensidigt byta från C till D.

Betrakta nu startpositionen p_0 i det ursprungliga spelet G. Om spelare 1 väljer draget A så leder den optimala fortsättningen för de båda spelarna till partiet ACG med 3 nyttoenheter för spelare 1. Väljer han istället draget B, så leder den optimala fortsättningen i delspelet G_{p_2} till partiet BE med bara 1 nyttoenhet för spelare 1. Spelare 1:s optimala drag i utgångsläget är således A, och hans optimala strategi i hela spelet är strategin AG, medan spelare 2:s optimala strategi är CE.

Strategivektorn (AG, CE) är en Nashjämvikt i spelet G med den speciella egenskapen att för varje delspel är restriktionen av vektorn till delspelet en Nashjämvikt i delspelet. Detta särskiljer den från de två andra mindre trovärdiga Nashjämvikterna, som vi fann när vi studerade spelet G i exempel 8.2.5. $\square$

Egenskapen hos Nashjämvikten i föregående exempel är intuitivt mycket tilltalande och motiverar följande generella definition.

Definition 8.3.3 En strategivektor $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ i ett extensivt spel G kallas en *delspelsperfekt jämvikt* om det för varje delspel av G gäller att restriktionen av strategivektorn σ till delspelet är en Nashjämvikt i delspelet.

EXEMPEL 8.3.2 I spelet i föregående exempel är (AG, CE) en delspelsperfekt jämvikt. □

Sättet att resonera i exempel 8.3.1 kan generaliseras och leder till vad som brukar kallas *baklängesinduktion*. Följande resultat utgör kärnan i hela resonemanget.

Sats 8.3.1 *Låt $G = \langle N, P, p_0, e, S, (\succeq_i) \rangle$ vara ett extensivt spel med p_0 som startposition, och betrakta delspelen G_p för varje efterföljande position p till p_0, dvs. för varje $p \in e(p_0)$.*

Antag att varje sådant delspel G_p har en delspelsperfekt jämvikt

$$\sigma_p^* = (\sigma_{p1}^*, \sigma_{p2}^*, \ldots, \sigma_{pn}^*)$$

och låt π_p^* beteckna motsvarande parti i G_p. Låt Π^* beteckna mängden av alla partier som fås genom att förlänga dessa partier till partier i G, dvs. alla partier av typen p_0, π_p^* som som börjar med draget (p_0, p) och sedan fortsätter med partiet π_p^*.

Låt $i_0 = S(p_0)$ vara den spelare som skall göra ett drag i startpositionen p_0, och antag att det finns ett första drag $(p_0, \overline{p})$ så att partiet $p_0, \pi_{\overline{p}}^*$ är ett maximalt element i mängden Π^* med avseende på spelarens preferensrelation $\succeq_{i_0}$. (Om mängden $e(p_0)$ av efterföljare till startpositionen är ändlig, finns det naturligtvis alltid ett sådant maximalt element.)

Utvidga nu varje spelare j:s strategier σ_{pj}^* till en strategi σ_j^* i spelet G genom att låta σ_j^* vara den entydigt bestämda strategi vars restriktioner till spelen G_p är lika med σ_{pj}^*, i fallet $j = i_0$ dessutom kompletterad med definitionen $\sigma_{i_0}^*(p_0) = \overline{p}$.

Då är

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

en delspelsperfekt jämvikt i spelet G. Alla delspelsperfekta jämvikter i G bildas på detta sätt.

Bevis. Restriktionerna av strategierna σ_i^* till delspelen G_p är per definition delspelsperfekta jämviktsstrategier i dessa delspel, och de är därför Nashjämviktsstrategier i alla äkta delspel till G. Det räcker således att visa att σ^* är en Nashjämvikt i spelet G.

Betrakta först en godtycklig strategi τ_{i_0} för spelare i_0, och låt (p_0, p) vara det första draget i strategin. Resten av partiet kommer då att utspelas i delspelet G_p. Eftersom restriktionerna till spelet G_p av spelarnas strategier σ_j^* är delspelsperfekta jämviktsstrategier i detta spel, kommer vektorn $(\sigma_{-i_0}^*, \tau_{i_0})$ att ge ett utfall som inte föredras av spelare i_0 framför utfallet av Nashjämvikten σ_p^* i spelet G_p, och detta utfall föredras i sin tur inte framför utfallet av σ^* på grund av definitionen av draget $(p_0, \overline{p})$. Detta visar att spelare i_0 inte tjänar på att ensidigt byta från strategin $\sigma_{i_0}^*$ till någon annan strategi τ_{i_0}.

Låt nu τ_j vara en godtycklig strategi för en annan spelare j än spelare i_0, och antag att alla spelare utom j håller fast vid strategierna i σ^*. Speciellt gör alltså spelare i_0 detta, vilket innebär att det mot (σ_{-j}^*, τ_j) svarande partiet efter ett drag kommer att utspelas i delspelet $G_{\overline{p}}$ och då vara identiskt med det parti som fås då samtliga spelare utom j håller fast vid sina strategier i Nashjämvikten $\sigma_{\overline{p}}^*$ och spelare j använder restriktionen av τ_j till delspelet $G_{\overline{p}}$. För spelare j kan detta parti inte vara bättre än det parti som ges av Nashjämvikten $\sigma_{\overline{p}}^*$ i $G_{\overline{p}}$, som bortsett från första draget är det parti i G som ges av strategivektorn σ^*.

Därmed är påståendet bevisat. □

Sats 8.3.1 ger oss följande algoritm:

Algoritm för bestämning av delspelsperfekta jämvikter i extensiva spel G med ändlig horisont

1. Sätt $k = 0$. För alla slutpositioner p i spelet G består delspelet G_p av enbart positionen p, och samtliga spelare har därför den tomma strategin som enda strategi i spelet G_p. Denna strategi är också samtliga spelares delspelsperfekta jämviktsstrategi i G_p.
2. Stoppa om G:s spelträds höjd är lika med k. Använd annars sats 8.3.1 för att bestämma alla delspelsperfekta jämvikter i alla delspel med spelträd av höjd $k + 1$.
3. Sätt $k := k + 1$ och gå tillbaka till steg 2.

För att steg 2 skall fungera måste det finnas optimala drag, vilket uppenbarligen är fallet om spelet är ändligt.

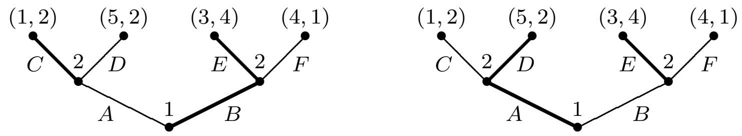
Som korollarium till sats 8.3.1 och algoritmen får vi följande sats.

Sats 8.3.2 *Varje ändligt extensivt spel med perfekt information har minst en delspelsperfekt jämvikt.*

Korollarium 8.3.3 *Varje ändligt extensivt spel med perfekt information har en Nashjämvikt.*

Exempel 8.3.3 Schack är ett ändligt extensivt spel och har därför enligt korollariet en Nashjämvikt. Spelet är vidare strikt konkurrensinriktat, så på grund av sats 2.5.3 har Vit samma nyttovärde i varje Nashjämvikt (om det finns flera). Om Vits nyttovärde är lika med 1 i Nashjämvikten så har han en strategi som garanterar honom vinst oavsett hur Svart spelar, är nyttovärdet lika med $\frac{1}{2}$ så har båda spelarna strategier som garanterar dem minst remi, och om slutligen värdet är 0 så har Svart en strategi som garanterar honom vinst oavsett hur vit spelar. I viss mening är således schack ett ointressant spel, men tjusningen beror på att ingen vet vilket nyttovärde som Nashjämvikten har och än mindre vilka strategier som ingår i den (eller dem), och ingen lär heller någonsin få veta detta. □

Exempel 8.3.4 Ett extensivt spel kan ha mer än en delspelsperfekt jämvikt. Betrakta spelet i figur 8.7.



Figur 8.7. Ett delspel med två delspelsperfekta jämvikter.

Baklängesinduktion visar att spelet har två delspelsperfekta jämvikter nämligen (B, CE) och (A, DE). Om spelarna väljer den första blir resultatet partiet BE med nyttoutfallet $(3, 4)$. Väljer de den andra jämviktsvektorn blir resultatet partiet AD med nyttoutfallet $(5, 2)$, som är bättre för spelare 1 men sämre för spelare 2. I detta spel finns det inget sätt för spelare 1 att rationalisera valet av strategi B framför A eller vice versa, eftersom han inte i startpositionen kan förutsäga om spelare 2 väljer C eller D för den händelse han väljer draget A. □

Problemet i exempel 8.3.4 kan aldrig uppstå i spel där det optimala valet av strategi är unikt i varje delspel.

Övningar

8.7 Bestäm alla delspelsperfekta jämvikter för spelet i övning 8.3.

8.8 Bestäm alla delspelsperfekta jämvikter för spelet i övning 8.4.

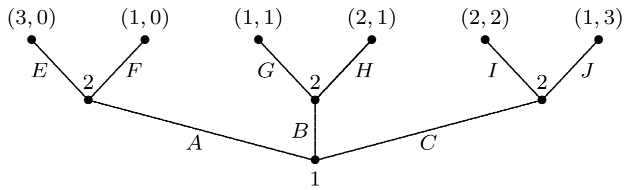
8.9 Bestäm alla delspelsperfekta jämvikter för spelet i övning 8.5.

8.10 Bestäm alla delspelsperfekta jämvikter för spelet i övning 8.6.

8.11 Två personer använder följande metod för att dela en tårta. Person 1 delar tårtan i två delar, varpå person 2 väljer en av delarna och person 1 får den återstående delen. Personerna bryr sig endast om storleken på den egna tårtbiten. Formulera metoden som ett extensivt spel. Hur delas tårtan av en delspelsperfekt jämvikt?

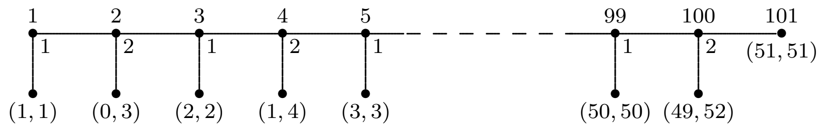
8.12 Bestäm alla delspelsperfekta jämvikter för spelet i figur 8.8.

8.13 Spelet i figur 8.9 brukar av naturliga skäl kallas *tusenfotingspelet*. Spelet har 100 inre positioner som är belägna i heltalspunkterna $1, 2, \dots, 100$ på tallinjen. Från varje inre position kan man antingen gå ett steg åt höger eller ett steg



Figur 8.8

nedåt. Spelet startar i positionen 1 med ett drag av spelare 1, som sedan är vid draget vid alla udda positioner $2k-1$, medan det är spelare 2:s tur att dra vid de jämna positionerna $2k$. I en slutposition under ett udda tal $2k-1$ ges utbetalningen till de båda spelarna av vektorn (k,k), och under ett jämnt tal $2k$ är motsvarande utbetalning $(k-1,k+2)$.



Figur 8.9

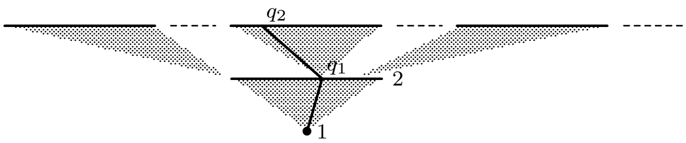
a) Bestäm den delspelsperfekta jämvikten.
b) Låter det troligt att spelarna skulle välja denna lösning?
c) Finns det några andra Nashjämvikter?
d) Finns det någon Nashjämvikt som ger spelarna ett annat utfall än den delspelsperfekta jämvikten?

8.4 Stackelbergs modell för duopol

I det här avsnittet skall vi studera en marknadsmodell för två företag som producerar och säljer en identisk vara. Företaget i:s kostnader för att producera q_i enheter av varan är $C_i(q_i)$, och precis som i Cournots modell beror varans pris av det totala utbudet − om detta är $Q = q_1 + q_2$ så säljs varan till styckpriset $P(Q)$. Det är utbuden som är företagens strategiska variabler, men i motsats till vad som är fallet i Cournots modell fattar inte företagen sina strategiska beslut oberoende av varandra, utan det marknadsledande företaget 1 bestämmer först sitt utbud, och det andra företaget känner till detta beslut när det bestämmer sig för sitt utbud. Vi antar att de båda företagen kan välja vilka icke-negativa tal som helst som sina utbud.

Beslutssituationen kan formuleras som ett extensivt tvåpersonersspel, och spelet har fått sitt namn efter ekonomen von Stackelberg som studerade en liknande asymetrisk situation.

Spelarna i Stackelbergspelet är förstås de båda företagen. Företag 1 börjar genom att välja ett godtyckligt icke-negativt tal q_1, varpå företag 2 fortsätter genom att också välja ett godtyckligt icke-negativt tal q_2. Därefter



Figur 8.10. Stackelbergs duopolspel. Intervallen symboliserar $\mathbf{R}_+$.

är spelet slut. Detta ger upphov ett oändligt spelträd vilket antyds i figur 8.10.

Ett parti i spelet är med andra ord detsamma som ett ordnat par (q_1, q_2) av icke-negativa tal, och mängden av alla partier är lika med produktmängden $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. De båda spelarna värderar partierna med hjälp av sina respektive vinstfunktioner $V_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i)$.

Eftersom spelet har ändlig horisont kan vi bestämma de delspelsperfekta jämvikterna med hjälp av baklängesinduktion:

1. Givet att företag 1 valt utbudet q_1 skall företag 2 maximera funktionen $q_2 \mapsto V_2(q_1, q_2)$. Låt oss anta att maximum existerar och antas i en unik punkt som beror av q_1 och som vi därför döper till $m(q_1)$.
2. Problemet för företag 1 består nu i att maximera sin vinst givet att företag 2 agerar enligt punkten ovan. Eftersom utbudet q_1 resulterar i vinsten
$$V_1(q_1, m(q_1)) = q_1 P(q_1 + m(q_1)) - C_1(q_1),$$
består problemet i att maximera just denna funktion. Låt oss anta att maximum existerar och antas i en unik punkt $\overline{q}_1$.
3. Under dessa förutsättningar har spelet en unik delspelsperfekt jämvikt, nämligen $(\overline{q}_1, \overline{q}_2)$, där $\overline{q}_2 = m(\overline{q}_1)$. Denna jämvikt kallas *Stackelbergs jämviktslösning.*

Anmärkning. Om det finns flera maximerande punkter i steg 1 får man förstås genomföra undersökningen i steg 2 för varje sådan punkt, och man kommer att få flera jämviktslösningar. På motsvarande sätt behöver naturligtvis inte maximipunkten i steg 2 vara unik.

Exempel 8.4.1 Låt oss bestämma Stackelbergs jämviktslösning i fallet med en linjär invers efterfrågefunktion

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{om } 0 \le Q \le a, \\ 0 & \text{om } Q > a \end{cases}$$

och samma konstanta styckkostnader c för båda företagen, där $0 < c < a$.

För $0 \le q_1 \le a - c$ ges företaget 2:s vinst i intervallet $0 \le q_2 \le a - c - q_1$ av andragradspolynomet $q_2(a - c - q_1 - q_2)$, och utanför detta intervall är vinsten negativ. Maximum antas för $q_2 = \frac{1}{2}(a - c - q_1)$. För $q_1 > a - c$ är företagets vinst $= -cq_2$, så maximum antas i detta fall för $q_2 = 0$. Detta gör att

$$m(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a-c-q_1) & \text{om } 0 \le q_1 \le a-c, \\ 0 & \text{om } q_1 > a-c. \end{cases}$$

Följaktligen är

$$q_1 + m(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a-c+q_1) & \text{om } 0 \le q_1 \le a-c, \\ q_1 & \text{om } q_1 > a-c, \end{cases}$$

och vinsten för företaget 1 är därför

$$V(q_1, m(q_1)) = \begin{cases} \frac{1}{2}q_1(a-c-q_1) & \text{om } 0 \le q_1 \le a-c, \\ q_1(a-c-q_1) & \text{om } a-c < q_1 \le a, \\ -cq_1 & \text{om } q_1 > a. \end{cases}$$

Maximum antas i punkten $\frac{1}{2}(a-c)$. Stackelbergs jämviktslösning $(\overline{q}_1, \overline{q}_2)$ ges därför av att

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{2}(a-c) \quad \text{och} \quad \overline{q}_2 = m(\overline{q}_1) = \frac{1}{4}(a-c).$$

I jämviktspunkten är det totala utbudet $\frac{3}{4}(a-c)$, priset $\frac{1}{4}(a+3c)$ och företaget 1:s vinst $\frac{1}{8}(a-c)^2$, medan företaget 2:s vinst är hälften så stor eller $\frac{1}{16}(a-c)^2$.

Jämför med Cournots modell (se exempel 3.1.1), som i jämviktspunkten ger ett totalt utbud på $\frac{2}{3}(a-c)$ till priset $\frac{1}{3}(a+2c)$ och med en vinst för vardera företagen som är $\frac{1}{9}(a-c)^2$. Stackelbergs modell ger således ett större utbud, ett lägre pris och en lägre sammanlagd vinst än Cournots modell. □

Övningar

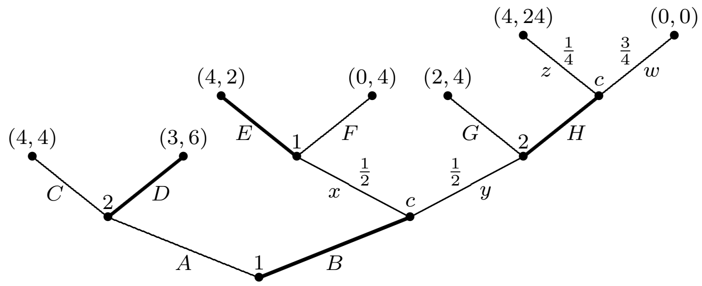
8.14 Bestäm Stackelbergs jämviktslösning om $P(Q) = 64(Q+2)^{-1}$ och båda företagen har samma linjära kostnadsfunktion $C(q) = 9q$.

8.15 Betrakta ett duopol där den enda förutsättningen om de båda företagens vinstfunktioner $V_1(q_1, q_2)$ och $V_2(q_1, q_2)$ är att det finns en Cournotjämvikt och en Stackelbergjämvikt. Visa att det marknadsledande företagets vinst är större i Stackelbergjämvikten än i Cournotjämvikten.

8.5 Slumpdrag

De extensiva spel som vi hittills har studerat har varit deterministiska, dvs. när spelarna väl valt sina strategier och spelar efter dem är utgången helt given. Men det finns också många sekventiella spel i vilka det uppstår lägen där den fortsatta utvecklingen beror av slumpen. Detta gäller inte minst i många populära sällskapsspel, där man i visa positioner skall dra ett spelkort eller utföra ett tärningskast, och där fortsättningen av spelet sedan beror på det dragna kortets färg och valör eller antalet ögon på tärningen. I många mer seriösa spel måste också spelarna, när de bestämmer sig för sina handlingsplaner, ta hänsyn till framtida situationer som de inte kan kontrollera själva utan där en nyckful natur spelar in, och där man i bästa fall kan identifiera ett antal möjliga alternativ och sätta sannolikheter på dem.

Exempel 8.5.1 Istället för att starta med en allmän definition börjar vi med ett exempel. Figur 8.11 illustrerar ett extensivt tvåpersonersspel med två inre positioner som markerats med ett c. Bokstaven c står för "chansen", och där är det ingen av spelarna som skall dra utan fortsättningen beror av slumpen. Sannolikheterna för de olika slump- eller chansdragen som leder från en sådan position har markerats utefter respektive drag. De båda chansdragen x och y är lika sannolika eftersom sannolikheten för vart och ett av dem är $\frac{1}{2}$. I den andra chanspositionen är sannolikheten för draget z lika med $\frac{1}{4}$ och sannolikheten för draget w lika med $\frac{3}{4}$.



Figur 8.11

Antag att spelare 1 bestämt sig för att göra dragen B och E, och att spelare 2 bestämt sig för dragen D och H – de tjockmarkerade dragen i figuren. Utgången av spelet är då inte given utan beror av vilka slumpdrag som faktiskt kommer att göras i de positioner där detta är aktuellt. Om slumpen resulterar i dragen x och z, vilket inträffar med sannolikheten $\frac{1}{8}$ $(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})$ så leder spelarnas strategier till partiet BxE med nyttoutfallet $(4, 2)$. Om slumpen istället resulterar i dragen y, w, vilket inträffar med sannolikheten $\frac{3}{8}$, så får vi istället partiet $ByHw$ med utfallet $(0, 0)$.

Vi kan sammanfatta alla möjligheter i följande tabell:

Slumpdrag	Sannolikhet	Parti	Utfall
x, z	$\frac{1}{8}$	BxE	$(4, 2)$
y, z	$\frac{1}{8}$	$ByHz$	$(4, 24)$
x, w	$\frac{3}{8}$	BxE	$(4, 2)$
y, w	$\frac{3}{8}$	$ByHw$	$(0, 0)$

Med hjälp tabellen kan vi nu beräkna spelarnas *förväntade nytta* av strategikombinationen BE och DH. De båda spelarnas förvändade nyttor är

$$U_1(BE, DH) = \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{3}{8}\cdot 4 + \frac{3}{8}\cdot 0 = \frac{5}{2},$$
$$U_2(BE, DH) = \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 24 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{3}{8}\cdot 0 = 4.$$

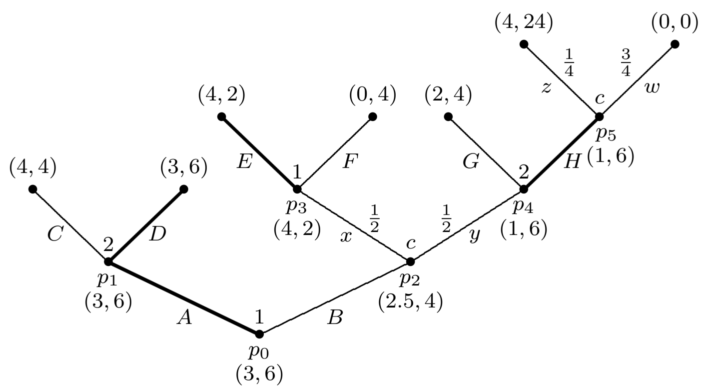
På motsvarande sätt skulle vi kunna beräkna spelarnas förväntade nyttor för alla strategikombinationer, och det torde nu vara uppenbart vad som bör menas med en Nashjämvikt − det är en strategivektor med egenskapen att ingen spelare kan öka sin förväntade nytta genom att ensidigt byta strategi.

I det här exemplet är det lätt att se att (BE, DH) inte är en Nashjämvikt; spelare 1 tjänar på att ensidigt byta till strategin AE, vilket resulterar i partiet AD med den förväntade utdelningen (i det här fallet säkra utdelningen) 3 till spelare 1. □

Begreppet delspelsperfekt jämvikt kan på ett naturligt sätt generaliseras till spel med slumpdrag och metoden med baklängesinduktion fungerar för spel med ändlig horisont som i spelet ovan. För varje position kan vi ”bakifrån” successivt beräkna spelarnas förväntade utdelning för det delspel som startar från positionen ifråga givet att spelarna väljer bästa möjliga strategier i delspelet.

Exempel 8.5.2 I figur 8.12 har vi genomfört de successiva beräkningar som krävs för att beräkna den delspelsperfekta jämvikten i spelet i exempel 8.5.1. Vi betraktar i tur och ordning de delspel som startar i positionerna som markerats p_5, p_4, p_3, p_2, p_1 och p_0.

I positionen p_5 utförs ett slumpdrag och de båda spelarnas förväntade nytta efter detta drag är $(1, 6)$ $(= \frac{1}{4}(4, 24) + \frac{3}{4}(0, 0))$. Vi noterar detta i spelträdet genom att skriva talparet $(1, 6)$ under positionen p_5.



Figur 8.12. Beräkning av den delspelsperfekta jämvikten med baklängesinduktion för spelet i exempel 8.5.1 och figur 8.11.

Betrakta nu det delspel som startar i p_4. Det drag som ger spelare 2 störst förväntad utdelning är draget H, som ger honom den förväntade nyttan 6 (och spelare 1 nyttan 1). Vi noterar detta genom att tjockmarkera draget H i figuren och skriva talparet $(1, 6)$ under noden p_4.

I delspelet med start i p_3 är draget E bäst för spelaren vid draget; detta drag resulterar i ett parti med (förväntat) nyttoutfall $(4, 2)$. Vi tjockmarkerar draget och skriver det förväntade utfallet under noden p_3.

För delspelet med start i p_2 blir det förväntade nyttoutfallet $(2.5, 4)$ $(= \frac{1}{2}(4, 2) + \frac{1}{2}(1, 6))$ om spelarna följer hittills beräknade delspelsstrategier.

I delspelet med start i p_1 är strategin D bäst för spelare 2; den ger utfallet $(3, 6)$.

I startpositionen p_0 är det därför bäst för spelare 1 att välja draget A, eftersom det ger spelaren den förväntade nyttan 3. Vi har därmed funnit att spelet har en unik delspelsperfekt jämvikt, nämligen strategiparet (AE, DH), som naturligtvis då också är en Nashjämvikt. □

Det är nu lätt att med utgångspunkt från exemplet ovan ge formella definitioner av spel med slumpdrag och av begreppen strategi, Nashjämvikt och delspelsperfekt jämvikt i sådana spel.

Definition 8.5.1 Ett n-personers spel på *extensiv form med perfekt information och slumpdrag* består av

- en mängd $N = \{1, 2, \dots, n\}$ av spelare;
- ett spelträd $T = \langle P, p_0, e\rangle$;
- en funktion $S\colon P^\circ \to N \cup \{c\}$, *spelarfunktionen*, definierad på mängden P° av alla inre positioner i spelet;
- för varje position p med $S(p) = c$ ett sannolikhetsmått μ_p på mängden $e(p)$ av alla efterföljare till p (eller, ekvivalent, på mängden av alla drag vid p);
- för varje spelare $i \in N$ en kardinal nyttofunktion u_i på mängden Π av alla partier.

Vi sätter

$$P_i = \{p \in P^\circ \mid S(p) = i\}$$

för $i \in N \cup \{c\}$. Mängden P_c består av de positioner där dragen bestäms av slumpen. Sannolikheten för ett viss drag vid en slumpposition p ges av sannolikhetsmåttet μ_p. Vi antar att sannolikhetsfördelningarna vid olika slumppositioner är *oberoende* av varandra. Begreppet strategi kan nu definieras för spel med slumpdrag på exakt samma sätt som för spel utan slumpdrag.

Definition 8.5.2 Med en *strategi* σ för spelare i i ett spel på extensiv form med perfekt information och slumpdrag menas en funktion $\sigma\colon P_i \to P$ med egenskapen att $\sigma(p)$ är en efterföljare till p för alla $p \in P_i$.

Mängden av alla strategier för spelare i kommer som tidigare att betecknas Σ_i, och vi sätter $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$.

Skillnaden mot tidigare är att utgången av spelet nu inte längre bara beror av spelarnas val av strategivektor $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$ utan också av vilka drag som "slumpen" utför vid slumppositionerna i P_c. Låt därför Σ_c beteckna mängden av alla funktioner $\sigma_c \colon P_c \to P$ som har egenskapen att $\sigma_c(p)$ är en efterföljare till p för alla $p \in P_c$. Precis som tidigare kommer vi inte att göra någon åtskillnad på efterföljande positioner och drag när vi beskriver funktionerna σ_c. Att beskriva en konkret funktion σ_c blir därför ekvivalent med att ange ett drag vid varje slumpposition.

De oberoende sannolikhetsmåtten μ_p inducerar ett sannolikhetsmått μ på mängden Σ_c, som helt enkelt är produktmåttet.

Exempel 8.5.3 I exempel 8.5.1 består således mängden Σ_c av fyra funktioner σ_c^i, $i = 1, 2, 3, 4$, som (i termer av drag) definieras av att

$$\sigma_c^1(p_2) = x,\ \ \sigma_c^1(p_5) = z; \qquad \sigma_c^2(p_2) = x,\ \ \sigma_c^2(p_5) = w$$
$$\sigma_c^3(p_2) = y,\ \ \sigma_c^3(p_5) = z; \qquad \sigma_c^4(p_2) = y,\ \ \sigma_c^4(p_5) = w.$$

Den inducerade sannolikhetsfördelningen μ på Σ_c definieras av att

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma_c^1) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\\
\mu(\sigma_c^2) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{8}\\
\mu(\sigma_c^3) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\\
\mu(\sigma_c^4) &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{8}.
\end{aligned}$$
□

Varje kombination $(\sigma, \sigma_c) \in \Sigma \times \Sigma_c$ ger upphov till ett entydigt parti $\pi(\sigma, \sigma_c)$ i spelet och därmed också till ett entydigt bestämt nyttoutfall $u_i(\pi(\sigma, \sigma_c))$ för spelare i. När spelarna valt en strategivektor $\sigma \in \Sigma$, är utfallet slumpartat såtillvida att det beror på vilka slumpdrag σ_c som utförts. Mera precist är utfallet en stokastisk variabel på sannolikhetsrummet Σ_c med sannolikhetsmåttet μ. Vi låter $U_i(\sigma)$ beteckna spelare i:s förväntade nytta av strategivektorn $\sigma \in \Sigma$; den kan (i de fall då sannolikhetsrummet Σ_c är ändligt) beräknas som

$$U_i(\sigma) = \sum_{\sigma_c \in \Sigma_c} u_i(\pi(\sigma, \sigma_c))\mu(\sigma_c).$$

I spel med slumpdrag utgår man från att spelarna använder sig av den förväntade nyttan för att värdera strategikombinationerna $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, och det är nu enkelt att generalisera begreppen Nashjämvikt och delspelsperfekt jämvikt.

Definition 8.5.3 En strategivektor $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ i ett extensivt spel med slumpdrag kallas

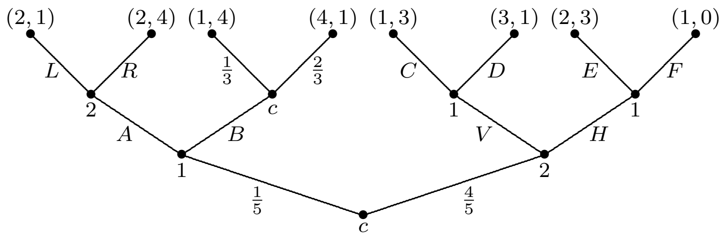
- en *Nashjämvikt* om det för varje spelare i och alla strategier $\tau_i \in \Sigma_i$ gäller att
$$U_i(\sigma^*_{-i}, \sigma^*_i) \geq U_i(\sigma^*_{-i}, \tau_i);$$
- en *delspelsperfekt jämvikt* om restriktionen av strategivektorn till varje delspel är en Nashjämvikt i delspelet.

Baklängesinduktion fungerar lika bra i extensiva spel med slumpdrag som i spel utan sådana drag, så beviset för följande sats kräver endast små modifikationer av beviset för sats 8.3.1 och lämnas därför som övning åt läsaren.

Sats 8.5.1 *Varje ändligt spel på extensiv form med perfekt information och slumpdrag har en delspelsperfekt jämvikt och följaktligen en Nashjämvikt.*

Övningar

8.16 Bestäm för spelet i figur 8.13 den delspelsperfekta jämvikten och spelarnas förväntade nytta i jämvikten.



Figur 8.13

Kapitel 9

Extensiva spel med ofullständig information

I de extensiva spel som vi studerat hittills har varje spelare som står i tur att utföra ett drag fullständig information om vilka drag som utförts tidigare inklusive utfallet av eventuella slumpdrag. Men i många spel har spelarna inte den informationen. I kortspel vet exempelvis oftast en spelare inte vilka kort som motspelarna har.

I det här kapitlet skall vi därför studera extensiva spel där spelarnas information om läget är begränsad − när en spelare skall utföra ett drag kan han befinna sig i en av flera möjliga positioner. Vi modellerar detta genom att dela in spelarens positionsmängd i parvis disjunkta delmängder som vi kallar spelarens informationsmängder. Spelaren vet i vilken informationsmängd han befinner sig när han skall göra sitt drag, men han känner inte till den exakta positionen i informationsmängden. Däremot förutsätter vi fortfarande att alla spelarna vet hur det fullständiga spelträdet ser ut, vilka drag som är möjliga för alla spelare i samtliga informationsmängder och, sist men inte minst, att de känner varandras preferenser.

9.1 Basic Endgame

Poker är ett klassiskt exempel på ett spel där spelarna inte har fullständig information, och där vinnande spelsätt innehåller moment av bluffande. Spelet har därför intresserat många framstående spelteoretiker som analyserat förenklade pokermodeller. Vi ska studera en modell som introducerades av W.H. Cutler och brukar kallas *Basic Endgame*. En utförlig analys av modellen och olika utvidgningar av densamma har gjorts av Tom och Chris Ferguson, far och son, den förstnämnde professor i matematik, den sistnämnde professionell pokerspelare.

Basic Endgame beskriver på ett adekvat sätt de överväganden som en spelare ställs inför i slutfasen av poker, när endast två spelare återstår. De två spelarna börjar med att lägga en krona var i potten. Spelare 1 får därefter ett kort ur en kortlek; kortet är ett vinnande kort med sannolikhet 1/3 och ett förlorande kort med sannolikhet 2/3. Spelaren ser kortet men håller det dolt för motspelaren som inte får något kort.

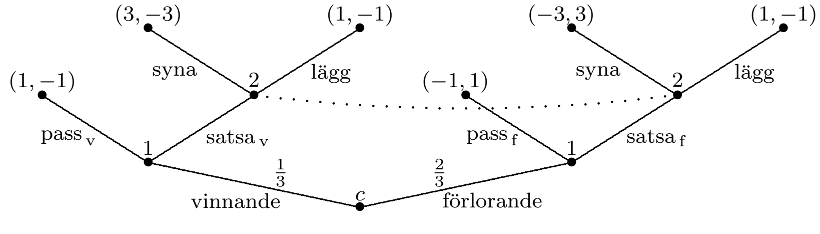
Spelare 1 kan nu välja mellan att passa eller att satsa. Om han passar med ett vinnande kort får han potten och vinner därigenom en krona; passar han med ett förlorande kort förlorar han potten och har på så sätt också förlorat en krona. Om spelare 1 satsar måste han lägga ytterligare två kronor i potten. Spelare 2, som inte vet vilket kort spelare 1 har, kan nu välja mellan att syna eller att lägga sig. Om han lägger sig får spelare 1 hela potten oberoende av vilket kort han har och har på så sätt vunnit en krona. Om spelare 2 synar, lägger han två kronor till potten, varefter spelare 1 visar sitt kort. Har då spelare 1 ett vinnande kort får han hela potten och har vunnit tre kronor; i motsatt fall får spelare 2 hela potten och spelare 1 har därigenom förlorat tre kronor.

Spelträdet för Basic Endgame visas i figur 9.1. Spelet börjar med ett slumpdrag. Spelare 1 vet sedan var någonstans i trädet han befinner sig och har därför fyra alternativ, nämligen

1. att passa med såväl vinnande som förlorande kort: pass_{v}-pass_{f},
2. att passa med vinnande och satsa med förlorande kort: pass_{v}-satsa_{f},
3. att satsa med vinnande och passa med förlorande kort: satsa_{v}-pass_{f},
4. att satsa med såväl vinnande som förlorande kort: satsa_{v}-satsa_{f}.

Det andra alternativet kan förefalla bisarrt men är likväl en möjlighet, alternativ 3 är spelarens ärliga strategi, och alternativ 4 är hans bluffstrategi.

Problemet för spelare 2 är att han, om motspelaren valt att satsa, inte vet om spelare 1 har ett vinnande eller förlorande kort, dvs. om spelare 2 befinner sig i den vänstra eller högra delen av spelträdet. Spelare 2 har därför bara två alternativ, nämligen att syna eller att lägga sig oberoende av vad spelare 1 har. Vi indikerar spelare 2:s brist på information genom att förbinda de två positionerna i spelträdet där det är hans tur att dra med en prickad linje, samt genom att markera ett drag från vardera positionen med ”syna” och ett drag från vardera positionen med ”lägg”. Vilket av de två dragen ”syna” om spelare 2 väljer att syna, eller ”lägg” om han väljer att lägga sig, som faktiskt utförs beror förstås sedan av spelare 1:s tidigare drag.



Figur 9.1. Spelet Basic Endgame

De två positionerna som förbundits med en prickad linje utgör en *informationsmängd;* spelare 2 vet efter motspelarens drag att han befinner sig i en position i informationsmängden men inte exakt i vilken position.

Vi kan analysera spelet genom att reducera det till strategisk form. Den förväntade utbetalningsmatrisen med spelare 1 som radspelare beräknas på följande sätt:

Om spelare 1 väljer alternativet pass$_\text{v}$-pass$_\text{f}$, så blir hans förväntade utdelning $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}$, oavsett om spelare 2 hade valt att syna eller att lägga sig.

Om spelare 1 väljer alternativet pass$_\text{v}$-satsa$_\text{f}$, så blir hans förväntade utdelning $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (-3) = -\frac{5}{3}$ ifall spelare 2 synar, och $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 1$ ifall spelare 2 lägger sig, osv.

Den fullständiga förväntade utbetalningsmatrisen ser ut så här:

	syna	lägg
pass$_\text{v}$-pass$_\text{f}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
pass$_\text{v}$-satsa$_\text{f}$	$-\frac{5}{3}$	1
satsa$_\text{v}$-pass$_\text{f}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
satsa$_\text{v}$-satsa$_\text{f}$	-1	1

Vi ser att rad 1 domineras svagt av rad 3 och att rad 2 domineras svagt av rad 4. Genom att eliminera de två översta raderna får vi matrisen

	syna	lägg
satsa$_\text{v}$-pass$_\text{f}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
satsa$_\text{v}$-satsa$_\text{f}$	-1	1

Eftersom matrisen saknar sadelpunkt finns det inte någon ren Nashjämvikt i spelet. Däremot har det förstås en blandad Nashjämvikt. Radspelarens optimala blandade strategi är att välja satsa$_\text{v}$-pass$_\text{f}$ med sannolikhet $\frac{3}{4}$ och satsa$_\text{v}$-satsa$_\text{f}$ med sannolikhet $\frac{1}{4}$, medan spelare 2:s optimala blandade strategi består i att syna och att lägga sig med lika sannolikhet $\frac{1}{2}$. Spelet är rättvist eftersom värdet är lika med 0.

För att spela optimalt i Basic Endgame skall alltså spelare 1 alltid satsa när han har ett vinnande kort, och bluffa genom att i genomsnitt satsa en gång av fyra med ett förlorande kort.

Övning

9.1 Lös spelet Basic Endgame när sannolikheten att spelare 1 skall få ett vinnande kort är

a) $\frac{1}{4}$ b) p, där $0 < p < 1$.

9.2 Extensiva spel med ofullständig information

Vi skall nu ge en allmän definition av extensiva spel där spelarna liksom i spelet Basic Endgame har begränsad information om var någonstans i spelträdet de befinner sig. Vi gör detta med hjälp av begreppen *informationsmängd* och *etikett*.

Mängden P_i av positioner i spelet, där det är spelare i:s tur att välja ett drag, delas upp i parvis disjunkta delmängder P_{ij}, $j = 1, 2, \dots, n_i$, och varje sådan delmängd kallas en informationsmängd. En spelare som ska utföra ett drag vet alltid i vilken informationsmängd som han befinner sig i men inte i vilken position i informationsmängden som han kommit till, såvida inte informationsmängden råkar bestå av exakt en position. För att spelaren inte skall ha någon sådan information är det nödvändigt att alla positionerna i en informationsmängd har lika många efterföljande positioner, dvs. att det finns lika många möjliga drag att utföra från varje position i en informationsmängd.

Spelaren måste vidare på något sätt kunna ange hur han skall fortsätta spelet från en informationsmängd P_{ij}. Eftersom han inte vet vilken position $p \in P_{ij}$ han befinner sig i, kan han inte göra detta genom att ange ett drag, dvs. en efterföljande position $q \in e(p)$. Vi löser detta problem genom att kräva av spelreglerna att mängden av alla drag från samtliga positioner i en given informationsmängd P_{ij} skall vara grupperad i parvis disjunkta delmängder med egenskapen att varje sådan delmängd E innehåller exakt ett drag från varje position i den givna informationsmängden. Detta betyder att alla positionerna i informationsmängden P_{ij} måste ha lika många efterföljare och att antalet delmängder är lika med detta gemensamma antal. För att hålla reda på dragen i en sådan delmängd E sätter vi sedan ett unikt gemensamt namn, en *etikett*, på samtliga drag i delmängden E.

I Basic Endgame (se figur 9.1) har spelare 2 en informationsmängd som består av de två positioner och som i figuren förbundits med en prickad linje. Från varje position utgår två drag; av de totalt fyra dragen bildas två delmängder $-$ den ena består av de två drag som försetts med etiketten ”syna”, den andra av de två drag som försetts med etiketten ”lägg”. Båda delmängderna består av exakt ett drag från varje position i informationsmängden.

Spelare 1 har två informationsmängder i Basic Endgame, men båda dessa är singeltonmängder, dvs. består av endast en position, och i sådana fall kan man givetvis använda namnen på själva dragen som etiketter.

Vi är nu redo för den allmänna definitonen av spel på extensiv form som inkluderar möjligheten av slumpdrag och ofullständig information.

Definition 9.2.1 Ett n-personers spel på *extensiv form* består av

- en mängd $N = \{1, 2, \dots, n\}$ av spelare;
- ett spelträd $T = \langle P, p_0, e \rangle$;

- en funktion $S\colon P^\circ \to N \cup \{c\}$, *spelarfunktionen*, definierad på mängden av alla inre positioner i spelet;
- för varje position p med $S(p) = c$ en sannolikhetsfördelning μ_p på mängden $e(p)$ av alla efterföljare till p (eller, ekvivalent, på mängden av alla drag vid p);
- för varje spelare i en partition av spelarens inre positioner

$$P_i = \{p \in P^\circ \mid S(p) = i\}$$

  i delmängder P_{ij}, spelarens *informationsmängder*, med följande egenskap: I varje informationsmängd har alla positioner lika många efterföljare;
- för varje informationsmängd P_{ij} en uppdelning av mängden av alla drag från positionerna i P_{ij} i parvis disjunkta delmängder som kallas *etiketter* och som har följande egenskap: Varje etikett innehåller exakt ett drag från varje position i informationsmängden;
- för varje spelare $i \in N$ en kardinal nyttofunktion u_i på mängden Π av alla partier.

I våra illustrationer av spel förbinder vi positioner som tillhör samma informationsmängd med en prickad linje och skriver spelarens namn vid linjen. Etiketter anger vi genom att ge alla drag som ingår i en etikett samma namn.

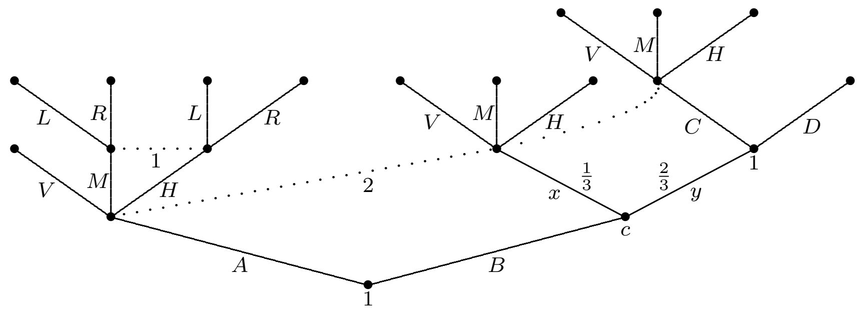
En konkret instans av ett extensivt spel fortskrider på följande vis. När partiet kommer till en position p så väljer spelaren, som äger informationsmängden som positionen tillhör, en etikett från informationsmängden. Den valda etiketten innehåller exakt ett drag som leder från p till en efterföljande position p'. Sedan är det spelaren vid p' som fortsätter från den positionen. Om partiet kommer till en position p där fortsättningen beror av slumpen, så väljs den efterföljande positionen i enlighet med den sannolikhetsfördelning som hör till positionen p.

EXEMPEL 9.2.1 I figur 9.2 visas ett extensivt spel med två spelare och slumpdrag. Vi har utelämnat spelarnas nyttofunktioner.

Spelare 1 har tre informationsmängder, två av dem består av en enda position och den tredje består av två positioner. Exempelvis bildar startpositionen en informationsmängd med endast ett element, och för den är därför etikett och drag samma sak. I informationsmängden med två positioner utgår det två drag från de båda positionerna. Dessa drag har fått etiketterna L och R.

Spelare 2 har en enda informationsmängd bestående av tre positioner; i varje sådan har spelaren tre drag att välja mellan och det behövs därför tre etiketter som här kallats V, M och H.

Om spelare 1 bestämmer sig för att spela drag med etiketterna A, C och R i sina informationsmängder och spelare 2 bestämmer sig för etiketten M,



Figur 9.2. Extensivt spel med slumpdrag och ofullständig information.

så får vi som resultat det parti som följer grenarna AMR.

Om spelare 1 istället väljer B, C och R och spelare 2 fortfarande väljer M, beror utgången av slumpen; med sannolikhet 1/3 får vi partiet BxM och med sannolikhet 2/3 partiet $ByCM$. □

Den allmänna definitionen av extensiva spel är mycket flexibel. Spel med perfekt information är naturligtvis specialfall; i dem är alla informationsmängder singeltonmängder och varje etikett svarar mot ett unikt drag.

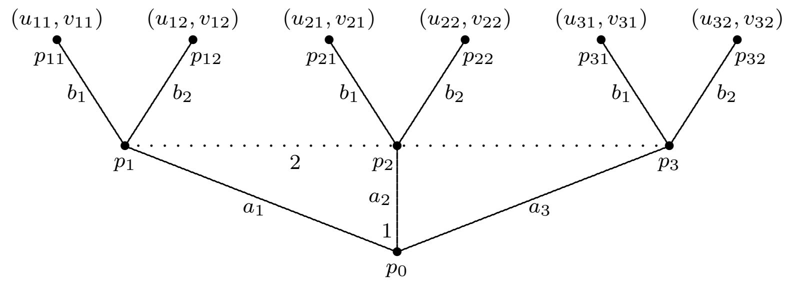
Spel där spelarna gör sina drag simultant och oberoende av varandra kan beskrivas som extensiva spel med ofullständig information. Antag exempelvis att vi har två spelare 1 och 2, att spelare 1 väljer ett av alternativen $a_1, a_2, \dots, a_k$, att spelare 2 samtidigt väljer ett av alternativen $b_1, b_2, \dots, b_m$ och att paret (a_i, b_j) resulterar i nyttovektorn (u_{ij}, v_{ij}). I kapitel 2 uttryckte vi denna situation som ett strategiskt tvåpersonersspel, men vi kan också formulera den som ett extensivt spel med

- en startposition p_0 som tillhör spelare 1;
- k stycken positioner $p_1, p_2, \dots, p_k$ som tillhör spelare 2 och bildar hans enda informationsmängd;
- km stycken slutpositioner $p_{11}, \dots, p_{1m}, p_{21}, \dots, p_{2m}, \dots,\ p_{k1}, \dots, p_{km}$;
- för varje i ett drag från p_0 till p_i med etiketten a_i, och för varje par i, j ett drag från p_i till p_{ij} med etiketten b_j;
- nyttofunktioner u och v som definieras i slutpositionerna genom att $u(p_{ij}) = u_{ij}$ och $v(p_{ij}) = v_{ij}$.

Figur 9.3 illustrerar hur spelet ser ut för $k = 3$ och $m = 2$. Helt analogt följer det förstås att varje n-personers spel på strategisk form kan skrivas som ett n-personers spel på extensiv form med ofullständig information.

Rena strategier

För extensiva spel med perfekt information definierade vi begreppet strategi i avsnitten 8.2 och 8.5. Det är nu enkelt att generalisera detta begrepp för spel med ofullständig information.



Figur 9.3. Extensiv form av strategiskt tvåpersonersspel.

Definition 9.2.2 En *(ren) strategi* för en spelare i ett generellt extensivt n-personersspel är en mängd av etiketter som består av en etikett från varje informationsmängd som tillhör spelaren.

Vi låter Σ_i beteckna mängden av alla rena strategier för spelare i och sätter som tidigare $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$.

En strategi är alltså en mängd $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ av etiketter, men för att förenkla notationen kommer vi oftast att ange strategier genom att lista de ingående etiketterna efter varandra i godtycklig ordning, till exempel som $A_1A_2 \ldots A_k$.

Om spelare i har ℓ stycken informationsmängder $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{i\ell}$, och m_j är antalet etiketter i informationsmängden P_{ij}, så är tydligen antalet rena strategier för spelaren lika med $m_1 m_2 \cdots m_\ell$.

Exempel 9.2.2 I spelet i exempel 9.2.1 (figur 9.2) är ACR en ren strategi för spelare 1 och M en ren strategi för spelare 2. Spelare 1 har totalt 8 $(= 2 \cdot 2 \cdot 2)$ rena strategier och spelare 2 har 3 rena strategier. □

I frånvaro av slumpdrag är tydligen utgången av ett spel, dvs. det spelade partiet, helt bestämd av att varje spelare i valt en strategi $\sigma_i \in \Sigma_i$; låt $\pi(\sigma)$ beteckna detta parti. Detta ger oss en funktion $\pi \colon \Sigma \to \Pi$, där Π som tidigare betecknar mängden av alla partier.

Om det finns slumpdrag med i bilden, så är förstås partiet inte längre entydigt bestämt av spelarnas strategival $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ utan slumpartat. Givet strategivalet σ inträffar partiet π med en viss sannolikhet som vi betecknar $\lambda_\sigma(\pi)$. Denna sannolikhet beror naturligtvis av sannolikheterna för de slumpdrag som förekommer i spelet. I det allmänna fallet är med andra ord λ_σ en *sannolikhetsfördelning på mängden* Π *av alla partier.*

Exempel 9.2.3 Betrakta spelet Basic Endgame från föregående avsnitt (se figur 9.1), och låt σ_1 vara strategin "satsa$_{\text{v}}$-pass$_{\text{f}}$" för spelare 1 och σ_2 vara strategin "lägg" för spelare 2. Strategikombinationen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ resulterar då i följande sannolikhetsfördelning λ_σ för partierna i spelet:

Parti	Sannolikhet
vinnande–pass$_{\text{v}}$	0
vinnande–satsa$_{\text{v}}$–syna	0
vinnande–satsa$_{\text{v}}$–lägg	1/3
förlorande–pass$_{\text{f}}$	2/3
förlorande–satsa$_{\text{f}}$–syna	0
förlorande–satsa$_{\text{f}}$–lägg	0

□

Reduktion till strategisk form

Varje strategiskt spel kan som vi sett uppfattas som ett extensivt spel med ofullständig information. Omvändningen gäller också; varje extensivt n-personersspel kan transformeras till ett strategiskt spel på följande sätt.

Låt i det extensiva spelet

- Σ_i beteckna spelare i:s mängd av rena strategier;
- $u_i\colon \Pi \to \mathbf{R}$ beteckna spelare i:s nyttofunktion, där Π är mängden av alla partier;
- λ_σ vara den sannolikhetsfördelningen på Π som genereras av strategivalet $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$;
- $U_i(\sigma)$ beteckna väntevärdet av nyttofunktionen u_i med avseende på denna sannolikhetsfördelningen λ_σ, vilket (för ändliga spel) innebär att
$$U_i(\sigma) = \sum_{\pi\in\Pi} u_i(\pi)\lambda_\sigma(\pi).$$

Vi har nu alla ingredienserna till ett strategiskt spel $\langle N, (\Sigma_i), (U_i)\rangle$, och detta spel är den *reducerade strategiska formen* av det givna extensiva spelet.

En handlingsvektor $\sigma^* \in \Sigma$ är per definition en Nashjämvikt i det strategiska spelet om olikheten $U_i(\sigma^*_{-i}, \sigma^*_i) \geq U_i(\sigma^*_{-i}, \tau_i)$ gäller för alla spelare i och alla $\tau_i \in \Sigma_i$. Detta kan vi naturligtvis formulera direkt för det extensiva spelet, och vi får då följande definition.

Definition 9.2.3 En vektor σ^* av rena strategier i ett ändligt extensivt spel är en *(ren) Nashjämvikt* om

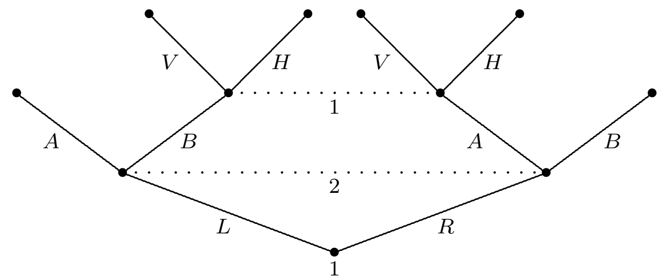
$$\sum_{\pi\in\Pi} u_i(\pi)\lambda_{(\sigma^*_{-i},\sigma^*_i)}(\pi) \geq \sum_{\pi\in\Pi} u_i(\pi)\lambda_{(\sigma^*_{-i},\tau_i)}(\pi)$$

för alla spelare i och alla rena strategier $\tau_i \in \Sigma_i$.

I avsnitt 9.1 reducerade vi spelet Basic Endgame till strategisk form och fann att det saknar ren Nashjämvikt. Extensiva spel med ofullständig information behöver således inte ha några rena Nashjämvikter.

Spel med perfekt minne

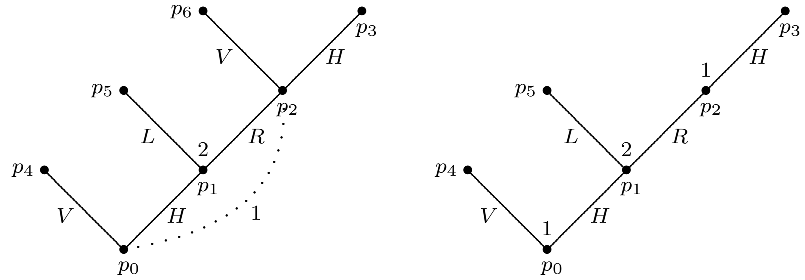
Vi kan använda den extensiva formen med informationsmängder för att beskriva spel i vilka spelare glömmer drag som de tidigare har gjort. Man kan exempelvis modellera sådana spel som bridge på detta sätt. Bridge spelas av fyra spelare som bildar två lag med två spelare i vardera laget, men eftersom det är lagen som spelar mot varandra bör bridge uppfattas som ett tvåpersonersspel. Under budfasen bjuder spelarna i ett lag växelvis på sina händer, och varje spelare ser då bara sin egen hand. Varje lag kan därför uppfattas som **en** spelare som omväxlande kommer ihåg och glömmer en del av vad den tidigare vetat. Motsvarande gäller sedan under själva spelfasen, där spelarna i det icke-spelförande laget bara ser sina egna kort, korten på bordet och de kort som redan spelats.



Figur 9.4. Spel där spelare 1 glömt vilket drag han gjort i ett tidigare läge.

Exempel 9.2.4 Figur 9.4 visar ett spel där spelare 1 efter två drag i spelet glömt sitt inledande drag. Om han hade kommit ihåg att han började med draget L (eller R), skulle han nämligen veta vilken position spelet befinner sig i när det gått två drag, och hans informationsmängd efter två drag skulle då inte bestå av två positioner. □

Exempel 9.2.5 I spelet till vänster i figur 9.5 har spelare 1 i positionen p_2 glömt vilket drag hand gjorde i startpositionen p_0.



Figur 9.5. Det vänstra spelet är strategiskt ekvivalent med det högra spelet.

Observera att definitionen av begreppet ren strategi förutsätter att spelaren väljer **en** etikett från varje honom tillhörande informationsmängd. Detta innebär att en spelare måste välja samma alternativ oavsett hur många gånger spelet kommer till en viss informationsmängd. Om spelare 1:s strategi är att välja etiketten V i informationsmängden $\{p_0, p_2\}$, så slutar spelet i positionen p_4, och är strategin istället H, så slutar spelet i p_5 eller p_3. Slutpositionen p_6 är således onåbar och kan därför lika gärna strykas från spelet, vilket resulterar i spelet till höger i figuren. □

Liknande situationer uppstår så snart det finns en informationsmängd som innehåller två positioner p och q som är förbundna av någon dragföljd i spelet. (I exemplet ovan finns det en dragföljd från p_0 till p_2.) Somliga författare inkluderar i definitionen av extensiva spel att det inte får finnas några sådana positioner i någon informationsmängd, men det har vi inte gjort.

Extensiva spel med ofullständig information är som vi sett kapabla att modellera situationer där en spelare glömmer drag som han tidigare gjort. Spel i vilka samtliga spelare kommer ihåg alla sina tidigare drag kallas spel med *perfekt minne*, och vi skall nu ge en precis definition av detta begrepp.

Betrakta ett godtyckligt extensivt spel, och låt p vara en position i spelet där spelare i skall utföra ett drag. Låt i tur och ordning $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_k$ vara de informationsmängder som tillhör spelaren och som har *passerats* under den dragföljd som leder från startpositionen p_0 fram till positionen p, och kalla den etikett som spelare i valde då spelet befann sig i informationsmängden $\mathcal{I}_j$ för E_j. Sekvensen $\mathcal{I}_1$, E_1, $\mathcal{I}_2$, $E_2, \dots$, $\mathcal{I}_k$, E_k kallas spelarens *minneslista* i positionen p och betecknas under resten av det här avsnittet $\mathcal{M}_i(p)$. Minneslistan $\mathcal{M}_i(p)$ är förstås tom om spelare i inte utfört några drag före positionen p.

Exempel 9.2.6 För att exemplifiera begreppet minneslista betraktar vi spelet i figur 9.6. (Vi har låtit bli att namnge slutpositionerna och att ange nyttovärden eftersom dessa inte spelar någon roll för resonemanget.)

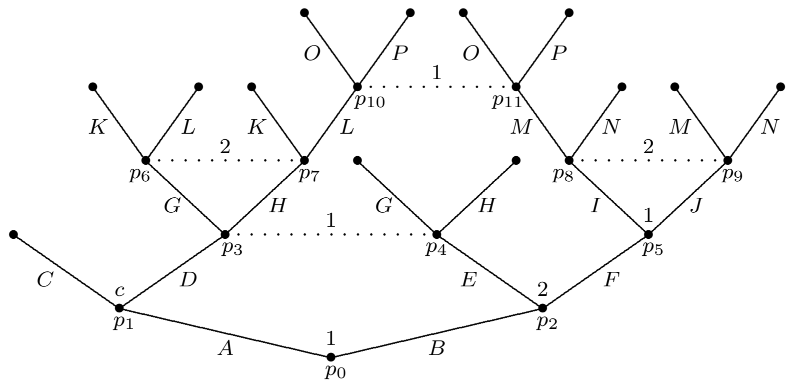
De båda spelarnas minneslistor för några olika positioner ser då ut så här:

$\mathcal{M}_1(p_{10})\colon \{p_0\}, A, \{p_3, p_4\}, H \qquad \mathcal{M}_1(p_{11})\colon \{p_0\}, B, \{p_5\}, I$

$\mathcal{M}_2(p_6)\colon\ \emptyset \qquad \mathcal{M}_2(p_8)\colon\ \{p_2\}, F \qquad \mathcal{M}_2(p_9)\colon\ \{p_2\}, F$ □

En spelare i med perfekt minne skall förstås minnas sina minneslistor, så om två sådana listor $\mathcal{M}_i(p)$ och $\mathcal{M}_i(p')$ är olika, har spelaren olika information om positionerna p och p' som därför inte kan tillhöra samma informationsmängd. Denna observation rättfärdigar följande definition.

Definition 9.2.4 En spelare i ett extensivt spel har *perfekt minne* om minneslistorna till positioner i samma informationsmängd är identiska för alla informationsmängder som hör till honom. Själva spelet säges ha *perfekt min-*



Figur 9.6. Spelet i exempel 9.2.6.

ne om alla spelarna har perfekt minne.

Exempel 9.2.7 I spelet i figur 9.6 har spelare 2 perfekt minne. Däremot har inte spelare 1 perfekt minne eftersom hans minneslistor i positionerna p_{10} och p_{11} är olika. Spelet har därför inte perfekt minne.

Spelet Basic Endgame och spelen i figurerna 9.2 och 9.3 har perfekt minne. □

Ett spelare med perfekt minne kan inte ha någon informationsmängd $\mathcal{I}$ som innehåller två positioner p och p' som förenas av en dragföljd från p till p', ty minneslistan i p' måste i så fall vara lika med minneslistan i p förlängd med åtminstone informationsmängden $\mathcal{I}$ och en etikett från $\mathcal{I}$. Spelare 1 har därför inte perfekt minne i det vänstra spelet i figur 9.5.

Övningar

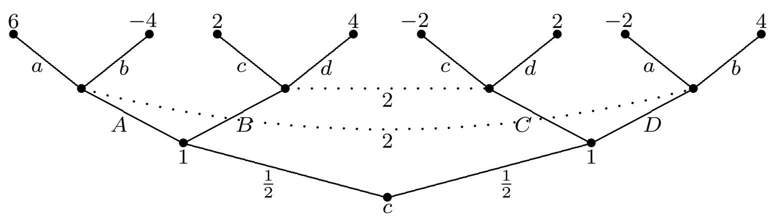
9.2 Figur 9.7 visar ett tvåpersoners nollsummespel på extensiv form; talen vid slutpositionerna anger utbetalningen till spelare 1.

a) Har spelet perfekt minne?

b) Bestäm den ekvivalenta strategiska formen av spelet.

c) Lös spelet, dvs. bestäm ett par av optimala blandade strategier för de båda spelarna samt ange spelets värde.

[Ledning: Eliminera dominerade strategier för att få ett hanterbart problem.]

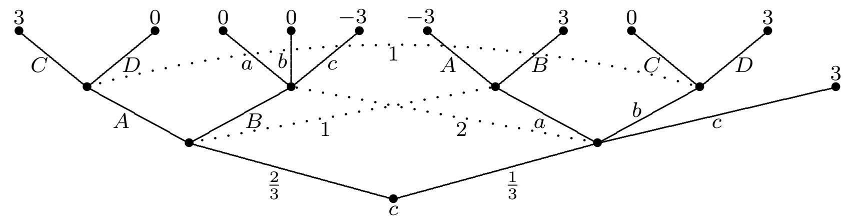


Figur 9.7

9.3 Spelare 2 väljer ett av två rum där han gömmer en krona. Spelare 1, som inte vet i vilket rum myntet är gömt, väljer ett av rummen för genomsökning. Om han söker i rum A och myntet finns där, hittar han det med 50% sannolikhet, men om han söker i rum B och myntet finns där hittar han det bara med 25% sannolikhet. Söker han i fel rum hittar han det naturligtvis inte. Spelare 1 får behålla myntet om han hittar det, annars återlämnas det till spelare 2. Formulera situationen som ett extensivt spel, reducera det sedan till strategisk form och bestäm de optimala blandade strategierna samt spelets värde.

9.4 Betrakta spelet i föregående övning och antag att spelare 1 får en andra chans att hitta myntet om han misslyckas i första försöket. Han får med andra ord på nytt välja rum (antingen samma som i första försöket eller det andra rummet) och får sedan genomsöka det valda rummet på nytt med samma sannolikheter att hitta myntet som tidigare. Rita spelträdet för detta extensiva spel, reducera det till strategisk form och bestäm de optimala blandade strategierna samt spelets värde.

9.5 Bestäm den ekvivalenta strategiska formen till det extensiva nollsummespelet i figur 9.8 samt lös därefter spelet.



Figur 9.8

9.6 Mynt A är ett äkta mynt med lika sannolikhet för krona och klave, medan mynt B är fejkat och ger krona upp med sannolikhet 1/3 och klave upp med sannolikhet 2/3. Spelare 1 börjar med att förutsäga krona eller klave. Säger han krona kastas mynt A, säger han klave kastas mynt B. Spelare 2 informeras om huruvida spelare 1:s förutsägelse var rätt eller fel, men inte om förutsägelsen eller om vilket mynt som användes, och skall sedan gissa om det var mynt A eller mynt B som användes. Om spelare 2 gissar rätt vinnar han en krona av motspelaren, gissar han fel och spelare 1:s förutsägelse var korrekt förlorar han däremot två kronor till motspelaren. Om båda hade fel sker ingen utbetalning. Rita spelträdet, reducera spelet till strategisk form och lös det.

9.3 Blandade strategier och situationsanpassade strategier

Eftersom varje extensivt spel kan reduceras till ett strategiskt spel, kan vi enkelt översätta många begrepp och resultat för strategiska spel till extensiva spel. Ett viktigt sådant begrepp är förstås begreppet blandad strategi.

Definition 9.3.1 Med en *blandad strategi* för en spelare i i ett extensivt spel menas ett lotteri, dvs. en sannolikhetsfördelning, på mängden Σ_i av spelarens strategier.

För att tydliggöra skillnaden mellan blandade strategier och strategier i Σ_i kommer vi ofta att kalla de sistnämnda för spelarens *rena* strategier.

Begreppet blandad strategi är naturligt för spel på strategisk form, men det känns inte lika tilltalande för extensiva spel. Det förefaller inte naturligt för en spelare att en gång för alla göra ett slumpmässigt val av strategi och att sedan följa den valda strategin oberoende av hur motspelarna gör sina drag under spelets gång. Det verkar istället naturligare att välja dragen slumpmässigt varje gång det är spelarens tur att göra ett drag. Ett sådant tänkande leder till begreppet *situationsanpassad strategi.*

Definition 9.3.2 Låt $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_m$ vara spelare i:s informationsmängder i ett extensivt spel. En *situationsanpassad strategi* λ för spelare i är en uppsättning $\lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m\}$ av *oberoende* sannolikhetsfördelningar, där varje λ^j är en sannolikhetsfördelning på mängden av etiketter i informationsmängden $\mathcal{I}_j$.

Exempel 9.3.1 Betrakta spelet i figur 9.8. Spelare 1 har fyra rena strategier nämligen AC, AD, BC och BD. En blandad strategi för spelare 1 kan vara att välja dessa rena strategier med sannolikheterna $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ och $\frac{1}{7}$, och mängden av spelarens alla blandade strategier kan uppenbarligen identifieras med delmängden $\{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$ av $\mathbf{R}^4$.

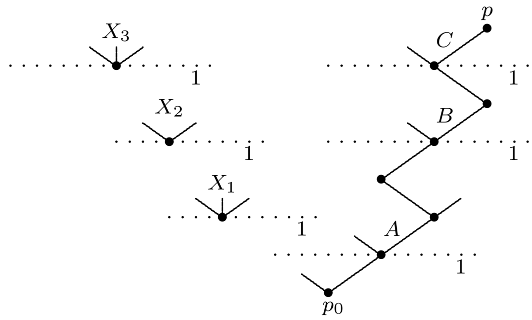
En situationsanpassad strategi för samma spelare har följande form: ”Välj etikett A med sannolikhet α och etikett B med sannolikhet $(1-\alpha)$ samt etikett C med sannolikhet β och etikett D med sannolikhet $(1-\beta)$”, där α och β är godtyckliga reella tal i intervallet $[0,1]$. Mängden av alla situationsanpassade strategier kan tydligen identifieras med produktdelmängden $[0,1] \times [0,1]$ av $\mathbf{R}^2$. □

Betrakta nu ett godtyckligt extensivt spel och antag att varje spelare i valt en blandad eller situationsanpassad strategi λ_i. Utgången av ett konkret spel som spelas efter dessa strategier kommer naturligvis av vara stokastisk; sannolikheten för ett visst parti π beror av strategivektorn $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (och av utfallen av eventuella slumpdrag). Strategivektorn λ ger med andra ord upphov till en sannolikhetsfördelning P_λ på mängden av alla partier Π, och vi skall nu beskriva hur man bestämmer denna fördelning.

Låt π vara ett parti i spelet. En *ren* strategi för spelare i kallas *kompatibel med partiet* π om samtliga drag som spelaren gör i partiet har etiketter som tillhör strategin. Mängden av alla rena strategier för spelare i som är kompatibla med partiet π kommer att betecknas $\Sigma_i(\pi)$.

Om en spelare använder sig av en strategi som inte är kompatibel med partiet π, så kan således detta parti inte uppkomma, oavsett hur motspelarna spelar och eventuella chansdrag utfaller.

Exempel 9.3.2 Figur 9.9 visar ett brottstycke av ett extensivt spel. Låt π beteckna partiet som slutar i positionen p. Under vägen från startpositionen p_0 passerar partiet π tre informationsmängder som tillhör spelare 1; vi har antytt dessa med prickade linjer. Dessutom har spelaren ytterligare tre informationsmängder, som inte passeras av partiet π och som också antytts med hjälp av prickade linjer.



Figur 9.9

En (ren) strategi för spelare 1 är en mängd av etiketter med en etikett från varje informationsmängd. Strategin är kompatibel med partiet π om och endast om den innehåller etiketterna A, B och C från de tre informationsmängderna i partiet. Mängden $\Sigma_1(\pi)$ av alla med partiet kompatibla rena strategier består med andra ord av alla rena strategier som har formen $ABCX_1X_2X_3$, där etiketterna X_1, X_2 och X_3 kan väljas godtyckligt från sina informationsmängder. □

Låt nu λ_i vara en *blandad strategi* för spelare i i ett extensivt spel, och låt π vara ett godtyckligt parti i spelet. Sannolikheten $P_i(\lambda_i; \pi)$ för att den blandade strategin λ_i skall resultera i partiet π, *givet att de andra spelarna och slumpen väljer drag som tillhör partiet*, är då lika med sannolikheten för att lotteriet λ_i ska ge ett utfall som ligger i mängden $\Sigma_1(\pi)$ av med partiet kompatibla strategier, och den ges följaktligen av formeln

$$P_i(\lambda_i; \pi) = \sum_{\sigma \in \Sigma_i(\pi)} \lambda_i(\sigma). \tag{1}$$

Vi skall nu betrakta motsvarande sannolikhet för situationsanpassade strategier. Låt därför λ_i vara en *situationsanpassad strategi* för spelare i; detta innebär att λ_i är en familj av oberoende sannolikhetsfördelningar $\lambda_i^{\mathcal{I}}$ med en sannolikhetsfördelning $\lambda_i^{\mathcal{I}}$ för varje informationsmängd $\mathcal{I}$ som tillhör spelaren.

Givet ett godtyckligt parti π låter vi nu $E_1(\pi), E_2(\pi), \dots, E_k(\pi)$ vara etiketterna för de drag i partiet som utförs av spelare i i de positioner som tillhör spelaren. Motsvarande informationsmängder betecknas $\mathcal{I}_1(\pi)$, $\mathcal{I}_2(\pi)$,..., $\mathcal{I}_k(\pi)$. (Observera att två skilda positioner i partiet kan tillhöra samma informationsmängd, dvs. det kan hända att $\mathcal{I}_\ell(\pi) = \mathcal{I}_m(\pi)$ för $\ell \neq m$, men då är nödvändigtvis $E_\ell(\pi) = E_m(\pi)$. Se spelet i figur 9.5.) Talet

$$P_i(\lambda_i; \pi) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_i^{\mathcal{I}_j}(E_j(\pi)) \tag{2}$$

är lika med sannolikheten för att partiet π skall inträffa om spelare i följer sin situationsanpassade strategi λ_i och alla andra spelare gör ”rätt” drag och alla eventuella chansdrag utfaller ”rätt”. (Här utnyttjar vi förstås att sannolikhetsfördelningarna $\lambda_i^{\mathcal{I}_j}$ är oberoende av varandra, dvs. att valet av etikett i en informationsmängd görs oberoende av valet av etikett i de andra informationsmängderna.)

Vi måste även ta hänsyn till eventuella slumpdrag under ett parti. Låt därför slutligen $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ vara de positioner i partiet π där det utförs slumpdrag, och definiera $c(\pi)$ som sannolikheten för att alla dessa slumpdrag är drag i partiet π; talet $c(\pi)$ är då en produkt med ℓ faktorer, där faktor nr j är sannolikheten för att slumpdraget i position p_j är ett drag i partiet π.

Med hjälp av ovan införda kvantiteter får vi nu följande formel för sannolikheten för att ett parti π skall inträffa när spelarna valt sina blandade eller situationsanpassade strategier.

Sats 9.3.1 *Antag att varje spelare i valt en blandad eller situationsanpassad strategi λ_i och sätt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Då ges sannolikheten $P_\lambda(\pi)$ för partiet π av formeln*

$$P_\lambda(\pi) = c(\pi) \cdot \prod_{i \in N} P_i(\lambda_i; \pi).$$

Bevis. Sannolikheten för att partiet π skall inträffa är lika med sannolikheten för att alla spelarna och slumpen väljer drag som tillhör partiet, och eftersom spelarnas val och slumpens val är oberoende händelser blir sannolikheten för partiet π lika med produkten av sannolikheterna för dessa händelser. □

Varje vektor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ av blandade eller situationsanpassade strategier för de n spelarna genererar alltså ett sannolikhetsmått P_λ på mängden Π av alla partier. De rena strategierna kan därvid naturligtvis uppfattas som speciella blandade strategier eller speciella situationsanpassade strategier.

För en spelare i med nyttofunktion u_i ges den förväntade nyttan $\tilde{u}_i(\lambda)$ av strategivektorn $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, där de ingående strategierna λ_j är blandade eller situationsanpassade, av formeln

$$\tilde{u}_i(\lambda) = \sum_{\pi \in \Pi} u_i(\pi) P_\lambda(\pi).$$

Vi kan nu på ett naturligt sätt definiera begreppet Nashjämvikt för såväl blandade strategier som situationsanpassade strategier.

Definition 9.3.3 En n-tipel $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$ av blandade strategier för spelarna i ett extensivt spel är en *blandad Nashjämvikt* om

$$\tilde{u}_i(\lambda_{-i}^*, \lambda_i^*) \geq \tilde{u}_i(\lambda_{-i}^*, \tau_i)$$

för varje spelare i och alla blandade strategier τ_i som tillhör spelare i.

En n-tipel λ^* av situationsanpassade strategier för spelarna i ett extensivt spel är en *situationsanpassad Nashjämvikt* om samma olikheter gäller för varje spelare i och alla situationsanpassade strategier τ_i som tillhör spelare i.

En blandad strategivektor λ^* i ett extensivt spel är uppenbarligen en blandad Nashjämvikt om och endast samma vektor är en blandad Nashjämvikt då spelet skrivs på strategisk form. Följande resultat följer därför direkt av sats 5.2.1.

Sats 9.3.2 *Varje ändligt extensivt spel har en blandad Nashjämvikt.*

En naturlig fråga i sammanhanget är nu om allt en spelare kan åstadkomma med blandade strategier också kan åstadkommas med hjälp av situationsanpassade strategier och vice versa. För att precisera vad vi menar behöver vi följande definition:

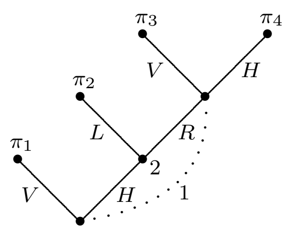
Definition 9.3.4 I ett extensivt spel kallas två strategier λ_i och τ_i för spelare i (båda blandade eller båda situationsanpassade eller en av vardera slaget) för *spelutfallsekvivalenta*, om de båda sannolikhetsmåtten $P_{(\sigma_{-i},\lambda_i)}$ och $P_{(\sigma_{-i},\tau_i)}$ är identiska för alla övriga spelares val av rena strategier σ_1, σ_2, …, σ_n.

Antag att en spelare har m stycken informationsmängder och att antalet etiketter i dessa är respektive $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$. Antalet rena strategier blir då $\nu = \nu_1\nu_2\cdots\nu_m$. Mängden av alla blandade strategier för spelaren kan därför uppfattas som en delmängd av rummet $\mathbf{R}^\nu$, och dimensionen hos denna mängd är lika med $\nu - 1$, eftersom man kan välja sannolikheten för varje ren strategi som ett godtyckligt icke-negativt tal så länge som summan av alla talen är lika med 1.

I en situationsanpassad strategi λ är varje komponent λ^j en sannolikhetsfördelning på etiketterna i motsvarande informationsmängd, och mängden av alla sådana sannolikhetsfördelningar är en delmängd av $\mathbf{R}^{\nu_j}$ av dimension $\nu_j - 1$. Mängden av alla situationsanpassade strategier är därför en produktmängd av dimension $\nu' - m$, där $\nu' = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$.

Det är lätt att se att $\nu' - m \leq \nu - 1$ och att strikt olikhet gäller utom i det triviala fallet när $\nu_j = 1$ för alla index j utom eventuellt ett. Detta innebär att det i allmänhet finns ”fler” blandade strategier än situationsanpassade strategier. Därför kan man kanske inte vänta sig att begreppen skall vara ekvivalenta i den meningen att det för varje blandad strategi finns en spelutfallsekvivalent situationsanpassad strategi och vice versa. Begreppen är heller inte ekvivalenta för alla spel, som följande två exempel visar.

EXEMPEL 9.3.3 Figur 9.10 visar ett spel med fyra partier, som vi döpt till π_1, π_2, π_3 och π_4; namnen har skrivits vid respektive partis slutposition.



Figur 9.10. Spel med en situationsanpassad strategi som inte är utfallsekvivalent med någon blandad strategi.

De båda spelarna har två rena strategier vardera, spelare 1 strategierna V och H, och spelare 2 strategierna L och R. Kombinationen (V, R) ger partiet π_1, medan kombinationen (H, R) ger π_4.

Låt λ_1 vara spelare 1:s blandade strategi som består i att välja V med sannolikhet α och H med sannolikhet $1-\alpha$. Den blandade strategin λ_1 i kombination med den rena strategin R ger partiet π_1 med sannolikhet α och partiet π_4 med sannolikhet $1-\alpha$.

Sannolikhetsfördelningen $P_{(\lambda_1,R)}$ på mängden Π av alla fyra möjliga partier definieras alltså av att

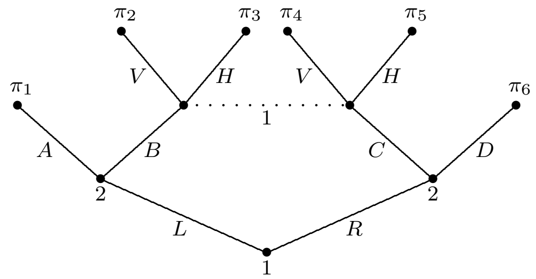
$$P_{(\lambda_1,R)}(\pi_1) = \alpha,\ \ P_{(\lambda_1,R)}(\pi_2) = P_{(\lambda_1,R)}(\pi_3) = 0,\ \ P_{(\lambda_1,R)}(\pi_4) = 1-\alpha.$$

Låt nu τ_1 vara spelare 1:s situationsanpassade strategi, som består i att välja V med sannolikhet β och följaktligen H med sannolikhet $1-\beta$. I kombination med spelare 2:s rena strategi R ger den situationsanpassade strategin partiet π_1 med sannolikhet β, partiet π_3 med sannolikhet $(1-\beta)\beta$ och partiet π_4 med sannolikhet $(1-\beta)^2$. Sannolikhetsfördelningen $P_{(\tau_1,R)}$ ges alltså av att

$$P_{(\tau_1,R)}(\pi_1) = \beta,\ \ P_{(\tau_1,R)}(\pi_3) = (1-\beta)\beta,\ \ P_{(\tau_1,R)}(\pi_4) = (1-\beta)^2,$$

medan $P_{(\tau_1,R)}(\pi_2) = 0$. För $0 < \beta < 1$ inträffar således π_3 med positiv sannolikhet under den situationsanpassade strategin, medan den inte gör det för någon blandad strategi. Det finns med andra ord inte någon blandad strategi som är spelutfallsekvivalent med den situationsanpassade strategin τ_1 om t. ex. $\beta = \frac{1}{2}$. □

EXEMPEL 9.3.4 Figur 9.11 visar ett spel med sex partier, vars namn vi angivit vid respektive slutposition.



Figur 9.11. Spel med en blandad strategi som inte är utfallsekvivalent med någon situationsanpassad strategi.

Spelare 1 har fyra rena strategier, nämligen LV, LH, RV och RH; låt λ_1 vara den blandade strategi som ger dessa rena strategier sannolikheterna 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ och 0.

Spelare 1:s rena strategier i nämnd ordning ger i kombination med spelare 2:s rena strategi BC upphov till partierna π_2, π_3, π_4 och π_5. Kombinationen av den blandade strategin λ_1 och den rena strategin BC leder därför till de båda partierna π_3 och π_4 med samma sannolikhet $\frac{1}{2}$ och till övriga partier med sannolikhet 0. Med andra ord är $P_{(\lambda_1,BC)}(\pi_3) = P_{(\lambda_1,BC)}(\pi_4) = \frac{1}{2}$, och $P_{(\lambda_1,BC)}(\pi) = 0$ för de fyra andra partierna π.

En godtycklig situationsanpassad strategi $\tau_1 = (\tau_1^1, \tau_1^2)$ för spelare 1 definieras av att $\tau_1^1(L) = \alpha$, $\tau_1^1(R) = 1-\alpha$ och $\tau_1^2(V) = \beta$, $\tau_1^2(H) = 1-\beta$, där $0 \le \alpha, \beta \le 1$. Sannolikheten för att strategin τ_1 i kombination med spelare 2:s rena strategi BC skall ge partierna π_2, π_3, π_4 och π_5 är $\alpha\beta$, $\alpha(1-\beta)$, $(1-\alpha)\beta$ respektive $(1-\alpha)(1-\beta)$.

För att strategin τ_1 skall vara spelutfallsekvivalent med den blandade strategin λ_1 måste därför

$$\begin{cases} \alpha\beta = 0 \\ \alpha(1-\beta) = \frac{1}{2} \\ (1-\alpha)\beta = \frac{1}{2} \\ (1-\alpha)(1-\beta) = 0\,. \end{cases}$$

Av den första ekvationen följer att $\alpha = 0$ eller $\beta = 0$, men detta strider mot den andra respektive den tredje ekvationen. Systemet har därför inte någon lösning, och detta betyder att det inte kan finnas någon situationsanpassad strategi som är spelutfallsekvivalent med den blandade strategin λ_1. □

Spelen i de båda motexemplen 9.3.3 och 9.3.4 är spel utan perfekt minne. Detta är ingen tillfällighet; vi har nämligen följande resultat av Kuhn.

Sats 9.3.3 *Betrakta en spelare i ett ändligt extensivt spel, och antag att spelaren inte har någon informationsmängd som innehåller två positioner som är förbundna av någon dragföljd; detta antagande är speciellt uppfyllt* *om spelaren har perfekt minne. Då är varje situationsanpassad strategi för spelaren spelutfallsekvivalent med någon blandad strategi.*

Sats 9.3.4 *För en spelare med perfekt minne i ett ändligt extensivt spel är varje blandad strategi spelutfallsekvivalent med någon situationsanpassad strategi.*

Korollarium 9.3.5 *För spelare med perfekt minne i ändliga extensiva spel är varje blandad strategi spelutfallsekvivalent med en situationsanpassad strategi och omvänt.*

Bevis för sats 9.3.3. Kalla den betraktade spelaren för spelare 1, och låt $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_m$ vara spelarens informationsmängder. Vår uppgift är att till varje situationsanpassad strategi τ_1 för spelare 1 associera en blandad strategi λ_1 som är spelutfallsekvivalent med τ_1, dvs. har egenskapen att de båda sannolikheterna $P_{(\tau_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)}(\pi)$ och $P_{(\lambda_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)}(\pi)$ sammanfaller för alla partier π och alla rena strategier σ_2, …, σ_n för de övriga spelarna, och på grund av formeln i sats 9.3.1 räcker det då att visa att

$$P_1(\tau_1;\pi) = P_1(\lambda_1;\pi) \tag{3}$$

för alla partier π.

Vi påminner om att de situationsanpassade strategierna för spelare 1 har formen

$$\tau_1 = \{\tau_1^1, \tau_1^2, \dots, \tau_1^m\},$$

där τ_1^j är ett sannolikhetsmått på informationsmängden $\mathcal{I}_j$ för varje j, medan spelarens blandade strategier är sannolikhetsmått på mängden Σ_1 av spelarens rena strategier, och en ren strategi σ_1 är ingenting annat än en lista av etiketter med en etikett från varje informationsmängd som tillhör spelaren.

Givet den situationsanpassade strategin τ_1 definierar vi nu den blandade strategin λ_1 genom att för rena strategier $\sigma_1 = E_1E_2\dots E_m$, där etiketterna E_j ligger i $\mathcal{I}_j$, sätta

$$\lambda_1(\sigma_1) = \prod_{j=1}^{m} \tau_1^j(E_j).$$

Då är $\lambda_1(\sigma_1) \geq 0$ och $\sum_{\sigma_1\in\Sigma_1} \lambda_1(\sigma_1) = 1$, så λ_1 är verkligen ett sannolikhetsmått på Σ_1, dvs. en blandad strategi för spelare 1.

Det återstår att visa att de båda strategierna λ_1 och τ_1 är spelutfallsekvivalenta. Låt för den skull π vara ett godtyckligt parti i spelet, och numrera spelare 1:s informationsmängder så att det är informationsmängderna $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_k$ som innehåller spelarens positioner i partiet π, och låt E'_1, E'_2, …, E'_k, där E'_j tillhör $\mathcal{I}_j$, beteckna etiketterna för spelarens drag i partiet π. Det följer av förutsättningarna i sats 9.3.3 att ingen av informationsmängderna kan innehålla mer än en position från partiet, så informationsmängderna $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_k$ och därmed också etiketterna $E'_1, E'_2, \dots, E'_k$

är därför garanterat olika. Per definition är nu

$$P_1(\tau_1;\pi) = \prod_{j=1}^{k} \tau_1^j(E_j').$$

För att beräkna $P_1(\lambda_1;\pi)$ börjar vi med att konstatera att mängden $\Sigma_1(\pi)$ av alla rena strategier för spelare 1 som är kompatibla med partiet π består av alla strategier σ_1 som har formen $\sigma_1 = E_1'E_2'\dots E_k'X_{k+1}\dots X_m$, där etiketterna $X_{k+1},\dots,X_m$ är helt godtyckliga i sina respektive informationsmängder $\mathcal{I}_{k+1},\dots,\mathcal{I}_m$. Vad spelaren valt för etikett i en informationsmängd som inte innehåller någon position från partiet π är ju irrelevant, medan valet av etikett är entydigt bestämt i de informationsmängder som innehåller en position från partiet.

Därför är

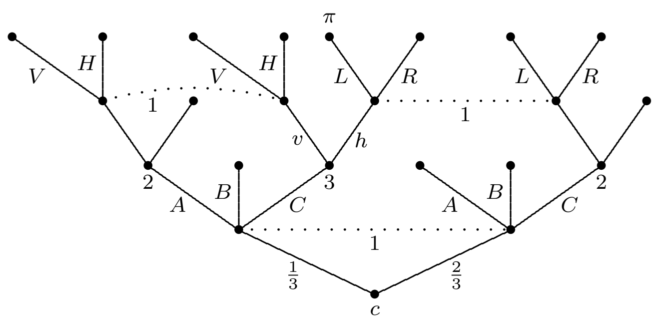
$$
\begin{aligned}
(4)\qquad P_1(\lambda_1;\pi) &= \sum_{\sigma_1\in\Sigma_1(\pi)} \lambda_1(\sigma_1) = \sum\nolimits' \lambda_1(E_1'E_2'\dots E_k'X_{k+1}\dots X_m)\\
&= \sum\nolimits' \tau_1^1(E_1')\tau_1^2(E_2')\cdots\tau_1^k(E_k')\tau_1^{k+1}(X_{k+1})\cdots\tau_1^m(X_m)\\
&= P_1(\tau_1;\pi)\cdot\sum\nolimits' \tau_1^{k+1}(X_{k+1})\cdots\tau_1^m(X_m),
\end{aligned}
$$

där $\sum'$ betyder att summering skall ske över alla val av etiketter X_{k+1} i $\mathcal{I}_{k+1}$, X_{k+2} i $\mathcal{I}_{k+2}$, osv. Eftersom varje τ_1^j är en sannolikhetsmått på etikettmängden i $\mathcal{I}_j$ är emellertid

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits' \tau_1^{k+1}(X_{k+1})\cdots\tau_1^m(X_m) &= \sum_{\text{alla } X_{k+1}\in\mathcal{I}_{k+1}} \tau_1^{k+1}(X_{k+1})\cdots \sum_{\text{alla } X_m\in\mathcal{I}_m} \tau_1^m(X_m)\\
&= 1\cdots 1 = 1,
\end{aligned}
$$

vilket insatt i ekvationen (4) ger likheten (3). Därmed är satsen bevisad. □

EXEMPEL 9.3.5 Vi illustrerar sats 9.3.3 med spelet i figur 9.12.



Figur 9.12. Spel som illustrerar sats 9.3.3.

Definiera en situationsanpassad strategi $\tau_1 = \{\tau_1^1, \tau_1^2, \tau_1^3\}$ genom att sätta

$$\begin{aligned}
&\tau_1^1(A) = \tfrac{1}{6},\ \ \tau_1^1(B) = \tfrac{1}{3},\ \ \tau_1^1(C) = \tfrac{1}{2}\\
&\tau_1^2(V) = \tfrac{1}{5},\ \ \tau_1^2(H) = \tfrac{4}{5}\\
&\tau_1^3(L) = \tfrac{1}{4},\ \ \tau_1^2(R) = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Spelare 1 har $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ rena strategier som vi listat i tabell 9.1, där vi också angivit den med τ_1 spelutfallsekvivalenta blandade strategin λ_1. Sannolikheterna $\lambda_1(\sigma_1)$ beräknas med hjälp av metoden i beviset för sats 9.3.3; exempelvis är

$$\lambda_1(AVL) = \tau_1^1(A)\tau_1^2(V)\tau_1^3(L) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{120}.$$

σ_1	AVL	AVR	AHL	AHR	BVL	BVR	BHL	BHR	CVL	CVR	CHL	CHR
$\lambda_1(\sigma_1)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

Tabell 9.1. Spelare 1:s rena strategier och den med τ_1 spelutfallsekvivalenta blandade strategin λ_1.

Låt nu π beteckna det parti som slutar i den position som i figur 9.12 markerats med π. Vi skall beräkna de båda sannolikheterna $P_{(\tau_1,\sigma_2,\sigma_3)}(\pi)$ och $P_{(\lambda_1,\sigma_2,\sigma_3)}(\pi)$ för alla val av de andra spelarnas rena strategier σ_2 och σ_3 och se att de alltid är lika.

Om spelare 3 väljer strategin v, så kan partiet π inte uppstå, så i det fallet är båda sannolikheterna lika med noll.

För $\sigma_3 = h$ får vi, oberoende av spelare 2:s val σ_2,

$$P_{(\tau_1,\sigma_2,h)}(\pi) = \tfrac{1}{3} \cdot \tau_1^1(C)\tau_1^3(L) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{24}.$$

Det är vidare bara spelare 1:s rena strategier CVL och CHL som kan resultera i partiet π och sannolikheterna för dem under den blandade strategin λ_1 är $\frac{1}{40}$ resp. $\frac{1}{10}$. Därför är

$$P_{(\lambda_1,\sigma_2,h)}(\pi) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{24}.$$

De båda sannolikhetsfördelningarna är således lika. □

Bevis för sats 9.3.4. Låt λ_1 vara en blandad strategi för spelare 1. Vi skall definiera en spelutfallsekvivalent situationsanpassad strategi τ_1 och inför för den skull en partiell ordningsrelation $\prec$ på mängden av spelarens informationsmängder genom att låta $\mathcal{I}_1 \prec \mathcal{I}_2$ betyda att det finns en dragföljd som leder från en position i informationsmängden $\mathcal{I}_1$ till en position i informationsmängden $\mathcal{I}_2$.

För att definiera den situationsanpassade strategin τ_1 måste vi definiera ett sannolikhetsmått $\tau_1^{\mathcal{I}}$ på etikettmängden till varje informationsmängd $\mathcal{I}$

som tillhör spelare 1. Vi skall göra en rekursiv definition och börjar med att definiera $\tau_1^{\mathcal{I}}$ för informationsmängder $\mathcal{I}$ som inte föregås av någon annan informationsmängd under den införda partiella ordningen. Låt $\mathcal{I}$ vara en sådan informationsmängd; för etiketter E som tillhör $\mathcal{I}$ sätter vi

$$\tau_1^{\mathcal{I}}(E) = \sum_{E \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1), \tag{5}$$

där summeringen alltså sker över spelare 1:s alla rena strategier σ_1 som innehåller etiketten E. Med andra ord, $\tau_1^{\mathcal{I}}(E)$ är den sannolikhet som den blandade strategin λ_1 tilldelar mängden av alla rena strategier som innehåller etiketten E.

Låt nu $\mathcal{I}$ vara en godtycklig informationsmängd, och antag att sannolikhetsmåtten $\tau_1^{\mathcal{J}}$ redan är definierade för alla informationsmängder $\mathcal{J}$ som föregår $\mathcal{I}$ med avseende på den införda ordningen $\prec$. Eftersom spelare 1 har perfekt minne kan dessa ordnas i en kedja som har formen $\mathcal{I}_1 \prec \mathcal{I}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{I}_m \prec \mathcal{I}$. Spelarens minneslista i en godtycklig position i informationsmängden $\mathcal{I}$ har nu formen $\mathcal{I}_1, A_1, \mathcal{I}_2, A_2, \ldots, \mathcal{I}_m, A_m$, där varje A_j är en etikett som hör till informationsmängden $\mathcal{I}_j$.

Vi antar nu att definitionerna är gjorda så att följande likhet gäller för varje val av etikett B_m som hör till informationsmängden $\mathcal{I}_m$:

$$\prod_{j=1}^{m-1} \tau_1^{\mathcal{I}_j}(A_j) \cdot \tau_1^{\mathcal{I}_m}(B_m) = \sum_{A_1 \ldots A_{m-1} B_m \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1), \tag{6}$$

där summering sker över alla rena strategier σ_1 som innehåller etiketterna $A_1, \ldots, A_{m-1}, B_m$. (För $m = 1$ gäller likheten på grund av (5).)

Vi skall nu definiera sannolikhetsmåttet $\tau_1^{\mathcal{I}}$. Sätt för den skull

$$\alpha = \prod_{j=1}^{m} \tau_1^{\mathcal{I}_j}(A_j).$$

Då är förstås α ett icke-negativt tal.

Om $\alpha = 0$, så låter vi $\tau_1^{\mathcal{I}}$ vara ett godtyckligt sannolikhetsmått på etikettmängden till $\mathcal{I}$.

Om $\alpha > 0$ och E är en godtycklig etikett som hör till $\mathcal{I}$, definierar vi

$$\tau_1^{\mathcal{I}}(E) = \alpha^{-1} \cdot \sum_{A_1 \ldots A_m E \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1). \tag{7}$$

Då är $\tau_1^{\mathcal{I}}$ ett sannolikhetsmått på informationsmängden $\mathcal{I}$ eftersom

$$\sum_E \tau_1^{\mathcal{I}}(E) = \alpha^{-1} \cdot \sum_E \sum_{A_1 \ldots A_m E \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1) = \alpha^{-1} \cdot \sum_{A_1 \ldots A_m \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1) = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1,$$

där vi för att få den näst sista likheten utnyttjat ekvation (6) med B_m bytt mot A_m samt definitionen av α. (Den som är lite bevandrad i sannolikhetsteori har säkert observerat att sannolikheten $\tau_1^{\mathcal{I}}(E)$ är definerad som en betingad sannolikhet.)

Observera att ekvation (7) innebär att likheten (6) nu också gäller om vi byter m mot $m+1$, och detta betyder att vi har givit en rekursiv definition av sannolikhetsmåtten $\tau_1^{\mathcal{I}}$ som uppfyller (6).

Det återstår att visa att strategin τ_1 är spelutfallsekvivalent med den blandade strategin λ_1. Låt därför π vara ett godtyckligt parti. Om $\mathcal{I}_1 \prec \mathcal{I}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{I}_m$ är de informationsmängder som innehåller spelare 1:s positioner i partiet och $A_1, A_2, \dots, A_m$ är motsvarande etiketter, så består mängden $\Sigma_1(\pi)$ av alla blandade strategier σ_1 som innehåller etiketterna $A_1, A_2, \dots, A_m$. Enligt (1) och (2) är

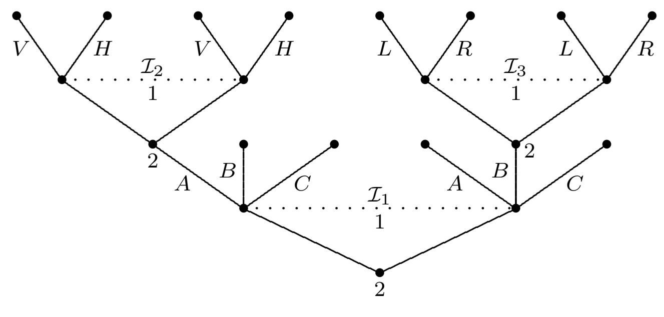
$$P_1(\lambda_1; \pi) = \sum_{A_1 \dots A_{m-1} A_m \in \sigma_1} \lambda_1(\sigma_1)$$

och

$$P_1(\tau_1; \pi) = \prod_{j=1}^{m} \tau_1^{\mathcal{I}_j}(A_j).$$

Det följer därför av (6) att $P_1(\lambda_1; \pi) = P_1(\tau_1; \pi)$, vilket medför att strategierna är spelutfallsekvivalenta. □

Exempel 9.3.6 I spelet i figur 9.13 har spelare 1 perfekt minne. Enligt sats 9.3.4 finns det därför för varje blandad strategi λ_1 en motsvarande spelutfallsekvivalent situationsanpassad strategi τ_1. Låt oss beräkna τ_1 för den blandade strategi λ_1 som ges av tabell 9.2.



Figur 9.13. Spelet i exempel 9.3.6.

σ_1	AVL	AVR	AHL	AHR	BVL	BVR	BHL	BHR	CVL	CVR	CHL	CHR
$\lambda_1(\sigma_1)$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{50}$	0	$\frac{9}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$

Tabell 9.2. Spelare 1:s blandade strategi λ_1.

Spelare 1 har tre informationsmängder som vi kallat $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ och $\mathcal{I}_3$. Hans situationsanpassade strategi τ_1 har därför formen $\{\tau_1^1, \tau_1^2, \tau_1^3\}$, där varje τ_1^j är ett sannolikhetsmått på etikettmängden till $\mathcal{I}_j$. För att beräkna dessa sannolikhetsmått använder vi tekniken i beviset för sats 9.3.4 och får då först

$$\tau_1^1(X) = \sum_{Y,Z} \lambda_1(XYZ) = \lambda_1(XVL) + \lambda_1(XVR) + \lambda_1(XHL) + \lambda_1(XHR)$$

för $X = A$, B och C. Tabellvärdena ger oss

$$\begin{aligned} \tau_1^1(A) &= \tfrac{7}{50} + \tfrac{2}{50} + \tfrac{6}{50} + \tfrac{3}{50} = \tfrac{18}{50} \\ \tau_1^1(B) &= \tfrac{1}{50} + 0 + \tfrac{9}{50} + \tfrac{5}{50} = \tfrac{15}{50} \\ \tau_1^1(C) &= \tfrac{4}{50} + \tfrac{8}{50} + \tfrac{2}{50} + \tfrac{3}{50} = \tfrac{17}{50}. \end{aligned}$$

Därefter kan vi beräkna $\tau_1^2(Y)$ för $Y = V$, H med hjälp av formeln

$$\tau_1^2(Y) = \frac{1}{\alpha} \sum_Z \lambda_1(AYZ) = \frac{1}{\alpha}\big(\lambda_1(AYL) + \lambda_1(AYR)\big), \quad \text{där} \quad \alpha = \tau_1^1(A),$$

som ger

$$\tau_1^2(V) = \tfrac{50}{18} \cdot (\tfrac{7}{50} + \tfrac{2}{50}) = \tfrac{1}{2}, \quad \tau_1^2(H) = \tfrac{50}{18} \cdot (\tfrac{6}{50} + \tfrac{3}{50}) = \tfrac{1}{2}.$$

Analogt fås $\tau_1^3(Z)$ för $Z = L$, R av formeln

$$\tau_1^3(Z) = \frac{1}{\alpha} \sum_Y \lambda_1(BYZ) = \frac{1}{\alpha}\big(\lambda_1(BVZ) + \lambda_1(BHZ)\big) \quad \text{med} \quad \alpha = \tau_1^1(B),$$

som ger

$$\tau_1^3(L) = \tfrac{50}{15} \cdot (\tfrac{1}{50} + \tfrac{9}{50}) = \tfrac{2}{3}, \quad \tau_1^3(R) = \tfrac{50}{15} \cdot (0 + \tfrac{5}{50}) = \tfrac{1}{3}. \qquad \square$$

Övning

9.7 Beräkna för spelet i figur 9.13 en situationsanpassad strategi τ_1 för spelare 1 som är spelutfallsekvivalent med den blandade strategin λ_1 i nedanstående tabell.

σ_1	AVL	AVR	AHL	AHR	BVL	BVR	BHL	BHR	CVL	CVR	CHL	CHR
$\lambda_1(\sigma_1)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Del II

Kooperativa spel

Kapitel 10

Koalitionsspel

I många situationer med flera personer inblandade tjänar dessa som kollektiv på att samarbeta, och eventuella intressemotsättningar uppstår först när den gemensamma förtjänsten ska fördelas bland individerna. I det här kapitlet ska vi modellera sådana situationer som spel. Vi förutsätter att spelarnas individuella nytta mäts med hjälp av en gemensam enhet och att den totala nytta som en grupp kan åstadkomma genom samarbete kan fördelas fritt bland gruppens deltagare. Själva problemet består i att avgöra hur nyttan ska fördelas, och vi kommer att studera några olika lösningsförslag.

10.1 Definitioner

Definition 10.1.1 Ett *koalitionsspel* $\langle N, v\rangle$ *(med överförbar nytta)* består av en ändlig mängd N av spelare och en reellvärd funktion v, som är definierad för alla icke-tomma delmängder av N.

De icke-tomma delmängderna till N kallas *koalitioner*, och mängden av alla koalitioner kommer att betecknas $\mathcal{C}$. Funktionsvärdet $v(S)$ för en koalition S kallas koalitionens *värde*, och funktionsvärdet $v(N)$ är spelets *totala värde*. Antalet medlemmar i en koalition S kommer att betecknas $|S|$.

För att en del definitioner och induktionsbevis ska fungera behöver vi ibland utvidga värdefunktionen v så att den också blir definierad för den tomma mängden $\emptyset$, vilket vi i så fall alltid gör genom att sätta $v(\emptyset) = 0$.

Speciellt är hela mängden N en koalition, den så kallade *storkoalitionen*. Spelarna i N kommer i allmänhet att numreras $1, 2, \dots, n$, där $n = |N|$. Antalet koalitioner, dvs. antalet icke-tomma delmängder av N, blir då förstås lika med $2^n - 1$.

Den intuitiva tolkningen av värdet $v(S)$ är att det är den totala nytta, förmögenhet eller styrka, som spelarna i koalitionen S erhåller genom att samarbeta, oberoende av vad spelarna utanför koalitionen gör. Speciellt är alltså $v(N)$ den totala nytta som erhålls när samtliga spelare samarbetar.

För att kunna härleda intressanta resultat behöver man avgränsa klassen av spel genom lämpliga restriktioner på värdefunktionen. I följande definitioner definieras två viktiga delklasser.

Definition 10.1.2 Ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ kallas *kohesivt* om det för varje partition $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ av N, dvs. uppdelning av N i parvis disjunkta delmängder, gäller att

$$v(S_1) + v(S_2) + \cdots + v(S_k) \le v(N).$$

Spelarna i ett kohesivt spel tjänar på att hålla samman och bilda en storkoalition, vilket förklarar namnet ”kohesiv”, som betyder ”sammanhållande”. I ett kohesivt spel kan man inte skapa större sammanlagd nytta genom att splittra storkoalitionen N i ett antal delgrupper. Speciellt är

$$v(S) + v(N \setminus S) \le v(N)$$

för alla koalitioner S, och

$$\sum_{i\in N} v(\{i\}) \le v(N).$$

Kohesivitet kommer att vara en naturligt förutsättning för många resultat i det här kapitlet.

En viktig delklass av de kohesiva spelen är de superadditiva spelen som definieras på följande sätt.

Definition 10.1.3 Ett koalitionsspel kallas *superadditivt* om

$$v(S) + v(T) \le v(S \cup T)$$

för alla parvis disjunkta koalitioner S och T.

Superadditivitet medför kohesivitet, men omvändningen gäller inte.

Exempel 10.1.1 Koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ med $N = \{1, 2, 3\}$ och värdefunktion $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 2$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 3$ och $v(\{1, 2, 3\}) = 5$ är kohesivt, ty det finns fyra partitioner av N, nämligen $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ och $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, och för dem är värdesumman i vänsterledet av definition 10.1.2 i tur och ordning $0+2+2$, $0 + 3$, $2 + 3$ och $2 + 3$, vilket i samtliga fall är $\le 5 = v(N)$.

Däremot är spelet inte superadditivt eftersom $v(\{2\}) + v(\{3\}) = 4 > v(\{2, 3\})$. □

I koalitionsspel är värdefunktionen v ett primitivt begrepp. Hur och på vilket sätt en koalitions värde beror av de individuella spelarnas insatser är irrelevant och ointressant i sammanhanget, men detta utesluter naturligtvis inte att vi i efterhand kan *definiera* en spelares marginella bidrag till en koalition på följande sätt.

Definition 10.1.4 Låt i vara en spelare i spelet $\langle N, v\rangle$. Med spelarens *marginella bidrag* till koalitionen S menas kvantiteten

$$\Delta_i(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\}).$$

En spelares marginella bidrag till en koalition som han inte deltar i är förstås alltid noll (eftersom $S = S \setminus \{i\}$ om $i \notin S$), så det är egentligen bara för koalitioner där spelaren medverkar som marginalbidraget är intressant.

I superadditiva spel är $\Delta_i(S) \geq v(\{i\})$ för alla $i \in S$, dvs. för varje koalition som en spelare medverkar i är hans marginella bidrag större än eller lika med det värde som han kan erhålla genom att agera individuellt.

EXEMPEL 10.1.2 För spelet i exempel 10.1.1 är spelare 2:s marginella bidrag $\Delta_2(\{2\}) = 2 - 0 = 2$, $\Delta_2(\{1,2\}) = 3 - 0 = 3$, $\Delta_2(\{2,3\}) = 3 - 2 = 1$ och $\Delta_2(\{1,2,3\}) = 5 - 3 = 2$. □

Vi kommer vid flera tillfällen få anledning att betrakta följande speciella spelartyper.

Definition 10.1.5 En spelare i i ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ kallas en *statist* om $\Delta_i(S) = 0$ för alla koalitioner S.

En statist lämnar med andra ord inte något bidrag till någon koalition men gör å andra sidan heller inte någon skada.

Definition 10.1.6 Två spelare i och j i ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ kallas *utbytbara* (mot varandra) om

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

för alla delmängder S av N (inklusive $S = \emptyset$) som inte innehåller spelare i eller j.

EXEMPEL 10.1.3 I spelet i exempel 10.1.1 är spelarna 2 och 3 utbytbara. □

Övning

10.1 Låt oss kalla ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ *trivialt* om $\sum_{i\in N} v(\{i\}) = v(N)$. Visa att i ett trivialt superadditivt spel är $v(S) = \sum_{i\in S} v(\{i\})$ för varje koalition S. Gäller motsvarande för varje trivialt kohesivt spel?

10.2 Ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ kallas *konvext* om

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

för alla koalitioner S och T.

Visa att ett koalitionsspel är konvext om och endast om

$$\Delta_i(S \cup \{i\}) \geq \Delta_i(T \cup \{i\})$$

för alla spelare i och alla koalitioner $S \supseteq T$ som spelare i inte tillhör. I konvexa spel växer alltså spelarnas incitament att gå med i koalitioner som de inte tillhör, när koalitionerna växer.

10.2 Imputeringar

Att storkoalitionen verkligen bildas är ett grundläggande antagande i teorin för koalitionsspel, och huvudproblemet i spelet $\langle N, v\rangle$ blir därför att fördela spelets totala värde $v(N)$ bland de enskilda spelarna. De olika spelarnas nytta efter en sådan fördelning kan beskrivas med hjälp av en vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{R}^n$, där komponenten x_i anger nyttan för spelare i. Eftersom vi ofta kommer att behöva summera nyttan för alla spelare som tillhör en viss koalition S, inför vi följande kompakta beteckningssätt för sådana summor:

$$x(S) = \sum_{i\in S} x_i.$$

Definition 10.2.1 Låt $\Gamma = \langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med överförbar nytta. En n-tipel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av reella tal kallas

- *kollektivt rationell* om $x(N) = v(N)$;
- *individuellt rationell* om $x_i \geq v(\{i\})$ för alla $i \in N$.

En vektor x som är både kollektivt och individuellt rationell kallas en *imputering.*

Mängden av alla imputeringar i spelet Γ kommer att betecknas $\mathcal{I}(\Gamma)$.

Varje kollektivt rationell vektor svarar mot en möjlig förlustfri utdelning av spelets totala värde till de individuella spelarna, och när vi i fortsättningen diskuterar olika lösningsförslag på problemet att fördela värdet, kommer vi alltid att kräva att lösningen ska vara kollektivt rationell.

Individuell rationalitet är också ett naturligt villkor för att samtliga spelare ska acceptera utdelningsvektorn x, ty om $x_i < v(\{i\})$ för någon spelare i finns det inget incitament för honom att gå med i storkoalitionen, eftersom han vinner mer på att agera helt på egen hand. (Vi förutsätter att spelarna är egoistiska!) Om vi med en ”lösning” till spelet menar en fördelning av värdet $v(N)$ som accepteras av alla och i någon mening är rimlig och stabil, så bör vi alltså söka denna i mängden av imputeringar. I nästa kapitel kommer vi dock att studera en lösning som inte nödvändigtvis är individuellt rationell.

Sats 10.2.1 *I alla koalitionsspel Γ är mängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ av imputeringar konvex, sluten och begränsad, och i alla kohesiva spel är den icke-tom.*

Bevis. Mängderna

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N)\}$$

av alla kollektivt rationella vektorer och

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq v(\{i\}) \text{ för alla } i \in N\}$$

av alla individuellt rationella vektorer är båda slutna och konvexa − den förstnämnda mängden är ett hyperplan i $\mathbf{R}^n$ (en linje om $n = 2$, ett plan om $n = 3$, osv.), och den sistnämnda fås genom att translatera första ortanten $\mathbf{R}^n_+$ i $\mathbf{R}^n$ längs vektorn $(v(\{1\}), \dots, v(\{n\}))$. Eftersom ett snitt av slutna mängder är slutet och ett snitt av konvexa mängder är konvext och imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ är lika med snittet $A \cap B$, är imputeringsmängden sluten och konvex.

Imputeringsmängden är vidare begränsad, ty för varje $x \in \mathcal{I}(\Gamma)$ och $i \in N$ gäller att

$$v(\{i\}) \leq x_i = v(N) - \sum_{k \neq i} x_k \leq v(N) - \sum_{k \neq i} v(\{k\}).$$

I kohesiva spel är speciellt $\sum_{i=1}^n v(\{i\}) \leq v(N)$. Det går därför att åstadkomma en kollektivt rationell fördelning som också är individuellt rationell, dvs. uppfyller olikheterna $x_i \geq v(\{i\})$ för samtliga spelare i. Man kan exempelvis sätta $x_i = v(\{i\})$ för alla utom spelare 1, som får resterande $v(N) - \sum_{i=2}^n v(\{i\})$ värdeenheter. Imputeringsmängden är därför inte tom i sådana spel. □

Imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ är per definition lösningsmängd till ett ändligt antal linjära likheter och olikheter, och en sådan lösningsmängd kallas (inom konvexitetsteorin) för en polyeder. Ett kohesivt spels imputeringsmängd är med andra ord en icke-tom begränsad polyeder.

Övningar

10.3 Bestäm imputeringsmängden för spelet i exempel 10.1.1.

10.4 Illustrera imputeringsmängden för ett koalitionsspel med tre spelare och värdefunktion

a) $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$,
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,3\}) = 3$

b) $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$,
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$.

10.3 Exempel

Vi illustrerar de hittills införda begreppen med några exempel.

Exempel 10.3.1 Person 1 äger en tavla som han värderar till 1000 kr. Person 2 värderar samma tavla till 2000 kr, och för person 3 är tavlan värd 3000 kr. Person 1 kan tänka sig att ge tavlan till någon av de övriga två personerna mot att han får en summa pengar i vederlag.

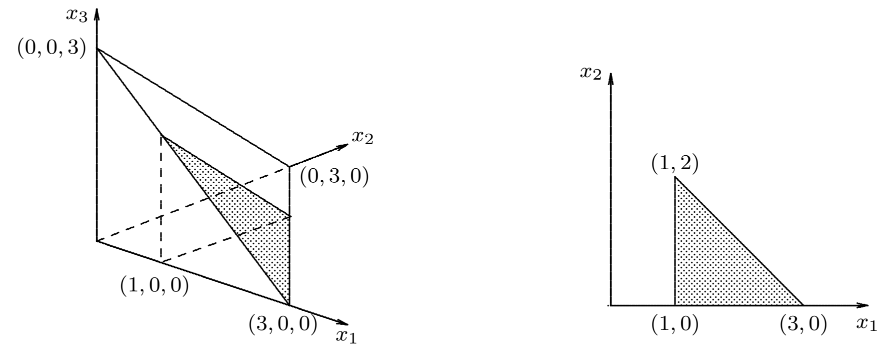
Situationen kan formuleras som ett koalitionsspel med överförbar nytta med de tre personerna som spelare, dvs. med $N = \{1, 2, 3\}$. För en koalition S som innehåller tavelägaren definierar vi koalitionsvärdet $v(S)$ som tavlans värde för den person i koalitionen som värderar den högst. För koalitioner S som inte innehåller tavelägaren sätter vi $v(S) = 0$. I det förstnämnda fallet kan man ju inom koalitionen låta tavlan byta ägare så att personen som värderar den högst får den; i det sistnämnda fallet äger ingen koalitionsmedlem något av värde.

Värdefunktionen, med värdet angivet i tusental kronor, definieras alltså av att $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 2$ och $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 3$.

Man verifierar lätt att spelet är superadditivt. Inputeringsmängden

$$\{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

är en triangel i $\mathbf{R}^3$ med hörn i punkterna $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$ och $(3, 0, 0)$. Genom att eliminera $x_3 = 3 - x_1 - x_2$ och utnyttja olikheten $x_3 \geq 0$ ser man att imputeringsmängdens projektion i x_1x_2-planet ges av olikheterna $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 3$. Se figur 10.1. □



Figur 10.1. Den vänstra figuren visar imputeringsmängden för spelet i exempel 10.3.1 och figuren till höger visar dess projektion i x_1x_2-planet.

Exempel 10.3.2 (En produktionsmodell.) En person äger en fabrik som sysselsätter n arbetare. Utan tillgång till maskinerna i fabriken kan arbetarna inte producera någonting av värde, men i fabriken kan varje grupp om m arbetare producera produkter med ett sammanlagt värde av $f(m)$, där $f \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ är en växande, konkav funktion och $f(0) = 0$.

Att funktionen f är konkav betyder att $f(k+1) - f(k) \leq f(k) - f(k-1)$. Differensen $f(k) - f(k-1)$ kallas med ekonomisk jargong för arbetarnas "marginalprodukt" när arbetsstyrkan uppgår till k man, och konkavitetsantagandet innebär därför att marginalprodukten avtar när man anställer fler arbetare.

Vi kan modellera fabriksägarens och arbetarnas gemensamma produktion som ett koalitionsspel med $n+1$ spelare, där vi låter fabriksägaren vara spelare 0 och arbetarna spelarna 1, 2, …, n. Värdet $v(S)$ för en godtycklig koalition S av arbetare och fabriksägare är lika med produktionsvärdet och ges av att

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \notin S, \\ f(|S|-1) & \text{om } 0 \in S. \end{cases}$$

Spelet är superadditivt, ty om S_1 och S_2 är två disjunkta koalitioner och fabriksägaren tillhör en av dem, S_1 säg, så är

$$v(S_1) + v(S_2) = f(|S_1| - 1) + 0 \le f(|S_1 \cup S_2| - 1) = v(S_1 \cup S_2),$$

beroende på att funktionen f är växande, medan

$$v(S_1) + v(S_2) = 0 + 0 = v(S_1 \cup S_2),$$

om fabriksägaren inte tillhör någon av de två koalitionerna.

Imputeringsmängden består av alla vektorer $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ med $x_i \ge 0$ för alla i och summa $\sum_{i=0}^{n} x_i = f(n)$. □

Nästa exempel handlar om olika omröstningsregler.

Exempel 10.3.3 En värdeenhet ska efter omröstning fördelas bland n personer. För att avgöra om en viss grupp S ska få dela på enheten inom sig kan vi tänka oss olika omröstningsregler.

Enkel majoritet: Koalitionen S förfogar över enheten om $|S| > n/2$. Detta är ett spel med $v(S) = 1$ om $|S| > n/2$ och $v(S) = 0$ om $|S| \le n/2$.

Enhällighet: Koalitionen S förfogar över enheten om och endast om S är storkoalitionen. Nu är förstås $v(N) = 1$, medan $v(S) = 0$ om $S \ne N$.

Diktatur: Det finns en diktator, spelare 1, som bestämmer. Koalitionen S får enheten om och endast om $1 \in S$. Detta betyder förstås att $v(S) = 1$ om och endast om $1 \in S$.

I majoritets- och enhällighetsfallen består imputeringsmängden av alla vektorer $x \in \mathbf{R}^n_+$ med $\sum_{i \in N} x_i = 1$. I diktatorsfallet består imputeringsmängden endast av punkten $(1, 0, \dots, 0)$. □

Spelen i exempel 10.3.3 är exempel på s. k. enkla spel.

Definition 10.3.1 Ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ kallas *enkelt* om det är superadditivt och värdefunktionen v bara antar värdena 0 och 1.

I ett enkelt spel kallas koalitioner S med $v(S) = 1$ *vinnande* och koalitioner S med $v(S) = 0$ *förlorande.*

Exempel 10.3.4 (Transformering av strategiska spel till koalitionsspel) Vi kan skapa ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ av ett strategiskt n-personersspel $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ genom att tillåta samarbete och definiera värdet $v(S)$ av samarbetet hos en grupp S av spelare som summan av de utdelningar som gruppmedlemmarna skulle få i spelet G om de agerade optimalt gentemot spelarna utanför gruppen i en mening som preciseras nedan.

För varje delmängd S av spelare, förutom $S = N$, sätter vi $\overline{S} = N \setminus S$ och betraktar följande tvåpersoners nollsummespel mellan radspelaren S och kolonnspelaren $\overline{S}$:

- Radspelarens handlingsmängd är produktmängden $\prod_{i \in S} A_i$ av handlingsmängderna för spelarna i S.
- Kolonnspelarens handlingsmängd är produkten $\prod_{i \in \overline{S}} A_i$ av handlingsmängderna för spelarna i $\overline{S}$.
- Om radspelaren väljer handlingen $(a_i)_{i \in S}$ och kolonnspelaren väljer handlingen $(a_i)_{i \in \overline{S}}$, så får radspelaren beloppet $\sum_{i \in S} u_i(a_1, \ldots, a_n)$ av kolonnspelaren, dvs. summan av de belopp som spelarna i S får av spelutfallet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i spelet G.

Detta nollsummespel har ett värde, som per definition är lika med radspelarens blandade säkerhetsnivå, och vi definierar nu S-koalitionens värde $v(S)$ som detta värde.

Värdet $v(S)$ är således lika med det totala förväntade värde som koalitionen S kan garanteras sig även om medlemmarna i $\overline{S}$ skulle gadda ihop sig och göra sitt bästa för att hålla detta värde så lågt som möjligt.

För storkoalitionen N definierar vi $v(N)$ som det maximala värdet av summan $\sum_{i \in N} u_i(a_1, \ldots, a_n)$ över alla $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$.

Det erhållna koalitionsspelet $\langle N, v \rangle$ är superadditivt, ty om S och T är två disjunkta koalitioner, s är en blandad strategi för S som garanterar koalitionen S utdelningen $v(S)$ och t är en blandad strategi för T som garanterar koalitionen T utdelningen $v(T)$, så garanterar den blandade produktstrategin $s \times t$ koalitionen $S \cup T$ utdelningen minst $v(S) + v(T)$. Kanske finns det någon blandad strategi som ger ännu större utdelning, men detta bevisar att $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Låt oss nu betrakta ett konkret exempel. Tabell 10.1 beskriver utbetalningarna i ett strategiskt trepersonersspel, där varje spelares handlingsmängd består av två element som kallats 1 och 2.

Vi ska bestämma värdefunktionen v i motsvarande koalitionsspel. Värdena $v(\{1\})$, $v(\{2\})$ och $v(\{3\})$ erhålls genom att i tur och ordning betrakta de tvåpersoners nollsummespel som fås genom att låta koalitionen $\{1\}$ spela mot koalitionen $\{2, 3\}$, koalitionen $\{2\}$ spela mot koalitionen $\{1, 3\}$, och koalitionen $\{3\}$ spela mot koalitionen $\{1, 2\}$. Spelmatriserna för dessa tre spel ser ut som följer.

		Spelare $\{2,3\}$			
		$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
Spelare $\{1\}$	1	0	1	2	1
	2	1	2	1	0

(a_1, a_2, a_3)	$u_1(a_1, a_2, a_3)$	$u_2(a_1, a_2, a_3)$	$u_3(a_1, a_2, a_3)$
$(1, 1, 1)$	0	3	3
$(1, 1, 2)$	1	1	4
$(1, 2, 1)$	2	2	2
$(1, 2, 2)$	1	2	1
$(2, 1, 1)$	1	2	3
$(2, 1, 2)$	2	2	1
$(2, 2, 1)$	1	1	2
$(2, 2, 2)$	0	3	3

Tabell 10.1. Utbetalningsfunktioner i ett strategiskt trepersonersspel.

		Spelare $\{1, 3\}$			
		$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
Spelare $\{2\}$	1	3	1	2	2
	2	2	2	1	3

		Spelare $\{1, 2\}$			
		$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
Spelare $\{3\}$	1	3	2	3	2
	2	4	1	1	3

I det första nollsummespelet ovan är kolonnerna nummer 2 och 3 strikt dominerade, och i det andra spelet är kolonnerna nummer 1 och 4 strikt dominerade. Spelen har därför samma värden som spelen med matriserna

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

dvs. 0.5 respektive 1.5. I det tredje spelet är matriselementet 2 i första raden och andra kolonnen en sadelpunkt, så spelets värde är 2. Detta innebär att

$$v(\{1\}) = 0.5, \;\; v(\{2\}) = 1.5, \;\; v(\{3\}) = 2.$$

Värdena $v(\{1, 2\})$, $v(\{1, 3\})$ och $v(\{2, 3\})$ fås genom att beräkna värdena för de tre nollsummespel där koalitionen $\{1, 2\}$ spelar mot $\{3\}$ med $v_1 + v_2$ som utbetalningsfunktion, $\{1, 3\}$ spelar mot $\{2\}$ med $v_1 + v_3$ som utbetalningsfunktion, och $\{2, 3\}$ spelar mot $\{1\}$ med $v_2 + v_3$ som utbetalningsfunktion. Detta ger oss följande tre spel:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & 1 & 2 \\
\{1,1\} & 3 & 2 \\
\{1,2\} & 4 & 3 \\
\{2,1\} & 3 & 4 \\
\{2,2\} & 2 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & 1 & 2 \\
\{1,1\} & 3 & 4 \\
\{1,2\} & 5 & 2 \\
\{2,1\} & 4 & 3 \\
\{2,2\} & 3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & 1 & 2 \\
\{1,1\} & 6 & 5 \\
\{1,2\} & 5 & 3 \\
\{2,1\} & 4 & 3 \\
\{2,2\} & 3 & 6
\end{array}$$

I det första av dessa spel är raderna 1 och 4 strikt dominerade, i det andra spelet är rad 4 svagt dominerad och rad 3 lika med halva summan av raderna 1 och 2, och i det sista spelet är raderna 2 och 3 strikt dominerade. Spelen har därför samma värden som spelen med matriserna

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

dvs. 3.5, 3.5 och 5.25.

I koalitionsspelet är således

$$v(\{1,2\}) = 3.5, \;\; v(\{1,3\}) = 3.5, \;\; v(\{2,3\}) = 5.25.$$

Storkoalitionens värde är lika med det maximala värdet hos $v_1 + v_2 + v_3$ som är 6 och antas för exempelvis $a = (1,1,1)$. Detta betyder att

$$v(\{1,2,3\}) = 6. \qquad \square$$

Övningar

10.5 Visa att i ett enkelt spel är varje delkoalition av en förlorande koalition förlorande och varje koalition som innehåller någon vinnande delkoalition vinnande.

10.6 Utbetalningsfunktionerna i ett strategiskt trepersonersspel ges av följande tabell. Transformera spelet till ett koalitionsspel.

(a_1, a_2, a_3)	$u_1(a_1, a_2, a_3)$	$u_2(a_1, a_2, a_3)$	$u_3(a_1, a_2, a_3)$
$(1,1,1)$	1	2	0
$(1,1,2)$	2	1	3
$(1,2,1)$	1	2	1
$(1,2,2)$	1	3	4
$(2,1,1)$	4	2	1
$(2,1,2)$	3	3	3
$(2,2,1)$	2	3	1
$(2,2,2)$	4	2	1

10.4 Kärnan

I ett strategiskt spel är Nashjämvikten stabil i den meningen att ingen spelare tjänar på att ensidigt byta handling. I koalitionsspel fyller den s. k. kärnan motsvarande funktion − en imputering tillhör kärnan om det inte lönar sig för någon grupp av spelare att lämna storkoalitionen och bilda en koalition som fördelar koalitionsvärdet bland sina medlemmar.

Definition 10.4.1 Låt $\Gamma = \langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med överförbar nytta. Spelets *kärna* $\mathcal{K}(\Gamma)$ består av alla imputeringar x med egenskapen att

$$x(S) = \sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

för alla koalitioner S.

Om en imputering x inte tillhör kärnan, så finns det alltså en koalition S sådan att $x(S) < v(S)$, och genom att för varje spelare i i koalitionen S öka x_i en smula, kan vi åstadkomma en vektor y med egenskapen att $y_i > x_i$ för alla $i \in S$ och $y(S) = v(S)$. Detta innebär att samtliga spelare i koalitionen S skulle tjäna på att lämna storkoalitionen och sedan inbördes dela på det som de kan åstadkomma på egen hand som koalition. En värdefördelning som inte tillhör kärnan kan därför inte vara stabil; det finns alltid någon koalition som är förfördelad och som har något att vinna på att bryta sig loss.

Sats 10.4.1 *Ett koalitionsspels kärna är en sluten konvex mängd.*

Bevis. Kärnan är lösningsmängden till ett system av linjära likheter och olikheter, nämligen likheten

$$\textstyle\sum_{i\in N} x_i = v(N)$$

och olikheterna

$$\textstyle\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

för alla koalitioner S. Detta innebär att kärnan är ett snitt av slutna halvrum i $\mathbf{R}^n$, dvs. en konvex polyeder. □

Sats 10.4.2 *Koalitionsspel med icke-tom kärna är kohesiva.*

Bevis. Antag att $\hat{x}$ tillhör kärnan i spelet $\Gamma = \langle N, v\rangle$. För varje partition $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ av spelarmängden N är då

$$v(S_1) + v(S_2) + \cdots + v(S_k) \leq \hat{x}(S_1) + \hat{x}(S_2) + \cdots + \hat{x}(S_k) = \hat{x}(N) = v(N),$$

vilket visar att spelet är kohesivt. □

Icke-kohesiva spel har följaktligen tom kärna, men även kohesiva spel kan ha tom kärna, som följande exempel visar.

Exempel 10.4.1 Trepersonersspelet med värdefunktion $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = a$ och $v(\{1,2,3\}) = 1$ är kohesivt om $0 \leq a \leq 1$ och har tom kärna om $a > \frac{2}{3}$.

Ett nödvändigt villkor för att en imputering (x_1, x_2, x_3) skall tillhöra kärnan är nämligen att $x_1 + x_2 \geq a$, $x_1 + x_3 \geq a$ och $x_2 + x_3 \geq a$. Genom att addera dessa villkor samt utnyttja att $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ får vi det nödvändiga villkoret $2 = x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + x_2 + x_3 \geq 3a$ för icke-tom kärna, dvs. $a \leq \frac{2}{3}$. □

Exempel 10.4.2 Vi ska bestämma kärnan för spelet om tavlan i exempel 10.3.1. Eftersom värdefunktionen är $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 2$ och $v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 3$, består kärnan av lösningarna till systemet

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_1 + x_3 \geq 3, \quad x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Om man använder den sista ekvationen för att eliminera $x_3 = 3 - x_1 - x_2$, så kan de övriga olikheterna skrivas

$$x_1 \geq 1, \;\; x_2 \geq 0, \;\; 3 - x_1 - x_2 \geq 0, \;\; x_1 + x_2 \geq 2, \;\; 3 - x_2 \geq 3, \;\; 3 - x_1 \geq 0.$$

Det följer nu efter förenkling att $x_2 = 0$ och $2 \leq x_1 \leq 3$. Kärnan består således av alla fördelningar som har formen $x = (t, 0, 3 - t)$, där $2 \leq t \leq 3$.

Person 1 bör således ge tavlan till person 3 mot att han som vederlag får t (tusen) kronor, där t är något tal mellan 2 och 3. Person 2 får inte någonting, men han spelar ändå en viktig roll. Det är tack vare honom som person 1 kan kräva att få minst 2 (tusen) kronor för tavlan. □

Exempel 10.4.3 Vi ska bestämma kärnan för produktionsmodellen i exempel 10.3.2: fabriksägaren (spelare 0), n arbetare (spelare $1, 2, \ldots, n$) och värdefunktionen

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \notin S, \\ f(|S| - 1) & \text{om } 0 \in S. \end{cases}$$

Funktionen f antas vara växande och konkav, och $f(0) = 0$.

Enligt definitionen tillhör en utbetalningsvektor $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kärnan om och endast om följande olikheter och likhet är uppfyllda för alla delmängder A av arbetarmängden $N = \{1, 2, \ldots, n\}$:

(i) $$\sum_{i \in A} x_i \geq 0$$

(ii) $$x_0 + \sum_{i \in A} x_i \geq f(|A|)$$

(iii) $$x_0 + \sum_{i \in N} x_i = f(|N|).$$

Olikheterna i (i) är uppfyllda om och endast om $x_i \geq 0$ för alla arbetare i, och genom att kombinera likheten (iii) med olikheten (ii) i det fall då

$A = N \setminus \{k\}$, dvs. då A består av alla arbetare utom en och följaktligen $|A| = n - 1$, får vi olikheten

$$f(n) = f(|N|) = x_k + x_0 + \sum_{i \in A} x_i \geq x_k + f(|A|) = x_k + f(n-1)$$

med slutsatsen att

$$\text{(iv)} \qquad 0 \leq x_k \leq f(n) - f(n-1) \qquad \text{för alla } k \in N.$$

Olikheterna i (iv) är därför ett nödvändigt villkor för att vektorn x ska tillhöra kärnan. Vi ska nu omvänt visa att (iv) i kombination med likheten (iii) också är ett tillräckligt villkor.

Antag därför att (iv) gäller och definiera x_0 med hjälp av (iii). Då är förstås villkoren (i) och (iii) uppfyllda, och villkoret (ii) gäller i fallet $A = N$, så det återstår bara att visa att (ii) också gäller för alla arbetarmängder A med $|A| \leq n - 1$.

Enligt förutsättningarna är funktionen f konkav; detta medför att

$$f(n) - f(n-1) \leq f(k) - f(k-1)$$

för alla $k \in N$. För varje heltal m i intervallet $[0, n-1]$ får vi därför följande olikhet:

$$(n-m)\big(f(n) - f(n-1)\big) \leq \sum_{k=m+1}^{n} \big(f(k) - f(k-1))\big) = f(n) - f(m).$$

Låt nu A vara en godtycklig äkta delmängd av arbetare så att $|A| \leq n-1$. Genom att utnyttja föregående olikhet med $m = |A|$ och antagandet att (iv) gäller får vi nu följande olikhet, som visar att (ii) gäller.

$$\begin{aligned} x_0 + \sum_{j \in A} x_j &= x_0 + \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus A} x_j = f(n) - \sum_{j \in N \setminus A} x_j \\ &\geq f(n) - \sum_{j \in N \setminus A} \big(f(n) - f(n-1)\big) \\ &= f(n) - (n - |A|)\big(f(n) - f(n-1)\big) \geq f(n) - \big(f(n) - f(|A|)\big) \\ &= f(|A|). \end{aligned}$$

Spelets kärna består således av alla imputeringar $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ som uppfyller $0 \leq x_k \leq f(n) - f(n-1)$ för samtliga arbetare k. Den nytta en arbetare får av en imputering i kärnan är med andra ord maximalt lika med marginalprodukten för den sist anställde arbetaren. □

Övningar

10.7 Bestäm kärnan i ett koalitionsspel $\langle\{1,2,3\},v\rangle$, där $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = -1$, $v(\{1,2\}) = 4$, $v(\{1,3\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,3\}) = 4$.

10.8 Visa att spelet i exempel 10.4.1 har icke-tom kärna om $0 \le a \le \frac{2}{3}$ och bestäm kärnan.

10.9 Visa att om imputeringen x tillhör ett koalitionsspels kärna och spelare i är en statist, så är $x_i = 0$.

10.10 Antag att x tillhör ett koalitionsspels kärna och att spelarna i och j är utbytbara. Visa att i så fall ligger också den imputering, som fås av x genom att låta x_i och x_j byta plats med varandra, i spelets kärna.

10.11 Bestäm kärnan i omröstningsspelen i exempel 10.3.3 i fallen

a) enkel majoritet b) enhällighet c) diktatoriska beslut.

10.12 En spelare i i ett enkelt spel $\langle N,v\rangle$ kallas en *vetospelare* om $v(N \setminus \{i\}) = 0$. Visa att ett enkelt spel har en icke-tom kärna om och endast om det finns åtminstone en vetospelare, och beskriv i detta fall kärnan.

10.13 Ett koalitionsspel med värdefunktion v kallas *symmetriskt* om värdet $v(S)$ bara beror av antalet medlemmar i koalitionen S, dvs. om $v(S) = f(|S|)$ för någon funktion f. (I ett symmetriskt spel är uppenbarligen varje spelare utbytbar mot varje annan spelare.)

a) I ett symmetriskt trepersonersspel är $f(1) = 0$, $f(2) = a$ och $f(3) = 3$. För vilka värden på a är kärnan icke-tom?

b) I ett symmetriskt fyrapersonersspel är $f(1) = 0$, $f(2) = a$, $f(3) = b$ och $f(4) = 4$. För vilka värden på a och b är kärnan icke-tom?

c) I ett symmetriskt n-personersspel är $f(n) = n$. För vilka värden på $f(k)$ är kärnan icke-tom?

10.14 I spelet $\langle N,v\rangle$ finns det två olika spelartyper, som bildar varsin delmängd P och Q av N, vilket innebär att $N = P \cup Q$ och $P \cap Q = \emptyset$. Spelets värdefunktionen definieras av att

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, |S \cap Q|\}.$$

(Spelet brukar gå under namnet *handskmarknaden* på grund av följande tolkning. Varje spelare i P äger en vänsterhandske och varje spelare i Q äger en högerhandske. Om j spelare i P och k spelare i Q går samman i en koalition, så förfogar koalitionen över $\min\{j,k\}$ handskpar som vart och ett är värda 1. Udda handskar saknar värde.)

Bestäm spelets kärna när

a) $|P| = |Q| = 2$ b) $|P| = 2$ och $|Q| = 3$ c) $|P|$ och $|Q|$ är godtyckliga.

10.5 Karakterisering av spel med icke-tom kärna

Kärnan i ett koalitionsspel är definierad som lösningsmängden till ett system av linjära olikheter. Problemet att lösa detta system kan formuleras om som ett linjärt minimeringsproblem, och genom att betrakta det duala maximeringsproblemet kan man härleda ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att kärnan ska vara icke-tom. Villkoret, ett slags konvexitetsvillkor, gavs och bevisades först av Olga Bondareva och senare, men oberoende av henne, av Lloyd Shapley, och för att kunna formulera det behöver vi en definition.

Definition 10.5.1 Låt som tidigare $\mathcal{C}$ beteckna mängden av alla koalitioner i koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$, och låt $\mathcal{C}(i)$ beteckna mängden av alla koalitioner som innehåller spelare i. En kollektion $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ av icke-negativa reella tal λ_S kallas en *balanserad viktsamling* om

$$(1) \qquad \sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \lambda_S = 1 \qquad \text{för alla spelare } i.$$

Koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ kallas *balanserat* om

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S \le v(N)$$

för alla balanserade viktsamlingar $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$.

Exempel 10.5.1 I ett spel med fyra spelare får vi en balanserad viktsamling genom att sätta $\lambda_{\{1,2\}} = \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{1,4\}} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{\{2,3,4\}} = \frac{2}{3}$ och $\lambda_S = 0$ för alla övriga koalitioner S. □

Exempel 10.5.2 Trepersonersspelet i exempel 10.4.1 med värdefunktion $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = a$ och $v(\{1,2,3\}) = 1$ är inte balanserat om $a > \frac{2}{3}$. För den balanserade viktsamlingen

$$\lambda_{\{1\}} = \lambda_{\{2\}} = \lambda_{\{3\}} = 0,\ \ \lambda_{\{1,2\}} = \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{2,3\}} = \tfrac{1}{2},\ \ \lambda_{\{1,2,3\}} = 0$$

är nämligen

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S = 3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a = \tfrac{3}{2}a > v(\{1,2,3\})$$

om $a > \frac{2}{3}$. □

Här följer en intuitiv tolkning av begreppet balanserat spel. Antag att spelarna i spelet $\langle N, v\rangle$ ska utföra vissa arbetsuppgifter. Om en koalition S av spelare arbetar med uppgifterna under λ_S tidsenheter erhålls utbetalningen $v(S)\lambda_S$. Varje enskild spelare har totalt 1 tidsenhet till förfogande, som han måste fördela på de olika koalitioner S som han ingår i. Detta är uppenbarligen möjligt för samtliga spelare om och endast om vikterna λ_S bildar en balanserad familj. Spelet är balanserat om det inte finns något sätt att fördela tiden som gör att koalitionerna tillsammans får en utbetalning $\sum v(S)\lambda_S$ som överskrider $v(N)$.

Vi övergår nu till att visa hur man kan avgöra om ett spel är balanserat och om kärnan är icke-tom genom att lösa två duala linjärprogrammeringsproblem. Låt $\langle N, v\rangle$ vara ett godtyckligt koalitionsspel, och låt Λ beteckna mängden av alla balanserade viktsamlingar. För den speciella balanserade viktsamling som fås genom att sätta $\lambda_S = 0$ för alla koalitioner S utom storkoalitionen och $\lambda_N = 1$, är $\sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S = v(N)$. Definition 10.5.1 innebär därför att koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ är balanserat om och endast om maximeringsproblemet

$$\text{Maximera } \sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S \text{ då } (\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}} \in \Lambda \tag{2}$$

har $v(N)$ som sitt maximala värde.

Notera att maximeringsproblemet (2) är ett linjärt programmeringsproblem eftersom målfunktionen $\sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S$ är linjär i variablerna λ_S och Λ är lösningsmängden till det linjära system av likheter och olikheter som består av de n stycken linjära ekvationerna (1) och de $2^n - 1$ stycken linjära olikheterna $\lambda_S \geq 0$.

Vi kan skriva maximeringsproblemet på matrisform genom att numrera spelets koalitioner som $S_1, S_2, \dots, S_{2^n-1}$, låta λ och $\mathbf{v}$ vara kolonnmatriserna av dimension $2^n - 1$ med λ_{S_i} resp. $v(S_i)$ som element på plats i, låta $\mathbf{1}$ vara kolonnmatrisen av dimension n bestående av idel ettor, sätta

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i \in S_j \\ 0 & \text{om } i \notin S_j, \end{cases}$$

och definiera $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ som matrisen av typ $n \times (2^n - 1)$ med a_{ij} som element på plats (i, j). Med dessa matriser och ^{t} som transponering är

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} v(S)\lambda_S = \mathbf{v}^t\lambda$$

och

$$\sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \lambda_S = \sum_{j=1}^{2^n-1} a_{ij}\lambda_{S_j},$$

vilket betyder att ekvationssystemet (1) kan skrivas på formen

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{1}.$$

Maximeringsproblemet (2) får därigenom den kanoniska formen

$$\text{Maximera } \mathbf{v}^t\lambda \text{ då } \begin{cases} \mathbf{A}\lambda = \mathbf{1} \\ \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{2'}$$

Exempel 10.5.3 För ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ med tre spelare och koalitionerna numrerade som $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{1, 2\}$, $S_5 = \{1, 3\}$, $S_6 = \{2, 3\}$, $S_7 = \{1, 2, 3\}$ blir $\mathbf{A}$ matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spelet är balanserat om och endast om maximeringsproblemets optimala värde är lika med $v(S_7)$. $\square$

Vi kan alltså avgöra om ett spel är balanserat eller ej genom att lösa det linjära programmeringsproblemet $(2')$. Vi kan också avgöra om spelet har en icke-tom kärna och om så är fallet bestämma kärnan genom att lösa ett annat linjärt programmeringsproblem. Kärnan består av alla vektorer i mängden

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x(S) \geq v(S) \text{ för alla } S \in \mathcal{C}\}$$

som också satisfierar det kollektiva rationalitetsvillkoret

$$x(N) = v(N).$$

Mängden X är förstås inte tom eftersom den innehåller alla vektorer $x \in \mathbf{R}^n$ vars samtliga koordinater är tillräckligt stora. Om kärnan är tom, så beror det därför på att $x(N) > v(N)$ för alla vektorer $x \in X$.

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för icke-tom kärna är med andra ord att det minsta värde som $x(N)$ antar när x varierar över mängden X är lika med $v(N)$. Vi kan därför avgöra om kärnan är tom eller ej genom att studera minimeringsproblemet

(3) $$\text{Minimera } x(N) \text{ då } x \in X.$$

Om problemets minimivärde är större än $v(N)$ är kärnan tom, och om minimivärdet är lika med $v(N)$ är kärnan lika med mängden av alla minimipunkter.

Minimeringsproblemet är ett linjärt programmeringsproblem, eftersom målfunktionen

$$x(N) = \sum_{i \in N} x_i = \mathbf{1}^t x$$

är linjär och definitionsmängden X består av alla lösningar till det linjära systemet

$$x(S_j) = \sum_{i \in S_j} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq v(S_j), \quad j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1,$$

som på matrisform kan skrivas

$$\mathbf{A}^t x \geq \mathbf{v}.$$

På matrisform får därför minimeringsproblemet (3) formen

$(3')$ $$\begin{aligned} &\text{Minimera } \mathbf{1}^t x \text{ då} \\ &\mathbf{A}^t x \geq \mathbf{v} \end{aligned}$$

Optimeringsproblemen ($2'$) och ($3'$) är exempel på *duala* linjärprogrammeringsproblem, och enligt en viktig sats inom teorin för linjär programmering, *dualitetssatsen*, har duala optimeringsproblem med tillåtna punkter samma optimala värde. I föreliggande fall är således maximivärdet för maximeringsproblemet ($2'$) lika med $v(N)$ om och endast minimeringsproblemet ($3'$) har $v(N)$ som minimivärde. Därmed har vi bevisat följande sats.

Sats 10.5.1 (Bondareva–Shapleys sats) *Ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ har en icke-tom kärna om och endast om det är balanserat.*

Robert Aumann har givit ett alternativt bevis för Bondareva–Shapleys sats, som vi nu ska beskriva, genom att utnyttja ett intressant samband mellan kärnan i ett koalitionsspel och Nashjämvikterna i ett till koalitionsspelet associerat nollsummespel.

Låt oss börja med att konstatera att det inte är någon inskränkning att anta att värdefunktionen i de koalitionsspel som vi studerar är positiv, dvs. att $v(S) > 0$ för alla koalitioner S. Detta följer av följande enkla lemma.

Lemma 10.5.2 *Låt $\langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel, låt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vara en vektor i $\mathbf{R}^n$, och definiera en ny värdefunktion w genom att sätta*

$$w(S) = v(S) + a(S)$$

för alla koalitioner S. Då gäller:

(i) x är en imputering i koalitionsspelet $\langle N, w\rangle$ om och endast om $x - a$ är en imputering i koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$;

(ii) x ligger i kärnan till $\langle N, w\rangle$ om och endast om $x - a$ ligger i kärnan till $\langle N, v\rangle$;

(iii) Spelet $\langle N, w\rangle$ balanserat om och endast om spelet $\langle N, v\rangle$ är balanserat.

Bevis. Påståendena (i) och (ii) är triviala.

(iii) För balanserade viktsamlingar $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ är

$$\begin{aligned}\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S w(S) &= \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \Big(v(S) + \sum_{i\in S} a_i\Big) = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) + \sum_{S\in\mathcal{C}}\sum_{i\in S} \lambda_S a_i \\ &= \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) + \sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \lambda_S a_i = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) + \sum_{i\in N} a_i \sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \lambda_S \\ &= \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) + \sum_{i\in N} a_i = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) + a(N),\end{aligned}$$

vilket ger att $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) \le v(N)$ om och endast om $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S w(S) \le v(N) + a(N) = w(N)$, och bevisar påstående (iii). □

Värdefunktionen w i i lemma 10.5.2 är positiv om talen a_i är tillräckligt stora positiva tal, så för att bevisa Bondareva–Shapleys sats räcker det på grund av lemmat att göra detta för koalitionsspel med positiv värdefunktion.

Antag därför att $\langle N, v\rangle$ är ett godtyckligt koalitionsspel med positiv värdefunktion v, och låt $G(N, v)$ beteckna det tvåpersoners nollsummespel i vilket N är radspelarens handlingsmängd, mängden $\mathcal{C}$ av alla koalitioner är kolonnspelarens handlingsmängd, och utbetalningen a_{iS} till radspelaren, om denne väljer alternativet $i \in N$ och kolonnspelaren väljer alternativet $S \in \mathcal{C}$, ges av att

$$a_{iS} = \begin{cases} v(N)/v(S) & \text{om } i \in S, \\ 0 & \text{om } i \notin S. \end{cases}$$

Lemma 10.5.3 *För värdet v^* av nollsummespelet $G(N, v)$ gäller följande:*

(i) $0 < v^* \leq 1$.

(ii) Koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ är balanserat om och endast om $v^* = 1$.

Bevis. (i) Den blandade strategin $\bar{x} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ ger radspelaren en förväntad utbetalning $U(\bar{x}, S)$ som är positiv, oavsett vilket handlingsalternativ S som kolonnspelaren väljer, ty

$$U(\bar{x}, S) = \sum_{i\in N} a_{iS}\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i\in S}\frac{v(N)}{v(S)} = \frac{|S|v(N)}{nv(S)} > 0.$$

Det följer att nollsummespelets värde v^*, som är lika med radspelarens blandade säkerhetsnivå, är positivt.

Kolonnspelaren kan å andra sidan hindra radspelaren från att få en högre förväntad utbetalning än 1 genom att välja handlingen N, ty eftersom $a_{iN} = 1$ för alla i, är radspelarens förväntade utbetalning $U(x, N)$ lika med 1 för alla blandade strategier x, vilket medför att $v^* \leq 1$.

(ii) Antag att koalitionsspelet är balanserat, och låt $y = (y_S)_{S\in\mathcal{C}}$ vara en optimal strategi för kolonnspelaren i nollsummespelet. Då är den förväntade utbetalningen till radspelaren högst lika med v^* oavsett vilken ren strategi i som radspelaren väljer, vilket betyder att

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} a_{iS}y_S = \sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \frac{v(N)y_S}{v(S)} \leq v^*,$$

dvs.

$$\sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \frac{v(N)y_S}{v(S)v^*} \leq 1 \qquad \text{för alla } i.$$

Definiera nu vikterna $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ genom att sätta

$$\lambda_S = \begin{cases} \dfrac{v(N)y_S}{v(S)v^*} & \text{om } S \text{ består av fler än en spelare,} \\ 1 - \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{C}(i)\setminus\{i\}} \frac{v(N)y_S}{v(S)v^*} & \text{om } S = \{i\},\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Viktsamlingen $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ är balanserad, och för koalitionerna $\{i\}$ med bara en medlem gäller att

$$\lambda_{\{i\}} \geq \frac{v(N)y_{\{i\}}}{v(\{i\})v^*}.$$

Eftersom koalitionsspelet är balanserat, är därför

$$v(N) \geq \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) \geq \sum_{S\in\mathcal{C}} \frac{v(N)y_S}{v(S)v^*} v(S) = \frac{v(N)}{v^*} \sum_{S\in\mathcal{C}} y_S = \frac{v(N)}{v^*},$$

vilket ger olikheten $v^* \geq 1$, och det följer nu av del (i) av lemmat att $v^* = 1$.

För att bevisa omvändningen antar vi att koalitionsspelet inte är balanserat, dvs. att det finns en balanserad viktsamling $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ sådan att

$$A = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S v(S) > v(N),$$

och ska visa att detta medför att $v^* < 1$.

Sätt $y_S = \lambda_S v(S)/A$. Då är $y_S \geq 0$ för alla $S \in \mathcal{C}$ och $\sum_{S\in\mathcal{C}} y_S = 1$, så $y = (y_S)_{S\in\mathcal{C}}$ är en blandad strategi för kolonnspelaren, och för den strategin är den förväntade utbetalningen $U(i,y)$ till radspelaren, givet att denne väljer handlingsalternativet i,

$$U(i,y) = \sum_{S\in\mathcal{C}} a_{iS}y_S = \sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \frac{v(N)}{v(S)}\frac{v(S)}{A}\lambda_S = \frac{v(N)}{A} \sum_{S\in\mathcal{C}(i)} \lambda_S = \frac{v(N)}{A}$$

för varje $i \in N$. För spelets värde gäller därför att $v^* \leq v(N)/A < 1$. □

Vi får nu följande samband mellan kärnan i koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ och Nashjämvikterna i nollsummespelet $G(N,v)$.

Sats 10.5.4 *Låt $\langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med positiv värdefunktion v och låt x vara en vektor i $\mathbf{R}^n$. Då är följande två påståenden ekvivalenta:*

(i) x tillhör koalitionsspelets kärna.

(ii) Koalitionsspelet är balanserat och $v(N)^{-1}x$ är en optimal blandad strategi för radspelaren i nollsummespelet $G(N,v)$.

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Antag att $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ligger i kärnan. Då är $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ för alla koalitioner S med likhet för $S = N$, och det följer att $z = v(N)^{-1}x$ är en blandad strategi för radspelaren i nollsummespelet som uppfyller

$$\sum_{i=1}^{n} a_{iS}z_i = \sum_{i\in S} \frac{v(N)}{v(S)}\frac{x_i}{v(N)} = \frac{1}{v(S)}\sum_{i\in S} x_i \geq 1$$

för alla koalitioner S. Strategin z ger med andra ord radspelaren en förväntad betalning som, oberoende av kolonnspelarens val av handling, är större än eller lika med 1, vilket innebär att nollsummespelets värde v^* är större än eller lika med 1. Lemma 10.5.3 medför nu att $v^* = 1$ och att koalitionsspelet är balanserat. Slutligen är strategin z optimal eftersom $v^* = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Antag att koalitionsspelet är balanserat, och att $z = v(N)^{-1}x$ är en optimal strategi för radspelaren. Nollsummespelets värde är enligt föregående lemma lika med 1, och detta medför att

$$\frac{1}{v(S)}\sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\in S}\frac{v(N)}{v(S)} z_i = \sum_{i\in N} a_{iS} z_i \geq 1$$

för alla koalitioner S. Således är $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ för alla S, vilket visar att imputeringen x ligger i koalitionsspelets kärna. □

Eftersom det finns optimala blandade strategier i varje nollsummespel, följer det nu omedelbart av sats 10.5.4 (och lemma 10.5.2) att ett koalitionsspel har icke-tom kärna om och endast om det är balanserat.

Övning

10.15 Visa att koalitionsspelet $\langle\{1,2,3,4\}, v\rangle$ med värdena $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 3$, $v(\{1,2,3,4\}) = 4$ och $v(S) = 0$ för alla andra koalitioner S, är obalanserat och följaktligen har tom kärna,

10.16 Ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ är konvext om $v(S\cup T) + v(S\cap T) \geq v(S) + v(T)$ för alla koalitioner S och T. (Se övning 10.2.) Visa att kärnan i ett konvext spel med n spelare är icke-tom genom att visa att utbetalningsvektorn $x = (\Delta_1(S_1), \Delta_2(S_2), \dots, \Delta_n(S_n))$, där S_i är koalitionen $\{1, 2, \dots, i\}$, ligger i kärnan.

[Ledning: Visa att om $T = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ är en godtycklig koalition bestående av k medlemmar i växande nummerordning, så är $x_{i_k} \geq v(T) - v(T\setminus\{i_k\})$. Härav följer genom upprepning att $x(T) = x_{i_k} + x_{i_{k-1}} + \cdots + x_{i_1} \geq v(T)$.]

10.6 Nukleolen

Kärnan i ett koalitionsspel kan, som vi har sett exempel på, vara tom. Den kan å andra sidan också vara stor och lika med hela imputeringsmängden. Kärnan ger därför sällan någon entydig lösning på problemet att fördela storkoalitionens värde på spelarna. I det här avsnittet ska vi introducera en unik lösning för alla spel med icke-tom imputeringsmängd, den s. k. *nukleolen*.

Nukleollösningen är en imputering som i en precis mening minimerar de invändningar som koalitionerna kan tänkas ha mot olika möjliga sätt att fördela storkoalitionens värdetillgång. För att kunna kvantifiera koalitionernas invändningar behöver vi därför först följande definition.

Definition 10.6.1 Låt $\langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med n spelare, och definiera för varje koalition S en funktion $e_S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ genom att för $x \in \mathbf{R}^n$ sätta

$$e_S(x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i\in S} x_i.$$

När x är en imputering, kallar vi $e_S(x)$ för S-koalitionens *överskott* av imputeringen.

Överskottet $e_S(x)$ är förstås vad som blir över av koalitionen S:s värde när alla spelarna i koalitionen fått sitt, och detta överskott kan tolkas som ett mått på koalitionens missnöje eller invändning mot imputeringen x. Ju större överskott desto större anledning har uppenbarligen koalitionen att motsätta sig imputeringen. Det ligger därför i koalitionernas intresse att försöka minimera överskotten. Problemet är förstås att när en koalitions överskott minskas så ökar överskottet för någon annan koalition. Vi måste därför definiera hur överskotten ska minimeras.

Storkoalitionens överskott av en imputering är alltid noll på grund av kravet att imputeringar ska vara kollektivt rationella, så när vi fortsättningsvis betraktar de olika koalitionernas överskott och skall minimera dessa, behöver vi inte bry oss om storkoalitionen.

Notera också att en imputering x tillhör kärnan om och endast om varje koalition S:s överskott $e_S(x)$ är mindre än eller lika med noll.

Exempel 10.6.1 Vi ska studera ett koalitionsspel med tre spelare och inför därför följande beteckningar för spelets sju koalitioner: $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{1, 2\}$, $S_5 = \{1, 3\}$, $S_6 = \{2, 3\}$, $S_7 = \{1, 2, 3\}$.

Värdefunktionen i koalitionsspelet definieras av att $v(S_1) = v(S_2) = 0$, $v(S_3) = 3$, $v(S_4) = 6$, $v(S_5) = 9$, $v(S_6) = v(S_7) = 12$.

Koalitionernas överskott av en imputering x ges av följande uttryck:

$$e_{S_1}(x) = -x_1,\ \ e_{S_2}(x) = -x_2,\ \ e_{S_3}(x) = 3 - x_3,\ \ e_{S_4}(x) = 6 - x_1 - x_2,$$
$$e_{S_5}(x) = 9 - x_1 - x_3,\ \ e_{S_6}(x) = 12 - x_2 - x_3.$$

Vi ska nu beräkna dessa överskott för några specifika imputeringar. För $y = (3, 3, 6)$ får vi tabellen:

Koalition S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Överskott $e_S(y)$	-3	-3	-3	0	0	3

Här är det koalitionen S_6 som har störst anledning att vara missnöjd eftersom den har störst överskott. Låt oss därför öka på tilldelningen till spelare 3 på bekostnad av spelare 1 och undersöka överskotten för imputeringen $z = (2, 3, 7)$:

Koalition S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Överskott $e_S(z)$	-2	-3	-4	1	0	2

Nu blev det bättre, men koalitionen S_6 har fortfarande anledning att vara missnöjd med utdelningsförslaget eftersom dess överskott är störst. Låt oss vara drastiska och flytta över spelare 1:s två enheter till spelare 2, vilket ger oss imputeringen $v = (0, 5, 7)$. Överskottstabellen får nu följande utseende:

Koalition S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Överskott $e_S(v)$	0	-5	-4	1	2	0

Nu kan koalitionen S_6 vara nöjd, men istället kan koalitionen S_5 resa lika stora invändningar mot utdelningsförslaget v som S_6 mot z.

Kan vi jämföra de båda imputeringarna z och v? Vilken är bäst? Båda är tydligen lika dåliga för de koalitioner som får störst överskott, S_6 respektive S_5. Båda är också lika dåliga för koalitionerna med det näst största överskottet, i båda fallen S_4, och för koalitionerna med det tredje största överskottet, S_5 resp. S_1 eller S_6. Men z är bättre än v för koalitionen med det fjärde största överskottet i respektive fall. Imputeringen z ger nämligen S_1 på fjärde plats överskottet -2, medan v ger S_6 (på delad fjärde plats) överskottet 0. På den grunden dömer vi till z:s fördel, och anser följaktligen att z är en bättre (rättvisare) imputering än v.

Vi prövar nu med att flytta tillbaka en enhet från spelare 2 till spelare 1, vilket ger oss imputeringen $w = (1, 4, 7)$ med följande överskott:

Koalition S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Överskott $e_S(w)$	-1	-4	-4	1	1	1

Nu är det maximala överskottet 1, och det antas av koalitionerna S_4, S_5 och S_6. Kan vi göra det maximala överskottet ännu mindre? Nej, enda sättet att minska det överskott som $w = (w_1, w_2, w_3)$ ger koalitionen S_4, är att öka $w_1 + w_2$ och då måste $w_1 + w_3$ eller $w_2 + w_3$ minska, vilket gör att överskotten för S_5 eller S_6 ökar. Givet att överskotten är 1 för koalitionerna S_4, S_5 och S_6 kan vi heller inte förbättra situationen för någon av de övriga koalitionerna, eftersom ekvationerna $e_{S_4}(w) = e_{S_5}(w) = e_{S_6}(w) = 1$ bestämmer w entydigt.

Den imputering som vi kommit fram till, $w = (1, 4, 7)$, minimerar i någon mening koalitionernas missnöje, och utgör spelets nukleol. □

Vi kommer att jämföra överskottsvektorerna $(e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))$ i koalitionsspel med n spelare med hjälp av den *lexikografiska ordningen* $<_l$ på $\mathbf{R}^p$, där $p = 2^n - 2$. Vi påminner då om att enligt den lexikografiska ordningen är

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) <_l (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$$

om det finns ett index $k \le p$ så att $\alpha_i = \beta_i$ för alla $i < k$ och $\alpha_k < \beta_k$.

En vektor α är med andra ord lexikografiskt mindre än vektorn β om $\alpha_k < \beta_k$ för det första koordinatindexet k där vektorernas koordinater är olika. Exempelvis gäller i $\mathbf{R}^3$ att $(1, 5, 6) <_l (2, 1, 4) <_l (2, 2, 1) <_l (2, 2, 2)$.

Vi skriver $\alpha \le_l \beta$ för att ange att $\alpha <_l \beta$ eller $\alpha = \beta$.

Vi behöver också använda oss av den avtagande omordningen av en vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$; med den *avtagande omordningen* α^* av vektorn α menas den vektor $\alpha^* = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p})$ som fås genom att skriva koordinaterna $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ i avtagande ordning, dvs. $\alpha_{i_1} \geq \alpha_{i_2} \geq \cdots \geq \alpha_{i_p}$.

Exempelvis är $(4, 8, 3, 9)^* = (9, 8, 4, 3)$.

Definition 10.6.2 Låt $\Gamma = \langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med n spelare, och låt $(S_j)_{j=1}^p$ vara spelets $p = 2^n - 2$ koalitioner förutom storkoalitionen, uppräknade i någon godtycklig ordning. Vi definierar ordningsrelationen $\prec$ på imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ genom villkoret

$$x \prec y \ \Leftrightarrow\ (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))^* <_l (e_{S_1}(y), e_{S_2}(y), \dots, e_{S_p}(y))^*.$$

Vi skriver vidare $x \preceq y$ om $x \prec y$ eller $x = y$, vilket innebär att

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow\ (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))^* \leq_l (e_{S_1}(y), e_{S_2}(y), \dots, e_{S_p}(y))^*.$$

Att $x \prec y$ betyder med andra ord att koalitionernas överskott, då de ordnas i avtagande ordning, är lexikografiskt mindre för imputeringen x än för imputeringen y.

Definition 10.6.3 Med *nukleolen* $\mathcal{N}(\Gamma)$ till ett koalitionsspel Γ menas mängden av alla imputeringar i imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ som är minimala med avseende på ordningen $\preceq$, dvs.

$$\mathcal{N}(\Gamma) = \{x \in \mathcal{I}(\Gamma) \mid x \preceq y \ \text{ för alla } y \in \mathcal{I}(\Gamma)\}.$$

Definitionen innebär att en imputering i nukleolen

- bland alla imputeringar har det minsta största koalitionsöverskottet,
- bland alla imputeringar med samma minsta största koalitionsöverskott har det minsta näst största koalitionsöverskottet,
- bland alla imputeringar med samma minsta största koalitionsöverskott och samma minsta näst största koalitionsöverskott har det minsta tredje största koalitionsöverskottet,
- osv.

För att beräkna nukleolen behöver vi alltså lösa en serie minimeringsproblem.

Exempel 10.6.2 Vi återvänder till exempel 10.6.1, där vi beräknade överskottsvektorerna för imputeringarna $y = (3, 3, 6)$, $z = (2, 3, 7)$, $v = (0, 5, 7)$ och $w = (1, 4, 7)$. För de avtagande omordningarna $e(x)^*$ av överskottsvektorerna $e(x) = (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_6}(x))$ gäller:

$$e(y)^* = (3, 0, 0, -3, -3, -3), \quad e(z)^* = (2, 1, 0, -2, -3, -4),$$
$$e(v)^* = (2, 1, 0, 0, -4, -5), \quad e(w)^* = (1, 1, 1, -1, -4, -4).$$

Vi ser att $e(w)^* <_l e(z)^* <_l e(v)^* <_l e(y)^*$, vilket för imputeringarnas del betyder att $w \prec z \prec v \prec y$. I exempel 10.6.1 visade vi också att w är det unika minimala elementet med avseende på $\prec$, vilket innebär att spelets nukleol är lika med $\{w\}$. $\square$

En nödvändig förutsättning för att det ska finnas någon nukleollösning är förstås att imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ inte är tom. Denna förutsättning är också tillräcklig, och vi har följande sats.

Sats 10.6.1 *Alla koalitionsspel med icke-tom imputeringsmängd har en unik nukleol som består av en enda imputering.*

Beviset för satsen bygger på följande lemma.

Lemma 10.6.2 *Antag att funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_p$ är konvexa och definierade på någon konvex mängd X, och definiera funktionen g på X genom att sätta*

$$g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\}.$$

Antag vidare att funktionen g har ett minimivärde m, och låt M beteckna mängden av alla minimipunkter till g. Då finns det ett index i med egenskapen att $f_i(x) = m$ för alla $x \in M$.

Bevis. Vi noterar först att

$$M = \{x \in X \mid f_i(x) \le m \text{ för alla index } i \text{ och } f_i(x) = m \text{ för något index } i\}.$$

Låt nu x_0 vara en minimipunkt till g med egenskapen att av alla minimipunkter är $f_i(x_0) = m$ för så få index i som möjligt. Låt detta antal vara k, och antag utan inskränkning att $f_i(x_0) = m$ för $i = 1, 2, \dots, k$ och att följaktligen $f_i(x_0) < m$ för $i = k+1, \dots, p$. Vi ska visa att detta medför att $f_i(x) = m$ för $i = 1, 2, \dots, k$ i alla minimipunkterna x till funktionen g. Detta bevisar förstås lemmat.

Så låt för den skull x vara en godtycklig punkt i M, vilket då medför att $f_i(x) \le m$ för alla index i. Antag att strikt olikhet råder för något index $i \le k$, t.ex. att $f_k(x) < m$. Vi ska visa att detta leder till en motsägelse.

Betrakta för den skull punkten $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0$, som ligger i mängden X eftersom den är konvex. Eftersom funktionerna f_i är konvexa är vidare

$$f_i(y) \le \tfrac{1}{2}f_i(x) + \tfrac{1}{2}f_i(x_0) \le \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}m = m$$

för alla index i, och

$$f_i(y) \le \tfrac{1}{2}f_i(x) + \tfrac{1}{2}f_i(x_0) < \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}m = m,$$

för alla index $i \ge k$ beroende på att $f_i(x_0) < m$ för $i > k$ och $f_k(x) < m$. Punkten y är därför en minimipunkt till g, och antalet index i med $f_i(y) = m$ är färre än k, vilket strider mot vårt minimalitetsantagande. Därmed är beviset klart. $\square$

Bevis för sats 10.6.1. Låt $\Gamma = \langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med n spelare och icke-tom imputeringsmängd $\mathcal{I}(\Gamma)$, som då är en kompakt konvex mängd, närmare bestämt en kompakt polyeder i $\mathbf{R}^n$. Vi ska visa att spelet har en unik nukleol som består av en imputering genom att beskriva en algoritm som beräknar nukleolen.

Låt för den skull $S_1, S_2, \dots, S_p$ vara en uppräkning av samtliga koalitioner förutom storkoalitionen, och definiera funktionen g_1 på imputeringsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ genom att sätta

$$g_1(x) = \max\{e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x)\},$$

där $e_{S_1}, e_{S_2}, \dots, e_{S_p}$ är de affina överskottsfunktionerna. Funktionen g_1 är kontinuerlig och har därför säkert ett minimivärde m_1, eftersom definitionsmängden $\mathcal{I}(\Gamma)$ är en kompakt mängd. Mängden M_1 av alla minimipunkter till g_1 är kompakt och konvex, ty den kan skrivas som ett snitt mellan imputeringsmängden och slutna halvrum på följande sätt:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathcal{I}(\Gamma) \mid g_1(x) \le m_1\} \\ &= \mathcal{I}(\Gamma) \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid e_{S_1}(x) \le m_1\} \cap \dots \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid e_{S_p}(x) \le m_1\}. \end{aligned}$$

Det följer direkt av definitionen av mängden M_1 att den största koordinaten hos överskottsvektorn $e(x) = (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))$ är större för imputeringar x utanför mängden M_1 än för imputeringar x som tillhör M_1. För ordningsrelationen $\prec$ på imputeringsmängden gäller därför implikationen

$$y \in M_1 \ \&\ x \in \mathcal{I}(\Gamma) \setminus M_1 \ \Rightarrow\ y \prec x.$$

Alla förutsättningarna i lemma 10.6.2 är uppfyllda med $f_i = e_{S_i}$, $X = \mathcal{I}(\Gamma)$, $g = g_1$, $m = m_1$ och $M = M_1$, så det följer att det finns minst ett index i sådant att $e_{S_i}(x) = m_1$ för alla $x \in M_1$, och vi kan utan inskränkning anta att koalitionerna är numrerade så att detta gäller för $i = 1$.

På hela M_1 är med andra ord överskottsfunktionen e_{S_1} störst bland alla överskottsfunktionerna, så problemet att minimera den näst största överskottsfunktionen, när den största överskottsfunktionen är så liten som möjligt, är ekvivalent med problemet att minimera funktionen

$$g_2(x) = \max\{e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x)\}$$

över mängden M_1.

Även för detta minimeringsproblem är förutsättningarna i lemma 10.6.2 uppfyllda. Om m_2 betecknar minimivärdet och M_2 betecknar mängden av minimipunkter, finns det därför ett index i, som vi efter eventuell omnumrering av koalitionerna kan anta är $i = 2$, så att $e_{S_2}(x) = m_2$ för alla $x \in M_2$. Mängden M_2 är vidare en sluten konvex delmängd av M_1, och definitionen av minimum och av ordningsrelationen $\prec$ ger oss implikationen

$$y \in M_2 \ \&\ x \in M_1 \setminus M_2 \ \Rightarrow\ y \prec x.$$

Genom att upprepa proceduren $p = 2^{n-2} - 2$ gånger får vi efter omnumrering av koalitionerna en följd av minimeringproblem, tal $m_1, m_2, \dots, m_p$ och mängder $M_0, M_1, M_2, \dots, M_p$, där $M_0 = \mathcal{I}(\Gamma)$, med följande egenskaper för $k = 1, 2, \dots, p$:

1. m_k är minimivärdet och M_k är mängden av minimipunkter till restriktionen av funktionen $g_k(x) = \max\{e_{S_k}(x), e_{S_{k+1}}(x), \dots, e_{S_p}(x)\}$ till mängden M_{k-1}.
2. $M_k \subseteq \{x \mid e_{S_k}(x) = m_k\}$
3. $M_k \subseteq M_{k-1}$
4. $y \in M_k \ \&\ x \in M_{k-1} \setminus M_k \ \Rightarrow y \prec x$

Det följer nu av egenskaperna 2 och 3 att den sista minimimängden M_p bara består av en enda imputering. Eftersom $M_p \subseteq M_k$ för alla k, är nämligen $e_{S_k}(x) = m_k$ för alla k och alla $x \in M_p$, och genom att speciellt betrakta de koalitioner $S_{k_i} = \{i\}$ som bara består av en spelare i, drar vi slutsatsen att imputeringarna x i M_p löser ekvationerna

$$e_{\{i\}}(x) = v(\{i\}) - x_i = m_{k_i}$$

för $i = 1, 2, \dots, n$, och detta bestämmer uppenbarligen x entydigt.

Återstår nu endast att visa att M_p är spelets nukleol. Sätt för den skull $M_p = \{\hat{x}\}$ och låt x vara en godtycklig imputering skild från $\hat{x}$. Det följer av egenskapen 3 att det finns ett index k så att x ligger i differensmängden $M_{k-1} \setminus M_k$, och $\hat{x}$ tillhör M_k. Enligt egenskap 4 är därför $\hat{x} \prec x$, och detta visar att $\hat{x}$ är det entydigt bestämda minimala elementet till ordningsrelationen $\prec$. Därmed är satsen bevisad. $\square$

Anmärkning 1. Problemen att minimera funktionerna $g_k(x)$ över mängderna M_{k-1} kan formuleras som linjärprogrammeringsproblem, och för sådana problem finns det effektiva lösningsalgoritmer, t. ex. simplexalgoritmen.

Anmärkning 2. I de genererade sviterna $m_1, m_2, \dots, m_p$ och $M_1, M_2, \dots, M_p$ av minimivärden och minimimängder till funktionerna $g_1, g_2, \dots, g_p$ är två successiva minimimängder M_k och M_{k+1} antingen lika eller också är dimensionen hos mängden M_{k+1} ett mindre än dimensionen hos mängden M_k. Det förstnämnda fallet inträffar om minst två överskottsfunktioner e_{S_k} och $e_{S_{k+1}}$ är konstant lika med m_k på M_k, och då behöver vi inte genomföra någon extra minimering för att bestämma m_{k+1} och M_{k+1}, utan $m_{k+1} = m_k$ och $M_{k+1} = M_k$. Antalet nödvändiga minimeringar för att bestämma nukleollösningen, som är en punkt av dimension noll, med start från imputeringsmängden M_0, som har dimension $n - 1$, är därför $n - 1$.

Nästa exempel illustrerar hur man kan beräkna nukleolen genom att lösa en serie linjärprogrammeringsproblem.

Exempel 10.6.3 Vi ska bestämma nukleolen för trepersonersspelet med värdefunktionen $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 6$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 8$, $v(\{2,3\}) = 11$ och $v(\{1,2,3\}) = 16$.

Med beteckningarna $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{1,2\}$, $S_5 = \{1,3\}$ och $S_6 = \{2,3\}$ för de äkta koalitionerna är överskottsfunktionerna

$$\begin{aligned}&e_{S_1}(x) = -x_1,\ \ e_{S_2}(x) = -x_2,\ \ e_{S_3}(x) = 6 - x_3,\ \ e_{S_4}(x) = 8 - x_1 - x_2,\\ &e_{S_5}(x) = 8 - x_1 - x_3 \ \text{ och } \ e_{S_6}(x) = 11 - x_2 - x_3.\end{aligned}$$

I steg 1 ska vi minimera funktionen

$$g_1(x) = \max\{e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), e_{S_3}(x), e_{S_4}(x), e_{S_5}(x), e_{S_6}(x)\}$$

över alla imputeringar x, dvs. alla x som uppfyller $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 6$, $x_1 + x_2 + x_3 = 16$. Att bestämma det största talet av ett antal givna tal är emellertid detsamma som att bestämma det minsta tal t som är större än eller lika med alla de givna talen. Vårt minimeringsproblem är därför ekvivalent med linjärprogrammeringsproblemet

$$\text{Minimera } t \text{ då}\\ \begin{cases} -x_1 \leq & t\\ -x_2 \leq & t\\ 6 - x_3 \leq & t\\ 8 - x_1 - x_2 \leq & t\\ 8 - x_1 - x_3 \leq & t\\ 11 - x_2 - x_3 \leq & t\\ x_1 + x_2 + x_3 = & 16\\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq & 6.\end{cases}$$

Sådana problem kan man, genom att införa s. k. slackvariabler, alltid lösa med hjälp av simplexalgoritmen, men i det här fallet kan vi också enkelt lösa det med hjälp av lite fiffighet. Genom att addera den tredje och den fjärde olikheten i bivillkoren samt utnyttja likheten $x_1 + x_2 + x_3 = 16$ ser vi att

$$2t \geq (6 - x_3) + (8 - x_1 - x_2) = 14 - (x_1 + x_2 + x_3) = -2,$$

med likhet om och endast om $6 - x_3 = 8 - x_1 - x_2 = -1$, dvs. $t \geq -1$ med likhet om och endast om $x_1 + x_2 = 9$ och $x_3 = 7$.

Problemets minimivärde m_1 är därför lika med -1 förutsatt att det finns punkter $x = (x_1, x_2, 7)$ med $x_1 + x_2 = 9$ som också uppfyller de övriga bivillkoren för $t = -1$, och minimimängden M_1 består i så fall av alla sådana punkter x. För $t = -1$ och $x_3 = 7$ reduceras de övriga bivillkorsolikheterna till $-x_1 \leq -1$, $-x_2 \leq -1$, $1 - x_1 \leq -1$, $4 - x_2 \leq -1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, vilket kan förenklas till $x_1 \geq 2$ och $x_2 \geq 5$, och detta är förenligt med att $x_1 + x_2 = 9$. Detta betyder att $m_1 = -1$ och att minimimängden är

$$M_1 = \{(x_1, x_2, 7) \mid x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 5,\ x_1 + x_2 = 9\}.$$

Eftersom $e_{S_i}(x) = m_1 = -1$ på hela minimimängden M_1 för två koalitioner, S_3 och S_4, är $M_2 = M_1$, och vi kan därför gå vidare till att minimera funktionen

$$g_3(x) = \max\{e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), e_{S_5}(x), e_{S_6}(x)\}$$

över mängden M_1. Detta ger oss det ekvivalenta linjärprogrammeringsproblemet

$$\text{Minimera } t \text{ då}$$
$$\begin{cases} -x_1 \leq t \\ -x_2 \leq t \\ 1 - x_1 \leq t \\ 4 - x_2 \leq t \\ x_1 \geq 2, x_2 \geq 5,\ x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Här kan vi förstås eliminera variabeln x_2 eftersom $x_2 = 9 - x_1$, vilket leder till det enklare problemet

$$\text{Minimera } t \text{ då}$$
$$\begin{cases} -x_1 \leq t \\ x_1 - 9 \leq t \\ 1 - x_1 \leq t \\ x_1 - 5 \leq t \\ 2 \leq x_1 \leq 4. \end{cases}$$

Genom att addera olikheterna nummer 3 och 4 ser vi att $t \geq -2$ och att likhet inträffar för $x_1 = 3$. För $t = -2$ och $x_1 = 3$ är också de övriga bivillkoren uppfyllda, så vi har hittat minimum och minimipunkten. Eftersom minimipunkten är entydigt bestämd, har vi också bestämt nukleolimputeringen $\hat{x}$; den är $\hat{x} = (3, 6, 7)$.

Den avtagande omordningen av nukleolimputeringens överskottsvektor $e(\hat{x})$ är vektorn $(-1, -1, -2, -2, -3, -6)$. □

Sats 10.6.3 *Nukleolen till ett koalitionsspel med icke-tom kärna är en delmängd av kärnan.*

Bevis. För alla imputeringar x i kärnan är samtliga koordinater i överskottsvektorn $e(x) = (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))$ negativa eller noll. För den imputering $\hat{x}$ som lexikografiskt minimerar den avtagande omordningen av överskottsvektorerna, dvs. nukleollösningen, måste därför överskotten $e_S(\hat{x})$ också vara negativa eller noll för samtliga koalitioner S, och detta innebär att nukleollösningen $\hat{x}$ ligger i spelets kärna. □

Nukleollösningen är rättvis såtillvida att utbytbara spelare får samma utbetalning och statister, dvs. spelare som inte bidrar till spelet, inte får någonting alls.

Sats 10.6.4 *Låt $\langle N, v\rangle$ vara ett koalitionsspel med nukleollösning $\hat{x}$.*
(a) Om i och j är två utbytbara spelare, så är $\hat{x}_i = \hat{x}_j$.
(b) Om spelare i är en statist, så är $\hat{x}_i = 0$.

Bevis. (a) Antag att spelarna i och j är utbytbara, och låt $\overline{x}$ vara den imputering som fås av $\hat{x}$ genom att byta $\hat{x}_i$ mot $\hat{x}_j$, dvs. $\overline{x}_i = \hat{x}_j$, $\overline{x}_j = \hat{x}_i$ och $\overline{x}_k = \hat{x}_k$ för alla övriga spelare k. Då är

$$e_S(\overline{x}) = e_S(\hat{x})$$

för alla koalitioner S som innehåller båda spelarna i och j eller ingen av spelarna, medan

$$e_{S\cup\{i\}}(\overline{x}) = e_{S\cup\{j\}}(\hat{x}) \text{ och } \quad e_{S\cup\{j\}}(\overline{x}) = e_{S\cup\{i\}}(\hat{x})$$

för alla koalitioner S som inte innehåller spelarna i och j. De båda överskottsvektorerna

$$e(\overline{x}) = (e_{S_1}(\overline{x}), e_{S_2}(\overline{x}), \dots, e_{S_p}(\overline{x})) \text{ och } \quad e(\hat{x}) = (e_{S_1}(\hat{x}), e_{S_2}(\hat{x}), \dots, e_{S_p}(\hat{x}))$$

innehåller därför samma komponenter fast i olika ordning, så deras avtagande omordningar $e(\overline{x})^*$ och $e(\hat{x})^*$ är identiska. Eftersom $\hat{x}$ minimerar den avtagande omordningen av överskottsvektorerna med avseende på den lexikografiska ordningen och minimipunkten är unik, följer det att $\overline{x} = \hat{x}$, vilket betyder att $\hat{x}_i = \overline{x}_i = \hat{x}_j$.

(b) Vi kan utan inskränkning anta att spelare 1 är statist så att $v(\{1\}) = 0$ och $v(S \cup \{1\}) = v(S)$ för alla koalitioner S, och ska alltså visa att $\hat{x}_1 = 0$.

Slutsatsen följer om vi visar att det för varje imputering x med $x_1 > 0$ finns en imputering y sådan att $y \prec x$, där $\prec$ är den i nukleoldefinitionen introducerade ordningsrelationen på imputeringsmängden. Låt för den skull y vara den imputering som fås genom att utgå från x och omfördela spelare 1:s positiva tilldelning x_1 uniformt bland de övriga spelarna. Vi sätter alltså

$$y_1 = 0 \qquad \text{och} \qquad y_k = x_k + \frac{1}{n-1}x_1 \quad \text{för } k = 2, 3, \dots, n.$$

Vi ska visa följande påstående:

(†) För varje koalition $S \in \mathcal{C} \setminus \{N\}$ finns det en koalition $S' \in \mathcal{C} \setminus \{N\}$ sådan att $e_S(y) < e_{S'}(x)$.

Av påstående (†) följer nämligen att den största koordinaten i överskottsvektorn $e(y) = (e_{S_1}(y), e_{S_2}(y), \dots, e_{S_p}(y))$ är strikt mindre än den största koordinaten i överskottsvektorn $e(x) = (e_{S_1}(x), e_{S_2}(x), \dots, e_{S_p}(x))$. När vi jämför överskottsvektorernas avtagande omordningar $e(y)^*$ och $e(x)^*$ är därför den första koordinaten i $e(y)^*$ strikt mindre än den första koordinaten i $e(x)^*$, och detta betyder att $e(y)$ är lexikografiskt strikt mindre än $e(x)$, vilket per definition är ekvivalent med att $y \prec x$.

För koalitioner S som inte innehåller spelare 1 är

$$e_S(y) = v(S) - y(S) = v(S) - x(S) - \frac{|S|}{n-1}x_1 = e_S(x) - \frac{|S|}{n-1}x_1 < e_S(x),$$

så olikheten i (†) gäller i detta fall med $S' = S$.

För den speciella enmannakoalitionen $S = \{1\}$ gäller olikheten i (†) med $S' = N \setminus \{1\}$, ty $e_{\{1\}}(y) = v(\{1\}) - y_1 = 0$, och

$$e_{N\setminus\{1\}}(x) = v(N \setminus \{1\}) - x(N \setminus \{1\}) = v(N) - x(N) + x_1 = x_1 > 0.$$

Vi måste slutligen betrakta koalitioner S som förutom spelare 1 också innehåller någon annan spelare, dvs. har formen $S = T \cup \{1\}$ med $T \neq \emptyset$. För sådana koalitioner är

$$\begin{aligned} e_S(y) &= v(T \cup \{1\}) - y(T \cup \{1\}) = v(T) - y(T) = v(T) - x(T) - \frac{|T|}{n-1}x_1 \\ &= e_T(x) - \frac{|T|}{n-1}x_1 < e_T(x), \end{aligned}$$

så olikheten i (†) gäller i detta fall med $S' = T = S \setminus \{1\}$.

Detta bevisar påstående (†) och därmed också satsen. □

Exempel 10.6.4 I exempel 10.4.3 bestämde vi kärnan till spelet med en fabriksägare som spelare 0 och n arbetare som spelare $1, 2, \dots, n$, och med värdefunktionen given av att $v(S) = 0$ om $0 \notin S$, och $v(S) = f(|S| - 1)$ om $0 \in S$, där f är en växande, konkav funktion och $f(0) = 0$.

För att bestämma spelets nukleolvektor $\hat{x}$ utnyttjar vi sats 10.6.4; eftersom arbetarna uppenbarligen är utbytbara, är $\hat{x}_i = \hat{x}_1$ för $i \geq 2$. När vi beräknar nukleolen kan vi därför inskränka oss till att betrakta imputeringar $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ med $x_i = x_1$ för $i \geq 2$. För sådana imputeringar och koalitioner A av m stycken arbetare är överskotten

$$e_A(x) = -mx_1 \quad \text{och} \quad e_{\{0\}\cup A}(x) = f(m) - x_0 - mx_1.$$

Problemet att minimera maximum av alla överskott är därför ekvivalent med följande linjärprogrammeringsproblem:

$$\text{Minimera } t \text{ då}$$
$$\begin{cases} -\ell x_1 \leq t, & 1 \leq \ell \leq n \\ f(m) - x_0 - mx_1 \leq t, & 0 \leq m \leq n-1 \\ x_0 + nx_1 = f(n) \\ x_0,\, x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Genom att eliminera variabeln $x_0 = f(n) - nx_1$ får vi det ekvivalenta problemet

$$\text{Minimera } t \text{ då}$$
$$\begin{cases} -\ell x_1 \leq t, & 1 \leq \ell \leq n \\ f(m) - f(n) + (n-m)x_1 \leq t, & 0 \leq m \leq n-1 \\ 0 \leq x_1 \leq f(n)/n. \end{cases}$$

Genom att addera den första bivillkorsolikheten för $\ell = 1$ och den andra för $m = n-1$ får vi olikheten $f(n-1) - f(n) \le 2t$, med slutsatsen att $t \ge (f(n-1) - f(n))/2$.

Sätt $t_0 = (f(n-1) - f(n))/2$. Vi ska visa att t_0 är problemets minimivärde. För detta krävs att det finns ett x_1-värde som uppfyller samtliga bivillkor för $t = t_0$ och ger likhet i åtminstone ett av bivillkoren.

Sätt därför $x_1 = -t_0 = (f(n) - f(n-1))/2$. Då är $x_1 \ge 0$ och $-\ell x_1 \le t_0$ för $1 \le \ell \le n$ med likhet för $\ell = 1$. Eftersom funktionen f är konkav och växande, är vidare

$$f(m) - f(n) = -\sum_{j=1}^{n-m} (f(m+j) - f(m+j-1)) \le -(n-m)(f(n) - f(n-1)),$$

så det följer att

$$\begin{aligned} f(m) - f(n) + (n-m)x_1 &\le (n-m)x_1 - (n-m)(f(n) - f(n-1)) \\ &= -(n-m)(f(n) - f(n-1))/2 = (n-m)t_0 \le t_0 \end{aligned}$$

för $0 \le m \le n-1$. För $m = 0$ får vi, eftersom $f(0) = 0$, dessutom olikheten $-f(n) + nx_1 \le nt_0 = -nx_1$, varav följer att $x_1 \le f(n)/2n$.

Därmed har vi löst minimimeringsproblemet. Nukleollösningen ger varje arbetare $(f(n) - f(n-1))/2$ värdeenheter, dvs. hälften av arbetarens marginalprodukt. Fabriksägaren får följaktligen $f(n) - n(f(n) - f(n-1))/2$ värdeenheter, vilket är minst lika med $f(n)/2$. □

Övningar

10.17 Bestäm nukleollösningen till spelet i exempel 10.3.1.

10.18 Bestäm nukleollösningen till spelet i övning 10.7.

10.19 Bestäm nukleollösningen till spelet i exempel 10.4.1.

10.20 Bestäm för varje $a \ge 5$ nukleollösningen till koalitionsspelet $\langle\{1,2,3\}, v\rangle$, om $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 4$, $v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 3$ och $v(\{1,2,3\}) = a$.

10.21 Bestäm nukleollösningen till n-personersspelet $\langle N, v\rangle$ med följande värdefunktion:

$$v(S) = \begin{cases} |S| & \text{om } 1 \in S, \\ 0 & \text{om } 1 \notin S. \end{cases}$$

10.22 (Bankruttproblemet) En person går i konkurs med skulder till tre personer och med tillgångar som är mindre än den sammanlagda skulden. Hur ska tillgångarna fördelas på de tre långivarna?

Problemet diskuteras redan i babyloniska Talmud, en samling judiska lagar och traditioner från de fem första århundradena e. Kr., i följande form. En man har tre hustrur med äktenskapskontrakt som stipulerar att de ska få 100, 200 resp. 300 i händelse av mannens död. Talmud rekommenderar att de ska få lika mycket var, dvs. $33\frac{1}{3}$, om mannen vid sin bortgång efterlämnar 100. Om den efterlämnade förmögenheten är 300 rekommenderas proportionell fördelning, dvs. 50, 100, 150. Men om arvet uppgår till 200, är Talmuds rekommendation fördelningen 50, 75, 75, vilket kan förefalla som ett fullständigt mysterium.

Visa att Talmuds rekommendationer sammanfaller med nukleollösningen till det koalitionsspel $\langle N, v \rangle$ som fås genom att låta N vara de tre hustrurna och koalitionsvärdet $v(S)$ vara det belopp som koalitionen S kan få utan att behöva vidta några legala åtgärder, dvs. $v(S)$ är lika med vad som återstår av tillgångarna när spelarna utanför koalitionen S fått alla sina fordringar tillgodosedda om tillgångarna räcker till för detta, medan $v(S) = 0$ om så inte är fallet.

I det fall då mannen efterlämnar 300 är således $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0$, $v(\{1,3\}) = 100$, $v(\{2,3\}) = 200$ och $v(\{1,2,3\}) = 300$.

Problemet är hämtat från en artikel av R.J. Aumann och M. Maschler.

Kapitel 11

Shapleyvärdet

Huvudproblemet i ett koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ är, som vi redan påpekat flera gånger, att fördela värdet $v(N)$ bland spelets deltagare på ett sätt som tar hänsyn till styrkan hos alla möjliga koalitioner. En elegant lösning med intuitivt tilltalande egenskaper, och som dessutom är relativt enkel att beräkna, ges av Shapleylösningen som vi nu ska studera.

11.1 Shapleylösningen

Låt $\mathcal{G}$ vara en klass av koalitionsspel för n spelare, t. ex. alla koalitionsspel eller alla kohesiva spel eller alla superadditiva spel. En funktion $\phi\colon \mathcal{G} \to \mathbf{R}^n$ som tilldelar varje spel $\langle N, v\rangle$ i klassen en unik *kollektivt rationell* utbetalningsvektor $\phi(N, v)$, kommer att kallas en *lösningsfunktion*, och vektorn $\phi(N, v)$ kallar vi för *lösningen* till spelet $\langle N, v\rangle$ med avseende på den aktuella metoden (funktionen).

Lösningsbegreppet är onekligen mycket generellt; enda kravet är att vektorn $\phi(N, v)$ ska kunna användas för att fördela storkoalitionens värde bland spelarna. För att en lösning ska anses som rättvis och relevant bör den förstås också ha andra egenskaper. Vi har redan studerat en sådan lösning för klassen av alla spel med icke-tom imputeringsmängd utan att använda själva terminologin, nämligen nukleollösningen som är den lösning som vi får genom att definiera $\phi(N, v)$ som spelets unika nukleolvektor. Nukleollösningen är en kollektivt och individuellt rationell vektor som (i en precis mening) minimerar koalitionernas potentiella invändningar, och som dessutom har den tilltalande egenskapen att utbytbara spelare behandlas lika och statister inte får någon utdelning.

Shapleylösningen tar sin utgångspunkt i den sistnämnda egenskapen, men till skillnad från nukleoldefinitionen, som refererar till ett fixt spel, kräver Shapleys definition att vi betraktar en hel klass av spel. Därav behovet av begreppet lösningsfunktion.

Vi börjar därför med att notera att mängden av alla koalitionsspel med given spelarmängd bildar ett vektorrum. Vi ska sedan bestämma en speciell bas för detta vektorrum.

Definition 11.1.1 Med summan $\langle N, v\rangle + \langle N, w\rangle$ av två spel med samma spelarmängd menas spelet $\langle N, v+w\rangle$, och med produkten $c\langle N, v\rangle$ av det reella talet c och spelet $\langle N, v\rangle$ menas spelet $\langle N, cv\rangle$.

Notera att summan av två kohesiva spel är kohesiv och att produkten av ett positivt reellt tal och ett kohesivt spel är kohesiv. Vidare är summan av två superadditiva spel superadditiv, och produkten av ett positivt reellt tal och ett superadditivt spel är superadditiv.

Definitionen av summa och multiplikation med skalär gör mängden av alla koalitionsspel med N som spelarmängd till ett vektorrum som är isomorft med vektorrummet av alla värdefunktioner. Genom att på ett godtyckligt sätt numrera de $2^n - 1$ stycken koalitionerna i koalitionsmängden $\mathcal{C}$ som $S_1, S_2, \dots, S_{2^n-1}$ och sätta $v_i = v(S_i)$ kan vi vidare identifiera varje värdefunktion v med vektorn $(v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1})$ i $\mathbf{R}^{2^n-1}$. Vektorrummet av spel blir på så sätt isomorft med $\mathbf{R}^{2^n-1}$, och dess dimension är således lika med 2^n-1. Det har därför en bas som består av 2^n-1 stycken spel. Basen är förstås entydigt bestämd av värdefunktionerna, och vi ska nu närmast konstruera en explicit sådan bas som är indexerad med hjälp av koalitionerna som ju också är $2^n - 1$ till antalet.

Lemma 11.1.1 *Definiera för varje koalition S en värdefunktion $\chi_S\colon \mathcal{C} \to \mathbf{R}$ genom att sätta*

$$\chi_S(T) = \begin{cases} 1 & \textit{om } S \subseteq T, \\ 0 & \textit{annars.} \end{cases}$$

Då bildar spelen $(\langle N, \chi_S\rangle)_{S\in\mathcal{C}}$ en bas för vektorrummet av alla koalitionsspel med N som deltagarmängd.

Om v är en godtycklig värdefunktion, så finns det med andra ord entydigt bestämda reella tal c_S så att

$$v = \sum_{S\in\mathcal{C}} c_S \chi_S.$$

Med vektorrumsterminologi är talen c_S koordinaterna för spelet $\langle N, v\rangle$ med avseende på den angivna basen.

Bevis. Eftersom antalet värdefunktioner av typen χ_S är lika med rummets dimension, räcker det att visa att spelen $(\langle N, \chi_S\rangle)_{S\in\mathcal{C}}$ spänner upp rummet, dvs. att det för varje värdefunktion v finns konstanter c_S så att likheten i lemmat gäller. Sätt för den skull $c_\emptyset = 0$ och definiera sedan c_T rekursivt för $T \in \mathcal{C}$ med hjälp av relationen

(1) $$c_T = v(T) - \sum_{S\subsetneq T} c_S.$$

Då är

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} c_S\chi_S(T) = \sum_{S\subseteq T} c_S\chi_S(T) + \sum_{S\not\subseteq T} c_S\chi_S(T) = \sum_{S\subseteq T} c_S$$
$$= c_T + \sum_{S\subsetneq T} c_S = c_T + v(T) - c_T = v(T)$$

för alla koalitioner T, vilket visar påståendet. □

EXEMPEL 11.1.1 Koalitionsspelet $\langle\{1,2,3\},v\rangle$, där $v(\{1\}) = 3$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 2$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 4$, $v(\{2,3\}) = 5$ och $v(\{1,2,3\}) = 8$, har följande koordinater med avseende på den kanoniska basen i lemma 11.1.1.

$$\begin{aligned} c_{\{1\}} &= 3,\ \ c_{\{2\}} = 2,\ \ c_{\{3\}} = 2,\ \ c_{\{1,2\}} = 4-3-2 = -1,\\ c_{\{1,3\}} &= 4-3-2 = -1,\ \ c_{\{2,3\}} = 5-2-2 = 1,\\ c_{\{1,2,3\}} &= 8-3-2-2-(-1)-(-1)-1 = 2. \end{aligned}$$

□

Lemma 11.1.2 *I koalitionsspelet $\langle N,v\rangle$ med värdefunktion $v = \sum_{S\in\mathcal{C}} c_S\chi_S$ är*

(i) spelare i en statist om och endast om $c_S = 0$ för alla koalitioner S som innehåller i;

(ii) spelarna i och j utbytbara om och endast om $c_{S\cup\{i\}} = c_{S\cup\{j\}}$ för alla delmängder S av N som inte innehåller någon av spelarna i och j.

Bevis. Låt T vara en delmängd av N som inte innehåller spelare i. Då är

$$\begin{aligned} c_{T\cup\{i\}} &= v(T\cup\{i\}) - \sum_{S\subsetneq T\cup\{i\}} c_S = v(T\cup\{i\}) - \sum_{S\subsetneq T} c_{S\cup\{i\}} - \sum_{S\subseteq T} c_S\\ &= v(T\cup\{i\}) - \sum_{S\subsetneq T} c_{S\cup\{i\}} - v(T), \end{aligned}$$

vilket efter omskrivning blir

$$v(T\cup\{i\}) - v(T) = c_{T\cup\{i\}} + \sum_{S\subsetneq T} c_{S\cup\{i\}}. \tag{2}$$

För $T=\emptyset$ är summan i ekvation (2) tom (och $v(\emptyset)=0$), vilket betyder att $v(\{i\}) = c_{\{i\}}$.

(i) Om $c_S = 0$ för alla koalitioner som innehåller spelare i, så följer det omedelbart av ekvation (2) att $v(T\cup\{i\}) = v(T)$ för alla delmängder T av N som inte innehåller i, och spelare i är följaktligen en statist.

Omvändningen visas med induktion. Antag att spelare i är en statist. Då är för det första $c_{\{i\}} = v(\{i\}) = 0$. Koalitioner med fler än en spelare och som innehåller i skriver vi på formen $T\cup\{i\}$, där T är en koalition som inte innehåller i. Antag induktivt att $c_{S\cup\{i\}} = 0$ för alla äkta delmängder S av T. Eftersom $v(T \cup \{i\}) = v(T)$ följer det direkt av ekvation (2) att $c_{T\cup\{i\}} = 0$. Därmed är induktionssteget genomfört och beviset klart.

(ii) Låt T vara en godtycklig delmängd av N som varken innehåller spelare i eller spelare j. Då är på grund av ekvation (2) med i bytt mot j

$$v(T \cup \{j\}) - v(T) = c_{T\cup\{j\}} + \sum_{S \subsetneq T} c_{S\cup\{j\}},$$

och genom att subtrahera detta från ekvation (2) erhåller vi sambandet

$$v(T \cup \{i\}) - v(T \cup \{j\})) = c_{T\cup\{i\}} - c_{T\cup\{j\}} + \sum_{S \subsetneq T} \big(c_{S\cup\{i\}} - c_{S\cup\{j\}}\big). \tag{3}$$

Om $c_{S\cup\{i\}} = c_{S\cup\{j\}}$ för alla delmängder S av N som inte innehåller i eller j, är följaktligen $v(T\cup\{i\}) = v(T\cup\{j\})$, vilket visar att spelarna i och j är utbytbara.

Omvänt, om spelarna i och j är utbytbara och T är en delmängd av N som inte innehåller i och j så att $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$, och likheten $c_{S\cup\{i\}} = c_{S\cup\{j\}}$ gäller för alla äkta delmängder S av T, så följer det av ekvation (3) att också $c_{T\cup\{i\}} = c_{T\cup\{j\}}$. Det följer därför genom induktion att $c_{T\cup\{i\}} = c_{T\cup\{j\}}$ för alla delmängder T av N som inte innehåller i eller j. Därmed är beviset klart. □

Sats 11.1.3 *Det finns en unik lösningsfunktion $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ som är definierad för alla koalitionsspel och har följande tre egenskaper:*

(i) Om i är en statist i spelet $\langle N, v\rangle$ så är $\phi_i(N, v) = 0$.

(ii) Om i och j är utbytbara spelare i spelet $\langle N, v\rangle$ så är

$$\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v).$$

(iii) För alla värdefunktioner v och w är

$$\phi(N, v + w) = \phi(N, v) + \phi(N, w).$$

För värdefunktionen v med koordinatutvecklingen $v = \sum_{S\in\mathcal{C}} c_S\chi_S$ ges utbetalningen $\phi_i(N, v)$ till spelare i av ekvationen

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S\ni i} \frac{c_S}{|S|}. \tag{4}$$

Här betyder $\sum_{S\ni i}$ i formel (4) att man ska summera över alla koalitioner S som innehåller spelare i.

Vi kommer att kalla de tre egenskaperna (i), (ii) och (iii) i satsen för *statist-, symmetri-* och *additivitetsegenskaperna.*

Bevis. Entydighet: Vi visar först att om det existerar en lösningsfunktion ϕ med de tre egenskaperna, så ges den av formeln (4), något som förstås medför att funktionen är entydigt bestämd.

Antag därför att ϕ är en lösningsfunktion med de önskvärda egenskaperna. Vi kommer först att beräkna $\phi(N,v)$ för funktioner av typen $v = c\chi_S$, där c är en konstant och χ_S är en av basfunktionerna i lemma 11.1.1.

Antag att $i \notin S$. Då gäller att $S \subseteq T$ om och endast om $S \subseteq T \cup \{i\}$, varför $\chi_S(T) = \chi_S(T \cup \{i\})$ för alla koalitioner T. Vidare är uppenbarligen $\chi_S(\{i\}) = 0$. Spelare i är således statist i spelet $\langle N, c\chi_S\rangle$. Av statistegenskapen (i) följer därför att $\phi_i(N, c\chi_S) = 0$ för alla i som inte tillhör S.

Antag härnäst att $i, j \in S$. För varje koalition T som inte innehåller i eller j gäller då att $S \not\subseteq T \cup \{i\}$ och $S \not\subseteq T \cup \{j\}$, vilket på grund av definitionen av χ_S betyder att $\chi_S(T \cup \{i\}) = \chi_S(T \cup \{j\}) = 0$. Spelarna i och j är således utbytbara i spelet $\langle N, c\chi_S\rangle$. Symmetriegenskapen (ii) medför därför att $\phi_i(N, c\chi_S) = \phi_j(N, c\chi_S)$. Värdet $\phi_i(N, c\chi_S)$ är med andra ord detsamma för alla spelare i som tillhör koalitionen S

Eftersom $\chi_S(N) = 1$ och $\phi(N, c\chi_S)$ är en kollektivt rationell vektor, får vi nu slutligen likheten

$$c = c\,\chi_S(N) = \sum_{k\in N} \phi_k(N, c\chi_S) = \sum_{k\in S} \phi_k(N, c\chi_S) = |S|\,\phi_i(N, c\chi_S)$$

för alla $i \in S$. Följaktligen är

$$\phi_i(N, c\chi_S) = \begin{cases} c/|S| & \text{om } i \in S, \\ 0 & \text{om } i \notin S. \end{cases}$$

Därmed är ϕ:s värden bestämda för funktioner av typen $c\chi_S$. Enligt lemma 11.1.1 har varje värdefunktion v en entydig utveckling $v = \sum_{S\in\mathcal{C}} c_S\chi_S$, och additivitetsegenskapen (iii) medför därför att

$$\phi_i(N,v) = \sum_{S\in\mathcal{C}} \phi_i(N, c_S\chi_S) = \sum_{S\ni i} \phi_i(N, c_S\chi_S) + \sum_{S\not\ni i} \phi_i(N, c_S\chi_S) = \sum_{S\ni i} \frac{c_S}{|S|},$$

vilket bevisar formeln (4) och entydigheten.

Existens: För att visa att det existerar en lösningsfunktion med egenskaperna (i) – (iii) definierar vi ϕ med hjälp av formel (4) och visar att ϕ har de önskvärda egenskaperna.

Vi börjar med att visa att $\phi(N,v)$ är en kollektivt rationell vektor. Av definitionen av $\phi_i(N,v)$ följer först att

$$\sum_{i\in N} \phi_i(N,v) = \sum_{i\in N}\sum_{S\ni i} \frac{c_S}{|S|}.$$

Dubbelsumman innebär att vi ska ta med termen $c_S/|S|$ en gång för varje spelare i som tillhör S, dvs. lika många gånger som det finns medlemmar i koalitionen S, och detta ska vi göra för varje koalition S. Därför är

$$\sum_{i\in N}\sum_{S\ni i} \frac{c_S}{|S|} = \sum_{S\in\mathcal{C}} |S|\,\frac{c_S}{|S|} = \sum_{S\in\mathcal{C}} c_S = v(N),$$

där den sista likheten följer av den rekursiva definitionen av c_N i ekvation (1). Därmed har vi visat att $\sum_{i\in N}\phi_i(N,v)=v(N)$.

Statistegenskapen följer direkt av formel (4) och lemma 11.1.2.

Antag att i och j är utbytbara spelare i spelet $\langle N,v\rangle$. Koalitionerna som innehåller i kan förstås delas upp i koalitioner som också innehåller j och koalitioner som inte innehåller j, och de sistnämnda koalitionerna har formen $T\cup\{i\}$ där T inte innehåller j. Med hjälp av denna uppdelning, definitionen av ϕ och (ii) i lemma 11.1.2 får vi

$$\begin{aligned}\phi_i(N,v)&=\sum_{S\ni i}\frac{c_S}{|S|}=\sum_{S\ni i,j}\frac{c_S}{|S|}+\sum_{T\not\ni i,j}\frac{c_{T\cup\{i\}}}{|T\cup\{i\}|}\\&=\sum_{S\ni i,j}\frac{c_S}{|S|}+\sum_{T\not\ni i,j}\frac{c_{T\cup\{j\}}}{|T\cup\{j\}|}=\sum_{S\ni j}\frac{c_S}{|S|}=\phi_j(N,v).\end{aligned}$$

Funktionen ϕ uppfyller således symmetrikravet.

Additionsegenskapen följer med en gång av definitionen av ϕ. Därmed är existensbeviset klart. □

Definition 11.1.2 Den unika funktionen ϕ i sats 11.1.3 kallas *Shapleyfunktionen*, vektorn $\phi(N,v)$ kallas *Shapleylösningen* och talet $\phi_i(N,v)$ är spelare i:s *Shapleyvärde* i spelet $\langle N,v\rangle$.

I fortsättningen kommer vi att utelämna referensen till spelarmängden N i beteckningarna för Shapleylösningen och Shapleyvärdena för att inte i onödan tynga ned beteckningarna. Vi skriver med andra ord $\phi(v)$ och $\phi_i(v)$ istället för $\phi(N,v)$ och $\phi_i(N,v)$.

Exempel 11.1.2 Betrakta det kohesiva, icke-superadditiva trepersonersspelet i exempel 11.1.1. Eftersom spelarna 2 och 3 är utbytbara är $\phi_2(v)=\phi_3(v)$, så för att bestämma spelets Shapleyvärden räcker det i det här fallet att beräkna $\phi_1(v)$. Vi använder formeln i sats 11.1.3 och får

$$\phi_1(v)=c_{\{1\}}+\tfrac{1}{2}(c_{\{1,2\}}+c_{\{1,3\}})+\tfrac{1}{3}c_{\{1,2,3\}}=3+\tfrac{1}{2}(-1-1)+\tfrac{1}{3}\cdot 2=\tfrac{8}{3}.$$

Eftersom Shapleylösningen är kollektivt rationell följer det nu att

$$2\phi_2(v)=v(N)-\phi_1(v)=8-\tfrac{8}{3}=\tfrac{16}{3},$$

och detta betyder att $\phi_1(v)=\phi_2(v)=\phi_3(v)=\frac{8}{3}$.

Observera att Shapleylösningen $(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{8}{3})$ inte är individuellt rationell på grund av olikheten $\phi_1(v)<3=v(\{1\})$.

Spelets kärna består, vilket man lätt verifierar, av alla imputeringar av typen $(3,t,5-t)$, där $2\le t\le 3$. Eftersom nukleollösningen ligger i kärnan och ger de utbytbara spelarna 2 och 3 samma tilldelning, är imputeringen $(3,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ spelets nukleollösning. □

Exempel 11.1.2 visar att Shapleylösningen inte behöver vara en imputering och att den i allmänhet är skild från nukleollösningen. För superadditiva spel är emellertid Shapleylösningen en imputering, vilket vi kommer att visa i nästa avsnitt när vi skaffat oss en alternativ formel för Shapleyvärdena.

Eftersom nukleollösningen har statist- och symmetriegenskaperna men inte sammanfaller med Shapleylösningen, kan vi också dra slutsatsen att nukleollösningen saknar additivitetsegenskapen.

Övningar

11.1 Bestäm Shapleylösningen för spelet om tavlan i exempel 10.3.1, dvs. trepersonersspelet med värdefunktion $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 2$ och $v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 3$.

11.2 Betrakta ett n-personersspel $\langle N, v\rangle$ där

$$v(S) = k \quad \text{om } \{1, 2, \dots, k\} \subseteq S \text{ men } k+1 \notin S.$$

Exempelvis är $v(\{2,4,5\}) = 0$, $v(\{1,4,5\}) = 1$ och $v(\{1,2,3,5\}) = 3$. Bestäm spelets Shapleylösning.

11.2 Alternativ karakterisering av Shapleyvärdet

Vi ska nu ge en alternativ karakterisering av Shapleylösningen i termer av spelarnas marginella bidrag till de olika koalitionerna.

Vi påminner om att spelare i:s marginella bidrag till koalitionen S i spelet $\langle N, v\rangle$ definieras som

$$\Delta_i(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\}),$$

där $v(\emptyset) = 0$.

Observera att i superadditiva spel är $\Delta_i(S) \geq v(\{i\})$ för varje koalition S som spelare i medverkar i, dvs. spelarens marginella bidrag är större än eller lika med det värde han kan åstadkomma på egen hand.

Låt nu π beteckna en godtycklig permutation av talen 1,2,..., n, och låt $S_i(\pi)$ beteckna den koalition som består av spelare i och samtliga spelare som räknas upp före i i permutationen π.

Exempel 11.2.1 För permutationen $\pi = (3,4,1,2)$ är $S_1(\pi) = \{1,3,4\}$, $S_2(\pi) = \{1,2,3,4\}$, $S_3(\pi) = \{3\}$ och $S_4(\pi) = \{3,4\}$. □

Sats 11.2.1 *Spelare i:s Shapleyvärde i koalitionsspelet $\langle N, v\rangle$ ges av formeln*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \Delta_i(S_i(\pi)) = \frac{1}{n}\sum_{S\ni i} \frac{\Delta_i(S)}{\binom{n-1}{|S|-1}},$$

där den första summeringen ska göras över alla $n!$ permutationerna π av talen $1, 2, \dots, n$, och den andra summeringen ska tas över alla koalitioner S som innehåller spelare i.

Bevis. Låt $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ vara den funktion som definieras för värdefunktionerna v i koalitionsspelen $\langle N, v\rangle$ av att

$$\psi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \Delta_i(S_i(\pi)) \tag{5}$$

för alla i. För att visa att $\psi_i(v)$ är spelare i:s Shapleyvärde räcker det på grund av entydigheten hos Shapleylösningen att visa att ψ är en lösningsfunktion, dvs. att $\psi(v)$ är en kollektivt rationell vektor, samt att ψ har statist-, symmetri- och additivitetsegenskaperna.

Låt $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ vara en godtycklig permutation av talen i N; då är $\Delta_{i_k}(S_{i_k}(\pi)) = v(\{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k\}) - v(\{i_1, \dots, i_{k-1}\})$, så det följer att

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N} \Delta_i(S_i(\pi)) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i_k}(S_{i_k}(\pi))\\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(v(\{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k\}) - v(\{i_1, \dots, i_{k-1}\})\big)\\ &= v(\{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n\}) - v(\emptyset) = v(N).\end{aligned}$$

Följaktligen är

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N} \psi_i(v) &= \frac{1}{n!}\sum_{i\in N}\sum_{\pi} \Delta_i(S_i(\pi))\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\sum_{i\in N} \Delta_i(S_i(\pi)) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} v(N) = v(N).\end{aligned}$$

Detta visar att vektorn $\psi(v)$ är kollektivt rationell.

Statistegenskapen är uppenbar eftersom $\Delta_i(S) = 0$ för alla koalitioner S om i är en statist.

Antag att de två spelarna i och j är utbytbara. För varje permutation $\pi = (i_1, \dots, i, \dots, j, \dots, i_n)$ låter vi $\pi' = (i_1, \dots, j, \dots, i, \dots, i_n)$ beteckna den permutation som fås genom att låta talen i och j byta plats med varandra. Oberoende av om i kommer före j i permutationen π (som ovan) eller om j kommer före i, blir då på grund av utbytbarheten $\Delta_i(S_i(\pi)) = \Delta_j(S_j(\pi'))$. Följaktligen är

$$\psi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \Delta_i(S_i(\pi)) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi'} \Delta_j(S_j(\pi')) = \psi_j(v),$$

vilket bevisar symmetriegenskapen.

Additivitetsegenskapen är uppenbar, eftersom en spelares marginella bidrag till en koalition i summan av två spel är lika med summan av spelarens marginella bidrag i de två spelen.

Därmed har vi bevisat att Shapleyvärdet också ges av formel (5), och vi ska nu visa att man kan skriva om formeln så att man får den andra likheten i satsen.

För varje permutation π är $S_i(\pi)$ en koalition som innehåller spelare i, men för varje koalition S som innehåller i finns det förstås många permutationer π för vilka $S_i(\pi) = S$, och vi ska börja med att bestämma hur många.

Sätt därför $k = |S|$ och $T = S \setminus \{i\}$. Då är $S_i(\pi) = S$ om och endast om permutationen har formen

$$\pi = (i_1, \dots, i_{k-1}, i, j_1, \dots, j_{n-k}),$$

där $(i_1, \dots, i_{k-1})$ och $(j_1, \dots, j_{n-k})$ är godtyckliga permutationer av elementen i T respektive $N \setminus S$. Antalet sådana permutationer π är uppenbarligen $(k-1)!\,(n-k)!$.

Följaktligen är

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi} \Delta_i(S_i(\pi)) = \frac{1}{n!}\sum_{S \ni i} \sum_{\substack{\pi \text{ så att} \\ S_i(\pi)=S}} \Delta_i(S_i(\pi)) = \frac{1}{n!}\sum_{S \ni i}(k-1)!\,(n-k)!\,\Delta_i(S),$$

och eftersom

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{|S|-1}$$

är beviset klart. □

Den första halvan av formeln i sats 11.2.1 ger oss följande intuitivt tilltalande tolkning av Shapleyvärdena.

Låt $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ vara en permutation av N och antag att storkoalitionen N uppstår genom att spelarna ansluter sig till den en efter en i den ordning som ges av permutationen, dvs. det hela börjar med spelare i_1 och sedan ansluter sig i_2 så att man får koalitionen $\{i_1, i_2\}$, och sedan ansluter sig i_3 till den delkoalitionen, osv. till dess att alla spelarna anslutit sig. I det fallet förefaller det naturligt att fördela storkoalitionens värde $v(N)$ på ett sådant sätt att varje spelare i som andel får sitt marginella bidrag till den koalition som bildas i det ögonblick då spelaren träder in i spelet, dvs. $\Delta_i(S_i(\pi))$, något som också är möjligt eftersom summan av alla dessa bidrag blir lika med $v(N)$.

Koalitionsspelsbegreppet innehåller emellertid inte något antagande om hur storkoalitionen sätts samman, så Shapleyvärdet betraktar alla $n!$ sätten att bilda storkoalitionen som likvärdiga och tilldelar spelare i medelvärdet av alla hans marginella bidrag enligt ovanstående beskrivning.

Sats 11.2.1 har följande korollarium.

Korollarium 11.2.2 *Om spelet $\langle N, v\rangle$ är superadditivt, så är dess Shapleylösning $\phi(v)$ en imputering.*

Bevis. Eftersom marginalbidraget $\Delta_i(S_i(\pi)) \geq v(\{i\})$ för alla permutationer π, så följer det av den första likheten i sats 11.2.1 att

$$\phi_i(v) \geq \frac{1}{n!}\sum_{\pi} v(\{i\}) = v(\{i\})$$

för alla $i \in N$. Vektorn $\phi(v)$ är med andra ord individuellt rationell och därmed en imputering. □

Exempel 11.2.2 Låt oss med hjälp av sats 11.2.1 beräkna Shapleylösningen till spelet $\langle\{1,2,3\}, v\rangle$ om $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 1$, $v(\{3\}) = 2$, $v(\{1,2\}) = 4$, $v(\{1,3\}) = 6$, $v(\{2,3\}) = 5$, $v(\{1,2,3\}) = 8$. Spelarnas marginella bidrag till de olika koalitioner som de deltar i, är

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\{1\}) = 1,\ \Delta_1(\{1,2\}) = 3,\ \Delta_1(\{1,3\}) = 4,\ \Delta_1(\{1,2,3\}) = 3;\\
&\Delta_2(\{2\}) = 1,\ \Delta_2(\{1,2\}) = 3,\ \Delta_2(\{2,3\}) = 3,\ \Delta_2(\{1,2,3\}) = 2;\\
&\Delta_3(\{3\}) = 2,\ \Delta_3(\{1,3\}) = 5,\ \Delta_3(\{2,3\}) = 4,\ \Delta_1(\{1,2,3\}) = 4.
\end{aligned}$$

Spelarnas Shapleyvärden är därför

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}(3+4) + 3) = \tfrac{5}{2}\\
\phi_2(v) &= \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}(3+3) + 2) = 2\\
\phi_3(v) &= \tfrac{1}{3}(2 + \tfrac{1}{2}(5+4) + 4) = \tfrac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Som kontroll kan vi konstatera att summan av Shapleyvärdena är lika med storkoalitionens värde 8. □

Exempel 11.2.3 Vi beräknar Shapleylösningen för produktionsmodellen i exempel 10.3.2: en fabriksägare (spelare 0), n arbetare (spelarna 1, 2, …, n), och värdefunktion $v(S) = 0$ om $0 \notin S$ och $v(S) = f((|S|-1)$ om $0 \in S$. Funktionen f förutsätts vara växande och konkav, och $f(0) = 0$.

Eftersom arbetarna är utbytbara räcker det att beräkna fabriksägarens Shapleyvärde $\phi_0(v)$. För koalitioner S som innehåller spelare 0 är $\Delta_0(S) = f(|S|-1)$, så därför är enligt sats 11.2.1

$$\begin{aligned}
\phi_0(v) &= \frac{1}{n+1}\sum_{S\ni 0}\frac{f(|S|-1)}{\binom{n}{|S|-1}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\substack{S\ni 0\\|S|=k}}\frac{f(|S|-1)}{\binom{n}{|S|-1}}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f(k-1)}{\binom{n}{k-1}}\,M_k,
\end{aligned}$$

där M_k är antalet delmängder S av $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ som består av k stycken tal och innehåller talet 0. Detta antal är $M_k = \binom{n}{k-1}$, och genom att substituera detta i uttrycket ovan får man

$$\phi_0(v) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

Arbetarna får dela resterande belopp $f(n) - \phi_0(v)$ lika, vilket innebär att varje arbetares Shapleyvärde är

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n}\Big(f(n) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(k)\Big).$$

Det kan vara intressant att jämföra Shapleylösningen med nukleollösningen, som vi beräknade i exempel 10.6.4; nukleollösningen ger varje arbetare $\frac{1}{2}(f(n) - f(n-1))$ värdeenheter. På grund av konkaviteten är

$$f(n) - f(k) = \sum_{j=1}^{n-k} (f(j+k) - f(j+k-1)) \geq (n-k)(f(n) - f(n-1)).$$

Det följer därför att

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \frac{1}{n(n+1)}\Big(nf(n) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\Big) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (f(n) - f(k)) \\ &\geq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(f(n) - f(n-1)) = \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1)).\end{aligned}$$

Shapleylösningen är således bättre än nukleollösningen för arbetarna.

Om arbetarnas marginalprodukt $f(k) - f(k-1)$ avtar måttligt när k växer, så ligger Shapleylösningen i spelets kärna; avtar den däremot mycket snabbt ligger den inte i kärnan beroende på att den ger arbetarna för stor tilldelning. Jämför med övning 11.5. □

Övningar

11.3 Bestäm Shapleyvärdena till spelet $\langle\{1, 2, 3\}, v\rangle$ där $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = -1$, $v(\{1, 2\}) = 4$, $v(\{1, 3\}) = 1$, $v(\{2, 3\}) = 2$, $v(\{1, 2, 3\}) = 4$.

11.4 (Marknad med en säljare och två köpare) Spelare 1 äger ett föremål som saknar värde för honom och som han därför önskar sälja. Föremålet är värt a kronor för spelare 2 och b kronor för spelare 3, där $b > a$. Formulera detta som ett koalitionsspel och bestäm Shapleylösningen. Ligger Shapleylösningen i kärnan?

11.5 Beräkna Shapleylösningen för produktionsmodellen i exempel 11.2.3 då $n = 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 8$, $f(2) = 12$, $f(3) = 14$ och $f(4) = 15$, och visa att den inte ligger i kärnan.

11.6 Beräkna Shapleylösningen till n-personersspelet $\langle N, v\rangle$ när

a) $v(S) = \begin{cases} |S| & \text{om } 1 \in S, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$ b) $v(S) = \begin{cases} |S| & \text{om } 1, 2 \in S, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

11.7 Betrakta produktionsmodellen i exempel 11.2.3 i fallet $f(k) = k^\alpha$, där $0 < \alpha \leq 1$. Antag att antalet arbetare n är mycket stort. Visa att Shapleylösningen ligger i kärnan och att fabriksägaren får approximativt $\frac{1}{\alpha+1} n^\alpha$ värdeenheter medan arbetarna får dela resterande $\frac{\alpha}{\alpha+1} n^\alpha$ lika. Jämför med nukleollösningen, som ger fabriksägaren approximativt $(1 - \frac{\alpha}{2}) n^\alpha$ värdeenheter och arbetarna totalt $\frac{\alpha}{2} n^\alpha$ värdeenheter.
[Ledning: Utnyttja att Riemansumman $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^\alpha$ är en approximation till integralen $\int_0^1 x^\alpha \, dx$.]

11.3 Shapley–Shubiks styrkeindex

Shapleylösningen ger ett mått på olika individers eller gruppers röststyrka vid voteringar. Betrakta en omröstning i exempelvis en politisk församling, på ett föreningsmöte eller på en bolagsstämma med n spelare (partier, medlemmar eller aktieägare), där ett visst förslag antingen kan antas eller förkastas, och där utgången beror på vilken koalition av deltagare som stödjer förslaget. Om koalitionen S kan rösta igenom förslaget kallar vi S en vinnande koalition, annars är den en förlorande koalition. Vi förutsätter givetvis att varje delmängd av en förlorande koalition är förlorande och att varje koalition som innehåller en vinnande koalition också är vinnande.

Genom att definiera

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{om koalitionen } S \text{ är vinnande,} \\ 0 & \text{om koalitionen } S \text{ är förlorande} \end{cases}$$

kan vi modellera omröstningen som ett enkelt koalitionsspel $\langle N, v\rangle$, och begreppen vinnande och förlorande koalition får exakt de betydelser som vi gav dem i definition 10.3.1. Med en röstandes *Shapley–Shubik-styrkeindex* menas nu helt enkelt den röstandes Shapleyvärde i detta spel.

För enkla koalitionsspel förenklas formeln för Shapleyvärdet i sats 11.2.1 av att spelarnas marginalbidrag $\Delta_i(S)$ bara kan anta värdena 0 och 1. Marginalbidraget är 1 endast om $v(S) = 1$ och $v(S \setminus \{i\}) = 0$, dvs. S är en vinnande koalition och $S \setminus \{i\}$ är en förlorande koalition. Formeln för spelare i:s Shapley-Shubik-index blir därför

$$\phi_i(v) = n^{-1} \sum_{\substack{S \text{ vinnande} \\ S\setminus\{i\} \text{ förlorande}}} \binom{n-1}{|S|-1}^{-1}. \tag{6}$$

De vanligaste typerna av omröstningsspel beskrivs i följande definition.

Definition 11.3.1 Låt $w_1, w_2, \dots, w_n$ vara icke-negativa tal och q vara ett positivt tal. Det enkla koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ som fås genom att definiera

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{om } \sum_{i\in S} w_i > q, \\ 0 & \text{om } \sum_{i\in S} w_i \leq q \end{cases}$$

kallas ett *viktat omröstningsspel* med talen w_i som *vikter.*

Om $q = \frac{1}{2}\sum_{i\in N} w_i$ kallas spelet ett *viktat majoritetsspel.*

Exempel 11.3.1 Vi får beslut med enkel majoritet genom att välja alla vikterna lika med 1 och $q = n/2$, beslut med kvalificerad majoritet genom att välja alla vikterna lika med 1 och $q = 2n/3$ om det är två tredjedelsmajoritet som erfordras för att beslutet skall gå igenom. För beslut som kräver enhällighet är $w_i = 1$ för alla spelare i, och $q = n - \frac{1}{2}$. Spelare 1 är en diktator om $w_1 = 1$, $w_i = 0$ för $i \geq 2$ och $q = \frac{1}{2}$.

Vid beslut som kräver enkel majoritet, kvalificerad majoritet eller enhällighet har samtliga spelare Shapley–Shubik-index $\frac{1}{n}$ eftersom spelarna är parvis utbytbara. Vid diktatoriska beslut har diktatorn Shapley–Shubik-index 1 och de övriga spelarna index 0, eftersom de är statister i sammanhanget.

I dessa fall följer indexvärdena direkt ur definitionen av Shapleylösning som lösning till villkoren i sats 11.1.3, men låt oss ändå beräkna Shapley–Shubik-index med hjälp av formel (6) i fallet enkel majoritet.

Om n är antalet spelare och $n = 2k$ eller $n = 2k+1$, så är en koalition S som innehåller spelare i vinnande medan koalitionen $S \setminus \{i\}$ är förlorande, om och endast om $|S| = k+1$, och antalet sådana koalitioner är $\binom{n-1}{k}$. Enligt formel (6) är därför

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= n^{-1} \sum_{\substack{S \text{ vinnande} \\ S\setminus\{i\} \text{ förlorande}}} \binom{n-1}{|S|-1}^{-1} = n^{-1} \sum_{|S|=k+1} \binom{n-1}{|S|-1}^{-1} \\ &= n^{-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k}^{-1} = n^{-1}.\end{aligned}$$ □

På bolagsstämmor i aktiebolag som bara emitterat aktier med lika röstetal, har varje aktieägare lika många röster som antalet ägda aktier, och för att ett förslag ska godkännas måste det stödjas av en majoritet av aktierna. En bolagsstämma kan därför betraktas som ett viktat majoritetsspel.

Exempel 11.3.2 De fyra ägarna av ett aktiebolag, spelarna 1, 2, 3 och 4, har 10, 20, 30 respektive 40 aktier. Detta innebär att de vinnande koalitionerna är $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,4\}$ och $\{3,4\}$.

Den enda vinnande koalition S, som innehåller 1 och där $S \setminus \{1\}$ är förlorande, är $S = \{1,2,3\}$, och detta betyder att

$$\phi_1(v) = \frac{1}{4}\binom{3}{2}^{-1} = \frac{1}{12}.$$

För spelare 2 är motsvarande koalitioner $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ och $\{2,4\}$, varför

$$\phi_2(v) = \frac{1}{4}\Big(2\binom{3}{2}^{-1} + \binom{3}{1}^{-1}\Big) = \frac{1}{4}.$$

För spelare 3 är koalitionerna $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$ och $\{3,4\}$ vinnande men förlorande om man tar bort spelaren. Detta innebär att $\phi_3(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{4}$.

Samtliga vinnande koalitioner med spelare 4 som medlem utom storkoalitionen förlorar om spelare 4 går ur, varför

$$\phi_4(v) = \frac{1}{4}\Big(2\binom{3}{1}^{-1} + 3\binom{3}{2}^{-1}\Big) = \frac{5}{12}.$$

Aktieägarnas Shapley–Shubik-index är således $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{5}{12}$. Det är noterbart att ägarna 2 och 3 har samma index trots att ägare 3 har fler aktier. □

Övningar

11.8 Verifiera med hjälp av formel (6) att samtliga spelare har samma Shapley–Shubik-index i omröstningsspel där enhällighet krävs.

11.9 Bestäm Shapley–Shubiks styrkeindex i ett aktiebolag med fyra delägare som har 1, 3, 3 respektive 4 aktier.

11.10 Bestäm Shapley–Shubik-index för spelarna i ett viktat majoritetsspel med $n \geq 3$ spelare, där $w_1 = 2n - 3$ och $w_i = 2$ för övriga spelare i.

11.11 FNs säkerhetsråd består av 15 medlemsnationer, varav 5 är permanenta medlemmar med vetorätt. För att en resolution ska godkännas krävs det att 9 nationer röstar för och att ingen av de 5 permanenta nationerna röstar emot. En omröstning i säkerhetsrådet kan betraktas som ett viktat omröstningsspel, där var och en av de fem permanenta medlemsnationerna har vikt 7 och de andra tio medlemsnationerna vardera har vikt 1, och där det krävs en viktsumma på 39 för att en resolution ska godkännas. Bestäm Shapley–Shubiks styrkeindex för en permanent medlemsnation och för en icke-permanent medlemsnation.

Kapitel 12

Koalitionsspel utan överförbar nytta

I koalitionsspel med överförbar nytta karakteriseras varje koalition S av ett tal $v(S)$ som representerar det värde som koalitionens medlemmar förfogar över, och huvudproblemet är att fördela storkoalitionens värde $v(N)$ bland spelarna.

I det här kapitlet ska vi mycket kortfattat behandla koalitionsspel utan överförbar nytta. I ett sådant spel ska spelarna enas om ett alternativ ur en given mängd X. Varje spelare har sina preferenser som kan beskrivas av preferensrelationer eller nyttofunktioner. Spelarna kan inte kompensera varandra genom att överföra nytta, och ett skäl för att detta inte är möjligt kan vara att de inte mäter sina nyttor i jämförbara enheter. Spelarna kan emellertid bilda koalitioner, och varje koalition S antas kontrollera en delmängd $V(S)$ av X, något som gör det möjligt för en koalition S att blockera ett av storkoalitionen föreslaget alternativ $x \in V(N)$ om den har ett alternativ $y \in V(S)$ som alla koalitionsmedlemmarna i S tycker bättre om än x. Detta betraktelsesätt leder som vi ska se till en generalisering av begreppet kärna.

12.1 Koalitionsspel utan överförbar nytta

Definition 12.1.1 Ett *koalitionsspel utan överförbar nytta* består av

- en ändlig mängd N (av spelare);
- en mängd X (av handlingar);
- för varje koalition S (dvs. icke-tom delmängd av N) en delmängd $V(S)$ av X;
- för varje spelare $i \in N$ en preferensrelation $\succeq_i$ på X.

I följande tre definitioner är $\langle N, X, V, (\succeq_i) \rangle$ ett godtyckligt koalitionsspel utan överförbar nytta.

Definition 12.1.2 Koalitionen S har en *stark invändning* mot handlingen $x \in X$ om det finns en handling $y \in V(S)$ sådan att $y \succ_i x$ för alla $i \in S$.

Det är förstås inte rationellt för en koalition att acceptera en föreslagen handling om det finns en handling som koalitionen själv förfogar över och som alla koalitionsmedlemmar tycker bättre om. Detta leder till begreppet kärna.

Definition 12.1.3 Koalitionsspelets *kärna* består av alla handlingar i $V(N)$ som ingen koalition har någon stark invändning mot.

En handling $x \in V(N)$ tillhör med andra ord kärnan om och endast om det för varje koalition S och varje handling $y \in V(S)$ finns minst en koalitionsmedlem $i \in S$ som tycker minst lika bra om x som y (dvs. $x \succeq_i y$).

En svagare typ av invändning leder till begreppet Paretooptimalitet.

Definition 12.1.4 Koalitionen S har en *svag invändning* mot handlingen $x \in X$ om det finns en handling $y \in V(S)$ med egenskapen att $y \succeq_i x$ för alla koalitionsmedlemmar $i \in S$ och $y \succ_i x$ för minst en koalitionsmedlem i.

En handling $x \in V(N)$ kallas *Paretooptimal* om storkoalitionen N inte har någon svag invändning mot x.

En handling i $V(N)$ är med andra ord Paretooptimal om och endast om det inte finns någon annan handling som storkoalitionen förfogar över och som alla spelarna tycker är minst lika bra och någon spelare tycker är bättre.

En handling i kärnan behöver inte vara Paretooptimal, ty att storkoalitionen inte har någon stark invändning mot handlingen betyder inte att den inte kan ha en svag invändning mot handlingen. Se övning 12.1 för ett exempel.

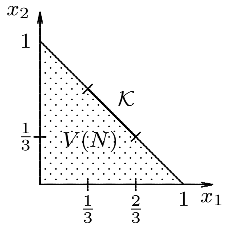
EXEMPEL 12.1.1 Låt $\langle N, X, V, (\succeq_i)\rangle$ vara det koalitionsspel utan överförbar nytta som definieras av att

$$\begin{aligned}
&N = \{1,2\}, \quad X = \mathbf{R}^2_+,\\
&V(\{1\}) = \{(x_1,0) \mid 0 \le x_1 \le \tfrac{1}{3}\}, \quad V(\{2\}) = \{(0,x_2) \mid 0 \le x_2 \le \tfrac{1}{3})\},\\
&V(N) = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1 - x_1, \ \ 0 \le x_1 \le 1\}\\
&(x_1,x_2) \succeq_1 (y_1,y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 \ge y_1\\
&(x_1,x_2) \succeq_2 (y_1,y_2) \ \Leftrightarrow \ x_2 \ge y_2.
\end{aligned}$$

Se figur 12.1.

Koalitionen $\{1\}$ har en stark invändning mot alla handlingar (x_1, x_2) med $x_1 < \frac{1}{3}$, nämligen invändningen $y = (\frac{1}{3}, 0)$, men saknar starka invändningar mot handlingar med $x_1 \ge \frac{1}{3}$.

Koalitionen $\{2\}$ har på motsvarande sätt en stark invändning mot alla handlingar (x_1, x_2) med $x_2 < \frac{1}{3}$, men saknar starka invändningar mot handlingar med $x_2 \ge \frac{1}{3}$.



Figur 12.1. Handlingsmängden $V(N)$ och kärnan $\mathcal{K}$ för spelet i exempel 12.1.1.

Storkoalitionen N har starka invändningar mot handlingar (x_1, x_2) i triangeln $V(N)$ med $x_1 + x_2 < 1$, eftersom det finns punkter (y_1, y_2) i triangeln där $x_1 < y_1$ och $x_2 < y_2$, men storkoalitionen saknar såväl starka som svaga invändningar om $x_1 + x_2 = 1$, eftersom $y_1 + y_2 > 1$ om $y_i \geq x_i$ för $i = 1, 2$ med sträng olikhet på åtminstone ett ställe.

Spelets kärna är därför mängden

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1,\ \tfrac{1}{3} \leq x_1 \leq \tfrac{2}{3}\},$$

och en handling (x_1, x_2) är Paretooptimal om och endast om den ligger på triangelsidan

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1,\ 0 \leq x_1 \leq 1\}.$$

□

Exempel 12.1.2 Varje koalitionsspel $\langle N, v\rangle$ med överförbar nytta kan översättas till ett koalitionsspel $\langle N, X, V, (\succeq_i)\rangle$ utan överförbar nytta på följande sätt:

$$\begin{aligned}
&X = \mathbf{R}^n,\\
&V(S) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i\in S} x_i = v(S) \ \text{ och } \ x_j = 0 \quad \text{för alla } j \notin S\},\\
&x \succeq_i y \ \text{ om och endast om } \ x_i \geq y_i.
\end{aligned}$$

Koalitionsspel med överförbar nytta kan därför uppfattas som specialfall av koalitionsspel utan överförbar nytta. Kärnan blir densamma oavsett om vi använder definitionen av kärna för spel med överförbar nytta eller definitionen av kärna för spel utan överförbar nytta. □

Övning

12.1 Bestäm de Paretooptimala handlingarna och kärnan i spelet $\langle N, X, V, (\succeq_i)\rangle$ där $N = \{1, 2\}$, $X = \mathbf{R}^2$, $V(\{1\}) = V(\{2\}) = \{(0, 0)\}$, $(x_1, x_2) \succeq_i (y_1, y_2)$ om och endast om $x_i \geq y_i$, och

a) $V(N) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ b) $V(N) = \{(x_1, x_2) \mid \max_{i\in N} |x_i| \leq 1\}$

c) $V(N) = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$.

12.2 Bytesekonomier

Exempel 12.2.1 Betrakta ett samhälle utan pengar där all handel sker genom byten. För enkelhets skull antar vi att samhället bara består av två personer och att det bara finns två bytesvaror − hallonsylt och lingonsylt. Person 1 har från början 8 kg hallonsylt och 2 kg lingonsylt, vilket vi anger genom att säga att hans varukorg ges av vektorn $a = (8, 2)$. Person 2 har 2 kg hallonsylt och 5 kg lingonsylt, så hans initiala varukorg beskrivs av vektorn $b = (2, 5)$.

De två personerna tycker olika mycket om sylt; deras preferenser för en varukorg (x_1, x_2) av hallon- och lingonsylt beskrivs av nyttofunktionerna $u_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ resp. $u_2(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$. Det kan alltså vara fördelaktigt för båda att byta vissa kvantiteter sylt med varandra.

Vi kan modellera situationen som ett koalitionsspel med två spelare och handlingsmängd $X = \mathbf{R}^2_+ \times \mathbf{R}^2_+$ $(= \mathbf{R}^4_+)$ och med följande tolkning av ett element $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ i handlingsmängden: första halvan (x_1, x_2) är spelare 1:s varukorg och andra halvan (y_1, y_2) är spelare 2:s varukorg av hallon- resp. lingonsylt.

Alla element (x, y) i X är förstås inte möjliga att uppnå genom byte, ty tillsammans förfogar de båda spelarna bara över 10 kg hallonsylt och 7 kg lingonsylt. Därför sätter vi

$$V(N) = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^4_+ \mid x_1 + y_1 = 10,\ \ x_2 + y_2 = 7\}.$$

Elementen i $V(N)$ beskriver resultaten av alla möjliga byten.

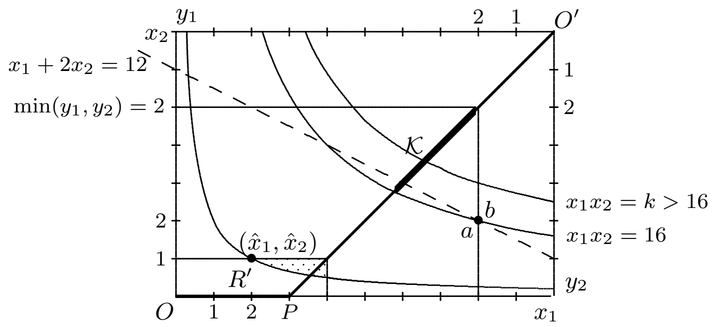
Om spelarna inte samarbetar händer ingenting; spelarna har bara de syltmängder som de hade från början. Därför är

$$V(\{1\}) = V(\{2\}) = \{(a, b)\} = \{(8, 2, 2, 5)\}.$$

Spelarnas preferenser för ett visst utfall ges av funktionerna ovan, men vi måste modifiera definitionerna så att funktionerna blir definierade på X. Vi antar att spelarna bara bryr sig om det egna innehavet och sätter därför

$$u_1(x, y) = x_1x_2 \quad \text{och} \quad u_2(x, y) = \min(y_1, y_2).$$

Spelet kan illustreras grafiskt med hjälp av *Edgeworths låda.* Låt R vara en rektangel med längd $a_1 + b_1 = 10$ och bredd $a_2 + b_2 = 7$, och välj två motstående hörn som origon för varsitt koordinatsystem Ox_1x_2 och $O'y_1y_2$ med koordinataxlar utefter rektangelns sidor som i figur 12.2. Sambandet mellan en punkts koordinater (x_1, x_2) och (y_1, y_2) i respektive koordinatsystem ges av att $x_1 + y_1 = 10$ och $x_2 + y_2 = 7$. Detta innebär att fyrtipeln (x, y) ligger i $V(N)$ om och endast om (x_1, x_2) och (y_1, y_2) är koordinater för en och samma punkt i rektangeln R. Speciellt är alltså (a_1, a_2) och (b_1, b_2) koordinater för samma punkt.



Figur 12.2. Edgeworths låda för exempel 12.2.1. Punkterna på den brutna linjen OPO' är Paretooptimala varukorgar, och kärnan $\mathcal{K}$ består av alla Paretooptimala varukorgar mellan hyperbeln $x_1x_2 = 16$ och ”vinkelhakskurvan” $\min(y_1, y_2) = 2$. Den streckade linjen $x_1 + 2x_2 = 12$ utgör budgetgränsen för spelarna när varorna prissätts av jämviktspriset; spelare 1 kan finansiera alla varukorgar som ligger under linjen och spelare 2 alla varukorgar som ligger över linjen. Linjens skärningspunkt med kärnan $(6, 3, 4, 4)$ är konkurrensjämviktslösningen.

Vi kan således identifiera $V(N)$ med rektangeln R. I rektangeln kan vi vidare rita in spelarnas indifferenskurvor − hyperblerna $x_1x_2 = k_1$ och ”vinkelhakskurvorna” $\min(y_1, y_2) = k_2$ för olika värden på k_1 och k_2. Genom den initiala punkten med x-koordinaterna $(8, 2)$ och y-koordinaterna $(2, 5)$ passerar indifferenskurvorna $x_1x_2 = 16$ och $\min(y_1, y_2) = 2$. Dessa är utritade i figur 12.2.

Punkterna på den brutna linjen OPO' med ekvationen

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le x_1 \le 3, \\ x_1 - 3 & \text{om } 3 < x_1 \le 10, \end{cases}$$

som i figuren ritats med tjockare linjer, representerar de Paretooptimala varukorgarna. För att se detta noterar vi först att i punkter $(x, y) \in V(N)$ med $x_2 = 0$ och $0 \le x_1 \le 3$ är spelare 1:s nytta 0 och spelare 2:s nytta maximala 7, eftersom $y_1 = 10 - x_1 \ge 7 = y_2$. Spelare 2 kan därför inte förbättra sin nytta, och i punkter med positiv nytta för spelare 1 är $x_2 > 0$ och följaktligen spelare 2:s nytta mindre än 7, eftersom $y_2 = 7 - x_2$.

I en punkt (x, y) där $x_2 = x_1 - 3$ och $3 < x_1 \le 10$, är $y_1 = 10 - x_1 = 7 - x_2 = y_2$. En förbättring av spelare 2:s nytta kan bara ske genom att öka både y_1 och y_2, men då minskar x_1 och x_2 och därmed också spelare 1:s nytta x_1x_2. En ökning av spelare 1:s nytta kräver å andra sidan att x_1 eller x_2 ökar, och i båda fallen minskar spelare 2:s nytta.

Detta visar att alla punkter på den brutna linjen OPO' är Paretooptimala. Inga punkter utanför den brutna linjen är Paretooptimala, ty för alla punkter utanför denna linje, finns det punkter som är bättre för båda spelarna. Om en punkt med x-koordinaterna $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ligger ovanför den brutna linjen, så är spelare 2:s nytta strikt större i alla punkter inom rektangeln R' med sidorna $x_1 = 0,\ x_2 = \hat{x}_2,\ x_1 = \hat{x}_2 + 3$ och $x_2 = 0$ (se figur 12.2), medan spelare 1:s nytta är strikt större i alla punkter ovanför indifferenskurvan $x_1x_2 = \hat{x}_1\hat{x}_2$, som passerar genom punkten $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Eftersom snittet mellan dessa områden inte är tomt (se det skuggade området i figuren), finns det en punkt som ger båda spelarna strikt större nytta än vad $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ gör. Motsvarande gäller om punkten ligger under den brutna linjen.

I det här fallet sammanfaller mängden av Paretooptimala handlingar med mängden av handlingar som storkoalitionen inte har någon *stark* invändning mot, så kärnan är en delmängd av mängden av Paretooptimala handlingar. Ursprungsinnehavet $(a, b) = (8, 2, 2, 5)$ är en stark invändning för spelare 1 mot alla varukorgar (x, y) med $x_1x_2 < 16$ och för spelare 2 mot alla varukorgar med $\min(y_1, y_2) < 2$. Spelets kärna $\mathcal{K}$ är därför lika med snittet mellan den brutna linjen och området mellan hyperbeln $x_1x_2 = 16$ och "vinkelhakskurvan" $\min(y_1, y_2) = 2$. Skärningspunkten mellan linjen och hyperbeln har x_1-koordinat $(3 + \sqrt{73})/2 \approx 5.77$. Kärnan $\mathcal{K}$ består således av varukorgarna $(x_1, x_1 - 3, 10 - x_1, 10 - x_1)$, där $5.77 \le x_1 \le 8$.

Låt oss se vad som händer om vi introducerar pengar i bytessamhället och prissätter sylten så att kilopriset för hallonsylt blir 1 kr och kilopriset för lingonsylt blir p kr. Detta innebär att spelare 1:s syltförmögenhet är $8 + 2p$ kr och spelare 2:s syltförmögenhet är $2 + 5p$ kr. Låt dem nu handla av varandra och använda sina ekonomiska resurserna så att de maximerar sina respektive nyttofunktioner. Eftersom de inte får överskrida sina ekonomiska ramar, betyder detta att de båda spelarna ska lösa maximeringsproblemen

$$\text{Maximera } x_1x_2 \text{ då } \begin{cases} x_1 + px_2 \le 8 + 2p \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \text{Maximera } \min(y_1, y_2) \text{ då } \begin{cases} y_1 + py_2 \le 2 + 5p \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Lösningarna till de båda problemen är

$$x_1 = 4 + p,\ x_2 = \frac{p+4}{p} \quad \text{och} \quad y_1 = y_2 = \frac{5p+2}{p+1}.$$

Detta är gott och väl, men finns det tillräckligt med sylt för ett sådant byte eller blir det sylt över? Problemet är att de båda spelarna skall handla av varandra, och då måste prissättningen vara sådan att ovanstående optimala lösningar går att genomföra. Priset p måste med andra ord vara satt så att

$$x_1 + y_1 = 4 + p + \frac{5p+2}{p+1} = 10 \quad \text{och} \quad x_2 + y_2 = \frac{p+4}{p} + \frac{5p+2}{p+1} = 7.$$

De båda ekvationerna har en unik (positiv) lösning, nämligen $p = 2$. Den (i det här fallet) unika prisvektorn $(1, 2)$ på hallon- resp. lingonsylt kallas *konkurrensjämviktspriset.* Naturligtvis påverkas inte lösningen av att man byter valuta, så $(\lambda, 2\lambda)$ är också ett konkurrensjämviktspris för varje $\lambda > 0$.

För $p = 2$ är de optimala lösningarna $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 4$. I jämviktslösningen ska alltså spelare 1 sälja 2 kg hallonsylt till spelare 2 och köpa 1 kg lingonsylt av honom.

Observera att konkurrensjämviktslösningen $(6, 3, 4, 4)$ tillhör kärnan. Det är, som vi strax ska visa, ingen tillfällighet. □

Resonemangen i exempel 12.2.1 kan förstås generaliseras till bytesmarknader med fler än två aktörer och två varor. Detta leder till följande definition.

Definition 12.2.1 En *bytesekonomi* består av

- en ändlig mängd N;
- ett positivt heltal m;
- för varje $i \in N$ en vektor $a_i \in \mathbf{R}^m_+$;
- för varje $i \in N$ en preferensrelation $\succeq_i$ på $\mathbf{R}^m_+$.

Tolkningen av de olika ingredienserna i bytesekonomin är som följer:

N är mängden av *aktörer*, totalt n stycken, och m är antalet *varor* i ekonomin. En aktör i:s innehav av de olika varorna beskrivs med hjälp av vektorer $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) \in \mathbf{R}^m_+$, där x_{ik} anger mängden av vara k.

Vektorn a_i är aktör i:s ursprungliga innehav av varorna före alla byten.

$x_i \succeq_i y_i$ betyder att varukorgen x_i uppfattas som minst lika bra som varukorgen y_i av aktör i.

En *allokering* i bytesekonomin är en fördelning av varorna bland aktörerna och beskrivs av en mn-tipel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, där $x_i \in \mathbf{R}^m$ är i:s varukorg och $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i$.

Det är underförstått att varorna i en bytesekonomi kan överföras fritt mellan aktörerna, men de har inget sätt att kompensera varandra annat än genom att byta varor.

En *prisvektor* i bytesekonomin är en vektor $p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbf{R}^m_+$ som inte är identiskt noll. För prisvektorn p ges värdet av aktör i:s varukorg $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ av skalärprodukten $p \cdot x_i = \sum_{k=1}^m p_k x_{ik}$.

Definition 12.2.2 En *konkurrensjämvikt* i bytesekonomin är ett par (p^*, x^*) bestående av en prisvektor p^* och en allokering $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ med egenskapen att varje aktör i prefererar varukorgen x_i^* bland alla varukorgar x_i som han kan finansiera med hjälp av sitt initiala innehav a_i, dvs.

$$p^* \cdot x_i^* \le p^* \cdot a_i \quad \text{och} \quad p^* \cdot x_i \le p^* \cdot a_i \;\Rightarrow x_i^* \succeq x_i.$$

Följande sats är ett specialfall av en mer generell sats av Arrow och Debreu om jämvikter i marknader med såväl konsumtion som produktion.

Sats 12.2.1 *En bytesekonomi har en konkurrensjämvikt om följande fem villkor är uppfyllda för alla $i \in N$:*

(i) $a_i > 0$, *dvs. samtliga aktörer har från början en positiv kvantitet av alla varor.*

(ii) $\succeq_i$ *är en kontinuerlig preferensrelation.*

(iii) $\succeq_i$ *är växande, vilket betyder att* $x_i \succeq_i y_i$ *om* $x_i \geq y_i$, *dvs. "mer är bättre".*

(iv) $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i \succ_i y_i$ *om* $x_i \succ_i y_i$ *och* $0 < \lambda < 1$.

(v) för varje varukorg $x_i \in \mathbf{R}^m_+$ *finns det en varukorg* $y_i \in \mathbf{R}^m$ *sådan att* $y_i \succ_i x_i$.

Anmärkning. Jämviktsallokeringen behöver inte vara entydigt bestämd.

Bytesekonomier kan uppfattas som koalitionsspel utan överförbar nytta på följande sätt. Till bytesekonomin i definition 12.2.1 associerar vi koalitionsspelet $\langle N, X, V, (\succeq_i')\rangle$, där

- $X = \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^m_+ \times \cdots \times \mathbf{R}^m_+$ (n faktorer);
- $V(S) = \{x \in X \mid \sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\in S} a_i$ och $x_j = a_j$ för alla $j \notin S\}$;
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succeq_i' (y_1, y_2, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_i \succeq_i y_i$.

Det andra villkoret innebär att varje koalition kan fördela varorna, som koalitionen initialt förfogar över, fritt mellan sina medlemmar, och det tredje villkoret innebär att varje spelare endast bryr sig om sin egen konsumtion.

Definition 12.2.3 Med en bytesekonomis *kärna* menas kärnan hos motsvarande koalitionsspel.

Sats 12.2.2 *Om en bytesekonomi ha en konkurrensjämvikt* (p^*, x^*), *så ligger jämviktsallokeringen* x^* *i bytesekonomins kärna.*

Bevis. Antag att x^* inte ingår i kärnan. Då finns det en koalition S och för varje spelare $i \in S$ en varukorg y_i så att $\sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} a_i$ och $y_i \succ_i x_i^*$. Av definitionen av (p^*, x^*) som konkurrensjämvikt följer därför att varukorgarna y_i inte kan uppfylla spelarnas budgetrestriktioner, dvs. $p^* \cdot y_i > p^* \cdot a_i$ för alla $i \in S$. Detta medför att $p^* \cdot \sum_{i\in S} y_i > p^* \cdot \sum_{i\in S} a_i$, vilket strider mot att $\sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} a_i$. □

Det följer förstås som korollarium till sats 12.2.2 att kärnan är icke-tom i varje bytesekonomi som har en konkurrensjämvikt.

Övning

12.2 Betrakta en bytesekonomi med två varor och två aktörer. Aktör 1:s initiala varukorg ges av vektorn $(1,1)$ medan aktör 2:s initiala varukorg ges av vektorn $(2,1)$. Preferenserna för varukorgen (x_1, x_2) beskrivs av nyttofunktionerna $u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ och $u_2(x_1x_2) = x_1x_2$. Bestäm ekonomins kärna och konkurrensjämvikt.

12.3 Nashs förhandlingslösning

Betrakta en förhandling mellan två parter, och låt X beteckna mängden av de alternativ som parterna förhandlar om. En möjlig utgång av förhandlingarna är att parterna inte kommer överens; detta alternativ kommer att betecknas D. Vi förutsätter att parternas preferenser för de olika förhandlingsalternativen kan beskrivas av två nyttofunktioner u_1 och u_2, samt att det finns åtminstone något alternativ i X som båda prefererar strikt framför alternativet D att inte komma överens.

Förhandlingen kan beskrivas som ett koalitionsspel utan överförbar nytta med $N = \{1, 2\}$, $V(\{1\}) = V(\{2\}) = \{D\}$ och $V(N) = X \cup \{D\}$.

Vi söker en rimlig och rättvis förhandlingslösning men för att komma fram till en sådan måste vi naturligtvis först specificera vad som bör menas med rimlig och rättvis. Som ett första steg börjar vi med att transformera vårt förhandlingsproblem så att det kommer att handla om att välja en punkt i en delmängd av $\mathbf{R}^2$ genom att sätta

$$S = \{(u_1(x), u_2(x)) \mid x \in X\} \quad \text{och} \quad d = (u_1(D), u_2(D)).$$

Om två förhandlingsalternativ x och x' avbildas på samma punkt i S, så är båda parterna indifferenta mellan dem, och vi kan därför nu koncentrera oss på att finna den ”rättvisa” punkten i S.

Vår förhandling har transformerats till ett koalitionsspel

$$\langle \{1, 2\}, \mathbf{R}^2, V, (\succeq_i)\rangle$$

utan överförbar nytta med koalitionsmängder $V(\{1\}) = V(\{2\}) = \{d\}$ och $V(N) = S \cup \{d\}$, och med de båda spelarnas preferenser givna av att

$$(x_1, x_2) \succeq_i (y_1, y_2) \text{ om och endast om } \quad x_i \geq y_i.$$

Antagandet att det finns något förhandlingsalternativ som båda spelarna prefererar strikt framför sammanbrottsalternativet D innebär att det finns en punkt $x \in S$ med egenskapen att $x > d$. Här betyder förstås $x = (x_1, x_2) > d = (d_1, d_2)$ att $x_1 > d_1$ och $x_2 > d_2$.

Med en *förhandlingslösning* menas nu en funktion f som till varje mängd S och varje punkt d sådan att mängden $\{x \in S \mid x > d\}$ inte är tom associerar en unik punkt $f(S, d)$ i S.

Ett rimligt krav för att en förhandlingslösning ska uppfattas som rättvis är förstås att punkten $f(S, d)$ är Paretooptimal och ligger i förhandlingsspelets kärna. Problemet är förstås att kärnan i allmänhet består av mer än en punkt. Spelaren i enmanskoalitionen $\{i\}$ har starka invändningar mot förhandlingsförslag x med $x_i < d_i$, så kärnan är en delmängd till mängden $S^*(d) = \{x \in S \mid x \geq d\}$.

Nashs axiom

Nashs idé bestod i att definiera en lösning till förhandlingsspelet såsom varande ”rättvis och förnuftig” om den uppfyller fyra önskvärda egenskaper samt att visa att dessa egenskaper bestämmer lösningen entydigt för kompakta, konvexa mängder S.

I fortsättningen antar vi därför att S är en kompakt, konvex delmängd av $\mathbf{R}^2$, att d är en punkt i $\mathbf{R}^2$, och att S innehåller någon punkt x med egenskapen att $x > d$. Med beteckningarna $f_1(S,d)$ och $f_2(S,d)$ för koordinaterna till lösningsfunktionen $f(S,d)$ ser Nashs fyra axiom ut så här:

Axiom 1 (Paretooptimalitet) *Punkten $f(S,d)$ är Paretooptimal, dvs. det finns ingen punkt $x \in S$ sådan att $x_i \geq f_i(S,d)$ för $i = 1,2$ med strikt olikhet för minst ett i.*

Axiom 2 (Symmmetri) *Om mängden S är symmetrisk kring linjen $x_1 = x_2$ och $d_1 = d_2$, så är $f_1(S,d) = f_2(S,d)$.*

Axiom 3 (Oberoende av irrelevanta alternativ) *Om T är en sluten, konvex delmängd av S och $f(S,d) \in T$, så är $f(T,d) = f(S,d)$.*

En avbildning $\phi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ kallas en *skalning* om avbildningen har formen

$$\phi(x_1,x_2) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2),$$

där α_1, α_2 är positiva reella tal och β_1, β_2 är godtyckliga reella tal.

En skalning avbildar varje kompakt, konvex mängd S på en ny kompakt, konvex mängd $S' = \phi(S)$. Det fjärde axiomet ger sambandet mellan förhandlingslösningarna $f(S,d)$ och $f(S',d')$.

Axiom 4 (Skalningsinvarians) *För alla skalningar ϕ är*

$$f(\phi(S), \phi(d)) = \phi(f(S,d)).$$

I en förhandling där resultatet inte är Paretooptimalt finns det utrymme för omförhandlingar som leder till att åtminstone en part får det bättre utan att den andra får det sämre. Att en förhandlingslösning ska vara Paretooptimal är därför rimligt.

Mängden S är symmetrisk om

$$(x_1,x_2) \in S \;\Leftrightarrow\; (x_2,x_1) \in S.$$

Med en symmetrisk mängd och ett symmetriskt avbrottshot får vi exakt samma förhandlingssituation om de båda parterna byter plats med varandra, och det är ett naturligt rättvisekrav att förhandlingsresultatet inte ska få bero av hur vi numrerar parterna.

Antag att en förhandling med alternativmängd S och avbrottshot d leder fram till att förhandlingsresultatet $f(S,d)$ ligger i T. Detta tyder på att alternativen i $S \setminus T$ inte är attraktiva för parterna utan irrelevanta i sammanhanget. Om man inskränker förhandlingsmängden till T bör man därför erhålla samma förhandlingsresultat som tidigare, dvs. $f(T, d) = f(S, d)$, vilket är innebörden av axiom 3. Mot detta kan man invända att alternativen utanför T kan ha påverkat den första förhandlingen såtillvida att de tjänade som hot eller förhoppningar, och att resultatet av den sistnämnda förhandlingen visst kan påverkas av att dessa hot/förhoppningar fallit bort.

Axiom 4 är okontroversiellt eftersom det endast innebär att förhandlingsresultatet ska vara oberoende av valet av ekvivalenta nyttofunktioner.

Nashs förhandlingslösning

Sats 12.3.1 *Det finns en unik funktion f som satisfierar Nashs fyra axiom. Förhandlingslösningen $f(S, d)$, som kallas* Nashs förhandlingslösning, *är den unika maximipunkten till problemet att maximera produkten $(x_1-d_1)(x_2-d_2)$ över alla (x_1, x_2) i mängden $S^*(d) = \{x \in S \mid x \geq d\}$.*

Vi börjar med att visa att maximeringsproblemet har en entydig lösning och att lösningen är invariant under skalning.

Lemma 12.3.2 *Sätt $M = \max\{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \mid x \in S^*(d)\}$.*

(i) Maximum M antas i en unik punkt $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ i $S^*(d)$.

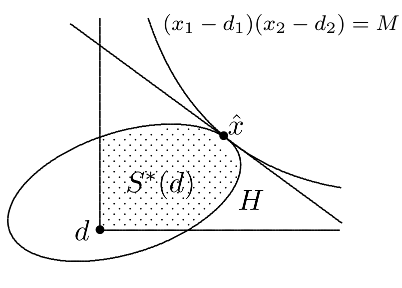
(ii) Mängden S ligger i halvplanet

$$H = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid (\hat{x}_2 - d_2)(x_1 - d_1) + (\hat{x}_1 - d_1)(x_2 - d_2) \leq 2M\}$$

som begränsas av tangenten till kurvan $(x_1-d_1)(x_2-d_2) = M$ i punkten $\hat{x}$.

(iii) Låt ϕ vara en godtycklig skalning, och sätt $S' = \phi(S)$ och $d' = \phi(d)$. Då är punkten $\phi(\hat{x})$ den unika lösningen till maximeringsproblemet

$$\max\{(y_1 - d'_1)(y_2 - d'_2) \mid y \in S'^*(d')\}.$$



Figur 12.3. Illustration till lemma 12.3.2.

Bevis. (i) och (ii) Maximeringsproblemet har en lösning $\hat{x} > d$ eftersom mängden $S^*(d)$ är kompakt (och innehåller punkter $> d$). För att visa att den är unik och att $S \subseteq H$ överför vi med hjälp av translationen $x_1' = x_1 - d_1$, $x_2' = x_2 - d_2$ det allmänna fallet på fallet $d = (0,0)$.

I fortsättningen antar vi därför att $d = (0,0)$. Eftersom funktionen $x_1 \mapsto M/x_1$ är strikt konvex för $x_1 > 0$, ligger kurvan $x_2 = M/x_1$ ovanför sin tangent $\hat{x}_2 x_1 + \hat{x}_1 x_2 = 2M$ överallt utom i tangeringspunkten $\hat{x}$. Den konvexa mängden $\{x \in \mathbf{R}^2_+ \mid x_1 x_2 \geq M\}$ ligger därför, med undantag för tangeringspunkten $\hat{x}$, helt i det öppna halvplanet $U = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \hat{x}_2 x_1 + \hat{x}_1 x_2 > 2M\}$. Om vi visar att mängden S ligger helt i det motsatta slutna halvplanet $H = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \hat{x}_2 x_1 + \hat{x}_1 x_2 \leq 2M\}$, dvs. påstående (ii), så följer det därför speciellt att $x_1 x_2 < M$ för alla punkter x i $S^*(0) = S \cap \mathbf{R}^2_+$ utom punkten $\hat{x}$, vilket bevisar påstående (i).

Antag därför att det finns en punkt $x = (x_1, x_2)$ i $S \cap U$; vi ska visa att detta leder till en motsägelse. På grund av att $\hat{x} \in S$, $\hat{x} > 0$ och S är konvex, ligger punkterna

$$tx + (1-t)\hat{x} = \big(tx_1 + (1-t)\hat{x}_1, tx_2 + (1-t)\hat{x}_2\big)$$

i $S^*(0)$ för alla tillräckligt små positiva tal t, och följaktligen är

$$\big(tx_1 + (1-t)\hat{x}_1\big)\big(tx_2 + (1-t)\hat{x}_2\big) \leq M \tag{1}$$

för alla tillräckligt små $t > 0$ på grund av definitionen av M som maximivärde.

Men eftersom x ligger i det öppna halvplanet U, är $\hat{x}_2 x_1 + \hat{x}_1 x_2 = 2M + \varepsilon$ för något tal $\varepsilon > 0$. Därför är

$$\begin{aligned}
&\big(tx_1 + (1-t)\hat{x}_1\big)\big(tx_2 + (1-t)\hat{x}_2\big) \\
&\qquad = t^2 x_1 x_2 + t(1-t)(\hat{x}_1 x_2 + \hat{x}_2 x_1) + (1-t)^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \\
&\qquad = t^2 x_1 x_2 + t(1-t)(2M + \varepsilon) + (1-t)^2 M \\
&\qquad = M + \varepsilon t - t^2(M + \varepsilon - x_1 x_2) > M
\end{aligned}$$

för alla tillräckligt små $t > 0$, vilket strider mot olikheten (1). Följaktligen är $S \cap U = \emptyset$, så S är en delmängd till halvplanet H.

(iii) Sätt $y_1 = \phi_1(x_1) = \alpha_1 x_1 + \beta_1$, $y_2 = \phi_2(x_2) = \alpha_2 x_2 + \beta_2$. Då är

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) &= (\alpha_1 x_1 + \beta_1 - \alpha_1 d_1 - \beta_1)(\alpha_2 x_2 + \beta_2 - \alpha_2 d_2 - \beta_2) \\
&= (y_1 - d_1')(y_2 - d_2').
\end{aligned}$$

Att maximera produkten $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ då x varierar över $S^*(d)$ är därför ekvivalent med att maximera produkten $(y_1 - d_1')(y_2 - d_2')$ då y varierar över $S'^*(d')$, och sambandet mellan de båda maximipunkterna $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ och $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ ges av att $\hat{y}_1 = \phi_1(\hat{x}_1)$, $\hat{y}_2 = \phi_2(\hat{x}_2)$, eller kortare $\hat{y} = \phi(\hat{x})$. $\square$

Bevis för sats 12.3.1. Definiera $\phi(S,d)$ som den unika lösningen $\hat{x}$ till optimeringsproblemet

$$\max\{(x_1-d_1)(x_2-d_2) \mid x \in S^*(d)\}.$$

Vi visar först att $\phi(S,d)$ uppfyller de fyra axiomen och sedan att det inte finns någon annan lösning.

Paretoegenskapen följer av (ii) i lemma 12.3.2, ty om $x_1 > \hat{x}_1$ och $x_2 \geq \hat{x}_2$ (eller $x_1 \geq \hat{x}_1$ och $x_2 > \hat{x}_2$) ligger punkten x inte i det slutna halvplanet H och därför heller inte i mängden S.

Antag att mängden S är symmetrisk och att $d_1 = d_2$. För att visa att symmetriaxiomet är uppfyllt måste vi visa att $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$.

Av symmetrivillkoret följer att punkten $(\hat{x}_2, \hat{x}_1)$ ligger i $S^*(d)$, och på grund av att S är konvex är också

$$z = \tfrac{1}{2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \tfrac{1}{2}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) = (\tfrac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2), \tfrac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2))$$

en punkt i $S^*(d)$. Olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde medför att

$$(z_1 - d_1)(z_2 - d_1) = \Big(\frac{(\hat{x}_1 - d_1) + (\hat{x}_2 - d_1)}{2}\Big)^2 \geq (\hat{x}_1 - d_1)(\hat{x}_2 - d_1) = M$$

med likhet endast om $\hat{x}_1 - d_1 = \hat{x}_2 - d_1$, dvs. endast om $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. Eftersom sträng olikhet är omöjlig på grund av definitionen av M som maximivärde, följer det att $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$.

Axiom 3 är självklart uppfyllt; om $\hat{x}$ maximerar produkten då x genomlöper den större mängden $S^*(d)$ och $\hat{x}$ ligger i T, så är givetvis $\hat{x}$ en maximipunkt i problemet att maximera över $T^*(d)$.

Slutligen innebär (iii) i lemma 12.3.2 att axiom 4 är uppfyllt.

Därmed är existensen av en förhandlingslösning som uppfyller Nashs axiom visad. För att visa entydigheten undersöker vi först vad $f(S,d)$ måste vara för vissa speciella mängder S.

Om mängden S är symmetrisk kring linjen $x_1 = x_2$, så följer det av Pareto- och symmetriaxiomen att $f(S,(0,0))$ är den punkt i S på linjen $x_1 = x_2$ som ligger längst ifrån origo (och i första kvadranten).

Låt nu T vara en godtycklig kompakt konvex delmängd av halvplanet $H_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 2\}$ och antag att T innehåller punkten $(1,1)$. Varje sådan mängd T är uppenbarligen en delmängd av någon kompakt konvex symmetrisk mängd S som också ligger i H; som S kan vi exempelvis välja en tillräckligt stor rektangel med en sida utefter linjen $x_1 + x_2 = 2$ och symmetrisk kring linjen $x_1 = x_2$. Eftersom $f(S,(0,0)) = (1,1)$, följer det nu av axiom 3 att också $f(T,(0,0)) = (1,1)$.

Antag slutligen att S är en godtycklig kompakt konvex mängd, och definiera $\hat{x}$ som maximipunkten i sats 12.3.1. Låt ϕ vara skalningen som avbildar

$\hat{x}$ på punkten $(1,1)$ och d på $(0,0)$; koefficienterna i skalningen är bestämda av att

$$\begin{cases} \alpha_1 \hat{x}_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 d_1 + \beta_1 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \alpha_2 \hat{x}_2 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_2 d_2 + \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Enligt (iii) i lemma 12.3.2 är då $(1,1)$ den optimala lösningen till maximeringsproblemet $\max\{x_1x_2 \mid x \in \phi(S)\}$, och enligt (ii) i samma lemma är därför $S' = \phi(S)$ en konvex kompakt delmängd av halvplanet

$$H_1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 \le 2\}.$$

Det följer därför av specialfallet ovan och skalningsinvariansegenskapen att

$$\phi(f(S,d)) = f(\phi(S), \phi(d)) = f(S', (0,0)) = (1,1) = \phi(\hat{x}),$$

och eftersom avbildningen ϕ är inverterbar medför detta att $f(S,d) = \hat{x}$. Därmed är entydigheten bevisad. □

Övningar

12.3 Bestäm förhandlingslösningen enligt Nashs förhandlingsmodell för mängden $S = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 4 - x_1^2\}$, då sammanbrottspunkten d är

a) $(0,0)$ b) $(0,1)$.

12.4 Kalle och Lisa förfogar tillsammans över en miljon kronor som de tänker handla aktier för. De har fastnat för tre företag, A, B och C, och valet står mellan att investera hela summan i ett av företagen eller att fördela den mellan företagen på lämpligt sätt. Kalle och Lisa har emellertid olika förväntningar beträffande den framtida vinstutvecklingen i de olika företagen, och den nytta som de ser av att investera hela beloppet i ett företag framgår av följande tabell, där nyttan är angiven på en individuell nyttoskala.

	Kalles nytta	Lisas nytta
Företag A	1	4
Företag B	2	4
Företag C	4	2

Det gäller nu för Kalle och Lisa att komma överens om vilken kombination som de ska välja, när båda vill ha så stor nytta som möjligt. Om de inte kommer överens sätts hela summan in på banken vilket ger var och en nyttan 1. Bestäm Nashs förhandlingslösning.

12.5 Arvid och Lage är två kusiner som tycker om att leka med sina leksaksbilar. Arvid har tre stycken, A, B och C, och Lage har två stycken, a och b. De tycker olika mycket om sina och varandras leksaker; Arvid tycker bäst om bil a, som är Lages, medan Lage tycker allra bäst om Arvids bil B. Hur de båda kusinerna värderar de fem bilarna på personliga skalor framgår av nedanstående tabell.

	Arvids värdering	Lages värdering
Bil A	1	2
Bil B	3	3
Bil C	2	1
Bil a	4	2
Bil b	3	1

För att öka den egna tillfredsställelsen tänker de byta bilar med varandra. Det finns totalt $7 \cdot 3$ olika möjliga byten, där Arvid byter 1, 2 eller 3 av sina bilar mot Lages 1 eller 2 bilar. Kusinerna kan också tänka sig att byta flera gånger under lekpasset, och om de då först leker med en kombination som ökar deras nyttovärden med x_1 resp. x_2 under bråkdelen λ_1 av tiden och sedan byter till en ny kombination som ökar nyttovärdena med y_1 resp. y_2 jämfört med ursprungsläget under resterande bråkdel λ_2 av lektiden, så är deras nyttoökningar $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1$ resp. $\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2$. Om pojkarna inte kan komma överens om något byte, så blir förstås nyttoökningen noll för båda, så vi har här en förhandlingssituation med $d = (0, 0)$ som avbrottshot.

Bestäm Nashs förhandlingslösning.

Appendix 1

Konvexitet

Konvexitet spelar en viktig roll i spelteori, och för den som inte är så familjär med detta område presenteras här några viktiga begrepp och resultat.

En linjärkombination $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$ av vektorer $x_1, x_2, \dots, x_m$ kallas för en *konvex kombination* av vektorerna om $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ och $\lambda_j \geq 0$ för alla j.

Med *sträckan* mellan två (skilda) punkter x_1 och x_2 i $\mathbf{R}^n$ menas mängden av alla konvexa kombinationer av x_1 och x_2.

En delmängd X av $\mathbf{R}^n$ kallas *konvex* om den innehåller sträckan mellan varje par av sina punkter, dvs. om

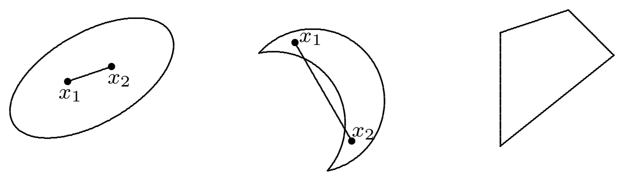
$$x_1, x_2 \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \ \Rightarrow\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X.$$

Om en mängd är konvex, så innehåller den också varje konvex kombination av godtyckligt många av sina punkter, något som lätt bevisas med hjälp av induktion över antalet punkter.

Mängden av alla lösningar till ett system av ändligt många linjära olikheter, dvs. ett system av typen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

bildar en konvex mängd, som kallas en *polyeder*.



Figur 1. Konvex mängd, icke-konvex mängd resp. polyeder i $\mathbf{R}^2$.

Många resultat inom spelteori och matematisk ekonomi förutsätter att förekommande nyttofunktioner är konkava, eller mer generellt kvasikonkava. En funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ kallas *konkav* om definitionsmängden X är konvex och

(1) $x_1, x_2 \in X,\ 0 < \lambda < 1 \ \Rightarrow\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$

Geometriskt betyder ovanstående villkor att alla punkter på kordan mellan två godtyckliga punkter på funktionens graf ligger under grafen.

Funktionen f kallas *strikt konkav* om i villkoret (1) olikheten $\geq$ är strikt för alla skilda punkter x_1 och x_2.

Man kan återföra definitionen av konkav funktion på definitionen av konvex mängd. En funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ är nämligen konkav om och endast om mängden

$$\{(x,t) \in X \times \mathbf{R} \mid t \leq f(x)\}$$

av alla punkter som ligger under grafen till funktionen är en konvex mängd.

Om funktionen $f\colon X \to \mathbf{R}$ är konkav och a är ett reellt tal, så är mängden $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ konvex. Men funktionen f behöver inte vara konkav för att så ska vara fallet för alla tal a. Detta öppnar för följande generalisering av begreppet konkav funktion:

En funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ med konvex definitionsmängd kallas *kvasikonkav* om mängderna $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ är konvexa för alla konstanter a.

Det är lätt att se att en funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ är kvasikonkav om och endast om

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(f(x_1), f(x_2)) \tag{2}$$

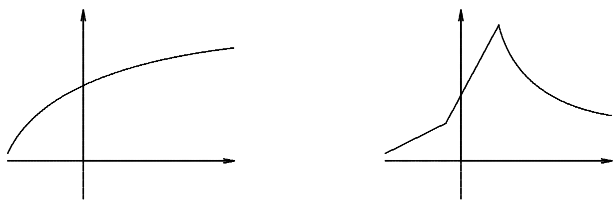
för alla punkter $x_1, x_2 \in X$ och alla reella tal λ med $0 < \lambda < 1$.

Om (2) gäller med strikt olikhet utom i fallet $x_1 = x_2$ kallas funktionen f *strikt kvasikonkav.*

I figur 2 visas grafen till en konkav funktion och en icke-konkav kvasikonkav funktion av en variabel.

Mängden av maximipunkter till en kvasikonkav funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$, som antar ett maximivärde m, är en konvex mängd, ty denna mängd är lika med mängden $\{x \in X \mid f(x) \geq m\}$. Maximipunkten är unik om funtionen är strikt kvasikonkav.

Ett exempel på en (icke-konkav) strikt kvasikonkav funktion av två variabler är funktionen $g(x,y) = xy$ med öppna första kvadranten som definitionsmängd. Om X är en kompakt konvex delmängd av första kvadranten och X innehåller punkter vars båda koordinater är positiva, så antar därför g:s restriktion till X sitt maximum i en unik punkt. I avsnitt 12.3 behövde vi detta resultat som ett led i beviset för Nashs förhandlingslösningssats, men då utnyttjade vi inte kvasikonkaviteten explicit.



Figur 2. Till vänster en strikt konkav funktion och till höger en kvasikonkav (icke-konkav) funktion

Appendix 2

Kakutanis fixpunktssats

Beviset i avsnitt 2.3 för Nashs sats om existensen av jämviktslösningar bygger på en fixpunktssats av Kakutani för mängdvärda avbildningar. Här ska vi härleda Kakutanis sats ur en annan klassisk fixpunktssats, Brouwers fixpunktssats. Vi börjar med att formulera de båda fixpunktssatserna.

Sats 1 (Brouwers fixpunktssats) *Antag att X är en kompakt konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och att $f\colon X \to X$ är en kontinuerlig funktion. Då har f en fixpunkt, dvs. det finns en punkt $\bar{x} \in X$ sådan att $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Sats 2 (Kakutanis fixpunktssats) *Antag att X är en kompakt konvex icke-tom delmängd av $\mathbf{R}^n$, att $\phi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ är en avbildning med sluten graf, och att $\phi(x)$ är en icke-tom konvex delmängd av X för varje $x \in X$. Då finns det en punkt $\bar{x} \in X$ sådan att $\bar{x} \in \phi(\bar{x})$.*

Beviset för Brouwers fixpunktssats är alltför komplicerat och långt för att ges här. Vi får nöja oss med påpekandet att det räcker att bevisa satsen i det fall då X är enhetsklotet i $\mathbf{R}^n$. Varje kompakt konvex mängd är nämligen homeomorf med enhetsklotet i $\mathbf{R}^m$ för något m.

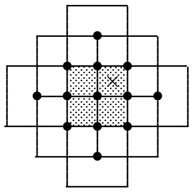
Den teknik vi ska använda oss av för att härleda Kakutanis sats ur Brouwers, kallas *partition av enheten*. Vi börjar med att skriva $\mathbf{R}^n$ som en union av små öppna hyperkuber på följande sätt. Fixera ett positivt heltal p och sätt

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \max |x_j| < 1/p\},$$

dvs. U är den öppna hyperkuben med centrum i origo och sidlängd $2/p$. Betrakta sedan familjen $\mathcal{F}$ av alla hyperkuber som fås genom att translatera U så att centrum av de nya hyperkuberna hamnar i punkter vars samtliga koordinater är heltalsmultipler av $1/p$. Unionen av alla sådana hyperkuber täcker $\mathbf{R}^n$, och varje punkt i $\mathbf{R}^n$ ligger i högst 2^n stycken sådana hyperkuber. (Punkter som ligger på randen av någon hyperkub täcks av färre hyperkuber.)

Av alla hyperkuberna i familjen $\mathcal{F}$ är det förstås bara ändligt många, säg N stycken, som skär den givna kompakta konvexa mängden X; kalla dessa hyperkuber U_1, U_2, $\dots$, U_N, och sätt $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$. Då gäller alltså att $X \subseteq \Omega$.

Välj nu för varje j en kontinuerlig funktion $g_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ med egenskapen att $g_j(x) > 0$ för alla $x \in U_j$ och $g_j(x) = 0$ för alla $x \notin U_j$. Funktionerna g_j kan exempelvis bildas som translat av en enda kontinuerlig funktion g som



Figur 1. Figuren visar en del av övertäckningen av $\mathbf{R}^2$ med öppna kvadrater. Den skuggade kvadraten föreställer den ursprungliga kvadraten U med mittpunkt i origo och sidlängd $2/p$. I figuren finns det ytterligare 12 kvadrater av samma storlek som har uppkommit genom translation av U så att mittpunkterna får koordinaterna $(m/p, n/p)$, där m och n är heltal. Den med $\times$ markerade punkten täcks av exakt 4 sådana kvadrater.

är positiv precis på utgångshyperkuben U, t. ex.

$$g(x) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n}(1 - p|x_j|) & \text{om } x \in U \\ 0 & \text{om } x \notin U, \end{cases}$$

genom att man definierar $g_j(x) = g(x - a_j)$, där a_j betecknar centrum i hyperkuben U_j.

Summan $s(x) = \sum_{j=1}^{N} g_j(x)$ är positiv för alla $x \in \Omega$, så vi får väldefinierade funktioner $f_j \colon \Omega \to \mathbf{R}$ genom att sätta $f_j(x) = g_j(x)/s(x)$ för $x \in \Omega$.

Funktionerna $f_j \colon \Omega \to \mathbf{R}$ är kontinuerliga, $f_j(x) > 0$ för $x \in U_j$, $f_j(x) = 0$ för $x \notin U_j$, och $\sum_{j=1}^{N} f_j(x) = 1$ för alla $x \in \Omega$. Vi har med andra ord delat upp 1 i en summa av icke-negativa kontinuerliga funktioner, där varje funktion är noll utanför en öppen hyperkub (som är liten om talet p är stort). Detta är den s. k. partitionen av enheten.

Välj nu för $j = 1, 2, \ldots, N$ en punkt $b_j \in X \cap U_j$ och sedan en punkt $y_j \in \phi(b_j)$, samt definiera funktionen $F \colon X \to \mathbf{R}^n$ genom att sätta

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x) y_j.$$

Funktionen F är kontinuerlig på X eftersom koefficientfunktionerna f_j är det. För varje $x \in X$ är vidare $F(x)$ en konvex kombination av punkterna $y_1, y_2, \ldots, y_N$, och eftersom samtliga dessa punkter ligger i den konvexa mängden X, innebär detta att $F(x)$ också ligger i X. Funktionen F uppfyller således villkoren i Brouwers fixpunktssats och har därför en fixpunkt $\hat{x}$, vilket betyder att

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{N} f_j(\hat{x}) y_j.$$

Eftersom $f_j(\hat{x}) = 0$ för alla index j utom högst 2^n stycken, beroende på att $\hat{x}$ ligger i högst 2^n stycken av hyperkuberna, kan vi genom att numrera om hyperkuberna och sedan sätta $\lambda_j = f_j(\hat{x})$ skriva fixpunkten $\hat{x}$ som en konvex kombination

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j y_j,$$

av M stycken punkter y_j, där $M \leq 2^n$, $y_j \in \phi(b_j)$, b_j ligger i X, samt $\hat{x}$ och b_j ligger i en gemensam hyperkub U_j för $j = 1, 2, \dots, M$. Det sistnämnda innebär att avståndet $\|b_j - \hat{x}\|$ mellan b_j och $\hat{x}$ för varje index $j = 1, 2, \dots, M$ är mindre än en absolut konstant C gånger halva sidlängden $1/p$. Vi kan vidare utan inskränkning anta att $M = 2^n$, ty om $M < 2^n$ kan vi sätta $\lambda_j = 0$ och välja $b_j = b_1$ och $y_j = y_1$ för $M < j \leq 2^n$.

I ovanstående konstruktion har vi hållit talet p fixt, men vi kan förstås genomföra konstruktionen för varje positivt heltal p. Fixpunkterna och de erhållna koefficienterna λ_j och punkterna b_j och y_j kommer att bero av p, och om vi skriver ut detta beroende explicit får vi som resultat fixpunkter $\hat{x}_p$ i X, koefficienter och övriga punkter som uppfyller sambanden

$$\hat{x}_p = \sum_{j=1}^{M} \lambda_{j,p} y_{j,p} \tag{1}$$

$$\lambda_{j,p} \geq 0 \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{M} \lambda_{j,p} = 1 \tag{2}$$

$$y_{j,p} \in \phi(b_{j,p}), \quad b_{j,p} \in X \quad \text{och} \quad \|b_{j,p} - \hat{x}_p\| \leq C/p. \tag{3}$$

Eftersom mängden X är kompakt, finns det på grund av Bolzano–Weierstrass sats en delföljd $(p_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ av de naturliga talen så att $\lim_{\nu\to\infty} p_\nu = \infty$ och så att följande gränsvärden existerar:

$$\bar{x} = \lim_{\nu\to\infty} \hat{x}_{p_\nu}, \quad \bar{\lambda}_j = \lim_{\nu\to\infty} \lambda_{j,p_\nu} \quad \text{och} \quad \bar{y}_j = \lim_{\nu\to\infty} y_{j,p_\nu}.$$

Gränsvärdena $\bar{x}$ och $\bar{y}_j$ ligger förstås i X, och gränsövergång i (2) ger att $\bar{\lambda}_j \geq 0$ och $\sum_{j=1}^{M} \bar{\lambda}_j = 1$. Av avståndsolikheten i (3) följer vidare att

$$\lim_{\nu\to\infty} b_{j,p_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \hat{x}_{p_\nu} = \bar{x}$$

för alla j. Eftersom $y_{j,p_\nu} \in \phi(b_{j,p_\nu})$ och avbildningen ϕ har en sluten graf, kan vi nu dra slutsatsen att $\bar{y}_j \in \phi(\bar{x})$ för alla j.

Det återstår nu bara att betrakta likheterna (1) för $p = p_\nu$ och göra en gränsövergång då $\nu \to \infty$; detta resulterar i likheten

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{M} \bar{\lambda}_j \bar{y}_j,$$

som framställer $\bar{x}$ som en konvex kombination av punkterna $\bar{y}_j$ som alla ligger i den konvexa mängden $\phi(\bar{x})$. Alltså gäller att $\bar{x} \in \phi(\bar{x})$, och därmed är beviset för Kakutanis fixpunktssats klart. □

Anmärkning. Vi har härlett Kakutanis fixpunktssats ur Brouwers. Omvänt är förstås Brouwers fixpunktssats ett specialfall av Kakutanis sats, ty vi får Brouwers sats genom att som ϕ välja $\phi(x) = \{f(x)\}$.

Kort historik

De första dokumenterade exemplen på spelteoretiska frågeställningar står att finna i babylonska Talmud från århundradena e. Kr. Där behandlas olika problem av typen att fördela en förmögenhet när det finns flera personer som gör anspråk på den och summan av anspråken överstiger förmögenheten. Aumann och Maschler [1985] har påvisat att de sinnrika lösningar som föreslås i Talmud kan förklaras med moderna spelteoretiska begrepp.

Flera spelteoretiska begrepp förekommer i embryonal form i några 1800-talsekonomers arbeten om ekonomisk jämvikt. A. Cournot [1838] behandlade i sitt monumentalverk konkurrens mellan producenter och använde i fallet duopol ett lösningsbegrepp som är ett specialfall av begreppet Nashjämvikt. F. Y. Edgeworth [1881] publicerade ett arbete där han bl. a. studerade byteshandel och föreslog den s. k. kontraktskurvan som lösning på problemet att bestämma utfallet av handeln. Begreppet kärna är en sentida generalisering av Edgeworths kontraktskurva.

Första ”satsen” i spelteori publicerades av Ernst Zermelo [1913] som noterade att i schack har antingen vit ett spel som vinner mot varje försvar, eller svart ett spel som vinner mot varje försvar, eller också kan båda spelarna tillförsäkra sig minst remi.

Begreppet strategiskt spel och blandad strategi infördes av Émile Borel [1921] som under åren 1921–27 publicerade fyra korta arbeten om strategiska spel. Borel visade ett specialfall av maxminsatsen för tvåpersoners nollsummespel, men lämnade frågan om resultatets giltighet i det allmänna fallet öppen.

John von Neumann [1928] bevisade maxminsatsen för allmänna tvåpersoners nollsummespel i sin artikel *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Beviset använder topologiska metoder. I artikeln införde von Neumann också den extensiva formen av spel.

År 1944 publicerar John von Neumann och Oskar Morgenstern boken *Theory of Games and Economic Behavior* som kom att spela stor roll för den fortsatta utvecklingen av spelteorin. I boken framställs teorin för tvåpersoners nollsummespel, införs begreppet kooperativa spel med överförbar nytta, definieras koalitionsformen och studeras s. k. von Neumann–Morgenstern-stabila mängder till spel på koalitionsform. Vidare ges en axiomatisk framställning av nyttoteorin. Vår framställning av beviset för von Neumann–

Morgensterns sats 1.5.2 bygger på en uppsats av I. N. Herstein och John Milnor [1953].

Spelteorin har många beröringspunkter med linjär programmering som utvecklades under åren närmast efter andra världskriget, och flera kända namn inom optimeringsteorin har också givit bidrag till spelteorin. Med H.W. Kuhn och A.W. Tucker som redaktörer publicerades 1950 *Contributions to the Theory of Games I.*

John Nash publicerade åren 1950–1951 tre banbrytande uppsatser om spelteori. I Nash [1950a] och Nash [1951] visas existensen av den strategiska jämviktslösning, som nu kallas Nashjämvikten, för strategiska n-personersspel, och i Nash [1950b] studeras förhandlingsproblemet och införs Nashs s. k. förhandlingslösning.

Den extensiva formen av spel hade införts redan av von Neumann, men den formulering med informationsmängder som nu används, infördes i en uppsats av H. W. Kuhn [1953]. I uppsatsen visas också de grundläggande satserna för sådana spel.

Begreppet kärna utvecklades av L. S. Shapley 1952 och av D. B. Gillies i den sistnämndes doktorsavhandling *Some Theorems on N-Person Games* från Princeton University, senare publicerad i Gillies [1959].

I Shapley [1953] introduceras den värdefunktion för koalitionsspel med överförbar nytta som nu bär hans namn, och i Shapley och Shubik [1954] används Shapleyvärdet som mått för olika gruppers styrka i voteringssammanhang.

Att koalitionsspel har icke-tom kärna om och endast om de är balanserade visades först av O. N. Bondareva 1963 med metoder från linjär programmering och sedan oberoende av henne av L. Shapley [1967].

Nukleolen infördes och studerades av David Schmeidler [1969].

Det finns många läroböcker i spelteori. En relativt elementär lärobok med många exempel är M. Osborne [2004]. För den som vill ha en mer avancerad framställning rekommenderas boken *A course in Game Theory* av M. Osborne och A. Rubinstein [1994]. Genom att på Google söka på Game theory kan man också hitta en mängd nätpublicerade kompendier och föreläsningsserier i ämnet.

Persongalleri

Aumann, Robert J., f. 1930 i Tyskland, amerikansk-israelisk matematiker som för sina spelteoretiska arbeten år 2005 tilldelades Riksbankens pris i ekonomi till Nobels minne tillsammans med Thomas Shelling.

Bernoulli, Daniel, f. 1700, d. 1782, schweizisk matematiker, verksam som professor i Sankt Petersburg och i Basel.

Bertrand, Joseph, f. 1822, d. 1900, fransk matematiker, kanske främst känd för sin förmodan att det för varje heltal $n > 3$ finns åtminstone ett primtal mellan n och $2n - 2$.

Bondareva, Olga, f. 1937, d. 1991, en rysk spelteoretiker.

Borel, Émile, f. 1871, d. 1956, fransk matematiker med viktiga arbeten inom funktionsteori, mängdteori och sannolikhetskalkyl.

Cournot, Augustin, f. 1801, d. 1877, fransk filosof, matematiker och ekonom.

Edgeworth, Francis Ysidro, f. 1845, d. 1926, irländsk nationalekonom och statistiker.

Kuhn, Harold W., f. 1925, d. 2014, amerikansk matematiker, mest känd för sina arbeten inom spel- och optimeringsteori.

Maschler, Michael, f. 1927, d. 2008, israelisk spelteoretiker.

Morgenstern, Oskar, f. 1902, d. 1976, österrikisk ekonom och professor vid Wiens universitet, som avskedades efter nazisternas maktövertagande och 1938 flyttade till Princeton USA.

Nash, John F., f. 1928, d. 2015, amerikansk matematiker som gjort fundamentala insatser inom spelteori, differentialgeometri och teorin för partiella differentialekvationer. För sina spelteoretiska arbeten fick Nash år 1994 dela Riksbankens pris i ekonomi till Nobels minne med John C. Harsanyi och Reinhard Selten.

von Neumann, John, f. 1903, d. 1957, ungerskfödd matematiker, som 1932 flyttade Princeton, USA. von Neumann har lämnat många viktiga bidrag, inte bara inom ren och tillämpad matematik utan också inom fysik och filosofi. Han var under andra världskriget aktiv i Manhattanprojektet som utvecklade atombomben. Hans senare arbeten om parallella processer och nätverk har förtjänat honom benämningen ”datorns fader”.

Pareto, Vilfredo, f. 1848, d. 1923, italiensk nationalekonom och sociolog.

Rosenthal, Robert W., f. 1945, d. 2002, amerikansk ekonom, främst känd för sina arbeten inom spelteori.

Shapley, Lloyd S., f. 1923, d. 2016, amerikansk matematiker som lämnat många viktiga bidrag till spelteorin, och för tillämpningar av dessa inom matematisk ekonomi tilldelades han 2012 Riksbankens pris i ekonomi till Nobels minne tillsammans med Alvin Roth.

Shubik, Martin, f. 1926, amerikansk matematisk ekonom med arbeten i spelteori.

von Stackelberg, Heinrich, f. 1905, d. 1946, tysk ekonom född i Moskva.

Zermelo, Ernst, f. 1871, d. 1953, tysk logiker och matematiker.

REFERENSER

AUMANN, R.J. & M. MASCHLER [1985], Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory* **36**, 195–213.

BOREL, É. [1921], La Théorie du Jeu et les Equations Intégrales à Noyau Symétrique, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* **173**, 1304–1308.

COURNOT, A. [1838], *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses.* Paris: Hachette.

EDGEWORTH, F. Y. [1881], *Mathematical Psychics.* London: Kegan Paul.

GILLIES, D.B. [1959], Solutions to General Non-Zero-Sum Games, sid. 47–85 i *Contributions to the Theory of Games,* Volume IV (Annals of Mathematics Studies, 40) (A.W. Tucker och R.D. Luce, red.), Princeton: Princeton University Press.

HERSTEIN, I.N. & J. MILNOR [1953], An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica* **21** (1953), 291–297.

KUHN, H.W. [1953], Extensive Games and the Problem of Information, sid. 193–216 i *Contributions to the Theory of Games,* Volume II (Annals of Mathematics Studies, 28) (H.W. Kuhn och A.W. Tucker, red.), Princeton: Princeton University Press.

KUHN, H.W. & A.W. TUCKER [1950], red., *Contributions to the Theory of Games*, Volume I (Annals of Mathematics Studies, 24), Princeton: Princeton University Press.

NASH, J.F. [1950A], Equilibrium Points in N-Person Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **36**, 48–49.

NASH, J.F. [1950B], The Bargaining Problem, *Econometrica* **18**, 155–162.

NASH, J.F. [1951], Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics* **54**, 286–295.

VON NEUMANN, J. [1928], Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* **100**, 295–320.

VON NEUMANN, J. & O. MORGENSTERN [1944], *Theory of Games and Economic Behavior.* New York: John Wiley and Sons.

OSBORNE, M. J. [2004], *An introduction to Game Theory.* Oxford University Press.

OSBORNE, M. J. & A. RUBINSTEIN [1994], *A course in Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

SCHMEIDLER, D. [1969], The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **17**, 1163–1170.

SHAPLEY, L.S. [1953], A Value for n-Person Games, sid. 307–317 i *Contributions to the Theory of Games, Volume II* (Annals of Mathematics Studies, 28) (H.W. Kuhn och A.W. Tucker, red.), Princeton: Princeton University Press.

SHAPLEY, L.S. [1967], On Balanced Sets and Cores, *Naval Research Logistics Quarterly* **14**, 453–460.

SHAPLEY, L.S. & M. SHUBIK [1954], A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review* **48**, 787–792.

ZERMELO, E. [1913], Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, sid. 501–504 i *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Volume II* (W. Hobson och A.E.H. Love, red.), Cambridge: Cambridge University Press.

Svar och anvisningar till övningarna

Kapitel 1

1.3 Nej, fullständighetsaxiomet är inte uppfyllt.

1.4 b) Nej   c) Nej

1.5 a) och c) För en strikt konkav funktion u gäller att om x_1, x_2, x_3, x_4 är fyra punkter i definitionsmängden med $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$ och $x_1 < x_3$, så är lutningen hos kordan mellan punkterna $(x_1, u(x_1))$ och $(x_2, u(x_2))$ på kurvan $y = u(x)$ större än lutningen av kordan mellan punkterna $(x_3, u(x_3))$ och $(x_4, u(x_4))$. För en riskavert nyttofunktion u betyder detta speciellt att om $a < b$ och $h > 0$ så är $(u(a+h) - u(a))/h > (u(b+h) - u(b))/h$, dvs. $u(a+h) - u(a) > u(b+h) - u(b)$. Nyttoökningen är med andra ord störst vid den minsta förmögenheten.

b) För en riskneutral person är nyttoökningen av en förmögenhetsökning med ett fixt belopp densamma vid alla förmögenheter.

1.6 3000 kr

1.7 Nej, $(\frac{1}{n}, -1) \succeq (0,0)$ för alla n, men $(0,-1) = \lim(\frac{1}{n}, -1) \not\succeq (0.0)$.

1.8 För att bevisa att en preferensrelation, som satisfierar de båda implikationerna, är kontinuerlig kan man kopiera beviset för lemma 1.5.4.

1.9 a) 2.9 milj kr   b) 1.0427 (om lönen anges i enheten milj kr)
c) Ja   d) 2 837 000 kr

1.10 Välj en följd av tal α_n i intervallet $]0,1[$ som konvergerar mot 1 då $n \to \infty$. Om nu $\alpha_n p + (1-\alpha_n) r \preceq q$ för alla n, så följer det av kontinuitetsaxiomet att $p \preceq q$, vilket är en motsägelse.

1.11 Med A bestående av två element och $\mathcal{L}(A) = \{(x, 1-x) \mid 0 \le x \le 1\}$ får vi en nyttofunktion u på lotterimängden genom att definiera

$$u(x, 1-x) = \begin{cases} x & \text{om } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{om } x = 1. \end{cases}$$

Motsvarande preferensrelation satisfierar varken axiom 3 eller axiom 4 och är därför inte en vNM-preferens.

Kapitel 2

2.1 Utbetalningstabell:

	sten	*sax*	*påse*
sten	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
sax	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
påse	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Nashjämvikt saknas.

2.2 Fångarnas dilemma: $B_1(\mathit{Neka}) = B_1(\mathit{Erkänn}) = \{\mathit{Erkänn}\}$, $B_2(\mathit{Neka}) = B_2(\mathit{Erkänn}) = \{\mathit{Erkänn}\}$.

Krona eller klave: $B_1(\mathit{Kr}) = \{\mathit{Kr}\}$, $B_1(\mathit{Kl}) = \{\mathit{Kl}\}$, $B_2(\mathit{Kr}) = \{\mathit{Kl}\}$, $B_2(\mathit{Kl}) = \{\mathit{Kr}\}$.

Hjortjakten: $B_1(X_2, \dots, X_n) = \begin{cases} \{\mathit{Hj}\} & \text{om alla } X_i = \mathit{Hj}, \\ \{\mathit{Ha}\} & \text{annars.} \end{cases}$

2.3 (r_2, k_2)

2.4 (T, V) är Nashjämvikt men inte en strikt sådan.

2.6 Att alla spelarna skriver talet 0 är en Nashjämvikt för alla n. För $n \geq 4$ är också utfallet att alla skriver talet 1 en Nashjämvikt.

2.7 Ja.

2.8 a) Sluten b) Ej sluten c) Ej sluten d) Sluten e) Ej sluten f) Sluten.

2.9 Nashjämvikt: (r_3, k_4). Radspelaren maxminhandling är r_4, och hans säkerhetsnivå är 2. Kolonnspelarens maxminhandling är k_4, och hans säkerhetsnivå är också 2.

2.10 Båda spelarna har två maxminhandlingar, nämligen att välja talet 5 eller talet 6. Säkerhetsnivån är 5.

2.11 Följer omedelbart av sats 2.4.1.

2.12 a) Radspelaren ska välja rad 3, kolonnspelaren kolonn 2.

b) Nashjämvikt saknas.

2.13 Till exempel matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Kapitel 3

3.1 $q_i^* = (\sqrt{n^2+1} - 1)/n^2$ för $i = 1, 2, \dots, n$.

3.2 $q^* = (2.5, 2.5)$

3.3 a) $\frac{1}{3}(a + c_2 - 2c_1, a + c_1 - 2c_2)$ om $a \geq 2c_2 - c_1$;
$\frac{1}{2}(a - c_1, 0)$ om $a < 2c_2 - c_1$.

b) $\frac{1}{3}(a - c, a - c)$ om $b \leq \frac{1}{9}(a-c)^2$;
$\frac{1}{2}(a - c, 0)$ och $\frac{1}{2}(0, a - c)$ om $\frac{1}{16}(a-c)^2 \leq b \leq \frac{1}{4}(a-c)^2$;
$(0,0)$ om $b \geq \frac{1}{4}(a-c)^2$.

Kapitel 4

4.1 (x, x, y), (x, y, x) och (y, x, x).

4.2 a) Ja. $\Phi(K,K) = 0$, $\Phi(K,F) = -1$, $\Phi(F,K) = -2$, $\Phi(F,F) = 0$ är en potentialfunktion.
b) Ja. $\Phi(H,H) = \Phi(D,D) = 0$, $\Phi(H,D) = \Phi(D,H) = 1$ är en potentialfunktion.

4.3 Alla maximalt långa förbättringsvägar slutar i (T,H). Om Φ är en ordinal potentialfunktion så är

$$\Phi(T,V) < \Phi(B,V) < \Phi(B,H) < \Phi(T,H) = \Phi(T,V),$$

vilket är motsägelsefullt.

Kapitel 5

5.1 Inga blandade Nashjämvikter utöver den rena (*Erkänn*, *Erkänn*).

5.2 Totalt tre blandade Nashjämvikter – de båda rena (*Konsert*, *Konsert*) och (*Fotboll*, *Fotboll*) samt den blandade strategi där spelare 1 väljer konserten med sannolikhet $\frac{2}{3}$ och spelare 2 väljer fotboll med sannolikhet $\frac{2}{3}$.

5.3 Endast de båda rena Nashjämvikterna (T, V) och (B, H).

5.4 $p_2^* = (\frac{7}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15})$

5.5 $p_2^* = \frac{1}{5}(3 - 2t, 5t, 2 - 3t)$, där $0 \le t \le \frac{1}{3}$.

5.7 Endast paret (r_2, k_2) överlever. Det är därför spelets unika Nashjämvikt.

5.8 a) Nej b) Endast Nashjämvikten som består av att alla spelare skriver talet 1.

5.9 Spelare 1:s blandade maxminstrategier: $(t, 1-t)$, där $0 \le t \le \frac{2}{3}$.
Spelare 2:s blandade maxminstrategier: $(t, 1-t)$, där $0 \le t \le \frac{4}{5}$.
Båda spelarnas blandade säkerhetsnivå är 2.

Kapitel 6

6.1 Spelet definieras av matrisen

	1	2
1	-1	2
2	2	-4

De båda spelarna har samma optimala strategi, nämligen att välja talet 1 med sannolikhet $\frac{2}{3}$ och talet 2 med sannolikhet $\frac{1}{3}$. Spelets värde är 0.

6.2 a) Radspelaren: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, kolonnspelaren: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Värde: $\frac{5}{2}$.
b) Radspelaren: $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$, kolonnspelaren: $(\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$. Värde: $\frac{3}{7}$.

6.3 Strategierna är optimala (likgiltighetsprincipen!). Spelets värde: $\frac{1}{3}$.

6.4 a) Radspelaren: $(0, 1, 0)$, kolonnspelaren: $(0, 0, 1)$. Värde: 4.
b) Radspelaren: $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$, kolonnspelaren: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Värde: $\frac{7}{3}$.
c) Radspelaren: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, kolonnspelaren: $(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$. Värde: $\frac{10}{3}$.

6.5 Radspelaren har följande utbetalningsmatris:

	Ru E	*Sp E*	*Ru 2*
Ru E	-1	1	-2
Sp E	1	-1	1
Sp 2	2	-1	2

Kolonnspelaren ska lösa linjärprogrammeringsproblemet

$$\text{Minimera } t \text{ då}$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 - 2y_3 \le t \\ y_1 - y_2 + y_3 \le t \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \le t \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

(Minimum är lika med 0 och fås för $y = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Radspelarens optimala strategi är $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.)

Kapitel 8

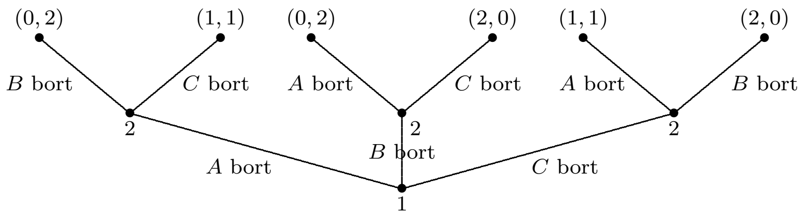
8.1 Med $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots\}$, $e(p_0) = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ och $e(p_n) = \emptyset$ för $n = 1, 2, 3, \dots$ är $\langle P, p_0, e\rangle$ ett icke-ändligt spelträd av höjd 1.

8.2 Sätt $P = \{p_0\} \cup \{p_{ik} \mid 1 \le k \le i,\ i = 1, 2, 3, \dots\}$, och definiera efterföljarfunktionen e genom att sätta $e(p_0) = \{p_{i1} \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$, $e(p_{ik}) = \{p_{i,k+1}\}$ för $1 \le k < i$ samt $e(p_{ii}) = \emptyset$. Då har varje parti i $\langle P, p_0, e\rangle$ formen $p_0, p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ii}$ och därmed ändlig längd.

8.3 a) Spelare 1: A, B. Spelare 2: CE, CF, DE, DF.
b) (A, CE) och (A, CF)
c)

	CE	CF	DE	DF
A	$(2,1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,0)$
B	$(0,2)$	$(1,3)$	$(0,2)$	$(1,3)$

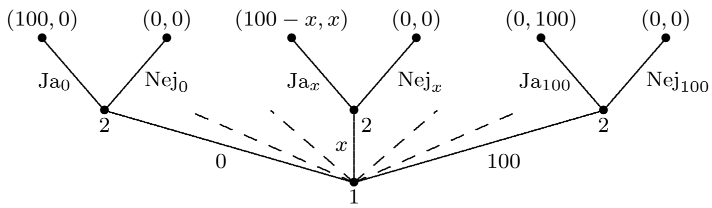
8.4 a) Spelträdet visas högst upp på nästa sida med $u_1(A) = 2$, $u_1(B) = 1$, $u_1(C) = 0$ och $u_2(A) = 0$, $u_2(B) = 1$, $u_2(C) = 2$.
Det finns två Nashjämvikter. I båda tar spelare 1 bort alternativ C. I den ena tar spelare 2 bort B om motspelaren tar bort A och A om motspelaren tar bort B eller C. I den andra tar spelare 2 bort C om motspelaren tar bort A och A om motspelaren tar bort B eller C.



Spelträdet i övning 8.4.

b) Fyra Nashjämvikter. I samtliga tar spelare 1 bort alternativ C. Spelare 2:s svar om spelare 1 tar bort alternativen A, B resp. C är (B, A, B), (B, C, B), (C, A, B) eller (C, C, B)

8.5 Nashjämvikter: Alla kombinationer där spelare 1 erbjuder x kr, och spelare 2 tackar ja till x, nej till alla lägre bud och ja eller nej till alla högre bud. Dessutom kombinationen där spelare 1 erbjuder 0 kr, och spelare 2 tackar nej till alla bud, samt kombinationen där spelare 1 erbjuder 0 kr, och spelare 2 tackar nej till alla bud utom budet 100 kr. (Antalet Nashjämvikter är $2^{100} + 1$.)



Spelträdet i övning 8.5.

8.6 Analogt med övning 8.5, men x är nu ett godtyckligt reellt tal i intervallet $[0, 100]$.

8.7 (A, CF)

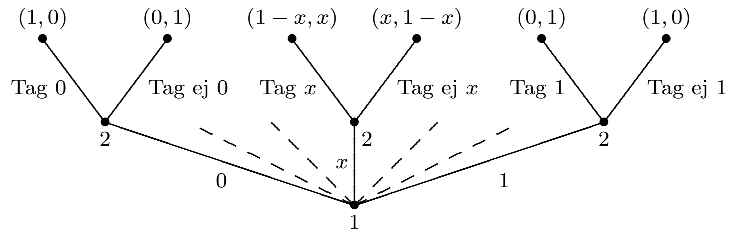
8.8 a) Kombinationen där spelare 1 tar bort alternativ C, och spelare 2 tar bort B, A resp. A om spelare 1 tar bort A, B resp. C. (Den delspelsperfekta jämviktslösningen resulterar således i att B återstår.)

b) Kombinationen där spelare 1 tar bort alternativ C, och spelare 2 tar bort B, A resp. B om spelare 1 tar bort A, B resp. C. (Den delspelsperfekta jämviktslösningen resulterar således i att A återstår.)

8.9 Två delspelsperfekta jämviktslösningar, nämligen att spelare 1 erbjuder 0 kr och spelare 2 tackar ja till alla bud (med utdelningen 100 kr till spelare 1), samt att spelare 1 erbjuder 1 kr och spelare 2 tackar nej till budet 0 kr och ja till alla andra bud (med utdelningen 99 kr till spelare 1).

8.10 En delspelsperfekt jämviktslösning, nämligen att spelare 1 erbjuder 0 kr, och spelare 2 tackar ja till alla bud (med utdelningen 100 kr till spelare 1).

8.11 Spelträd, där x anger andelen tårta som spelare 1 erbjuder spelare 2:



Den delspelsperfekta jämviktslösningen består i att spelare 1 erbjuder exakt halva tårtan och att spelare 2 alltid tar den största tårtdelen.

8.12 (A, EGJ), (A, EHJ), (A, FGJ), (B, FGJ), (C, FGJ) och (B, FHJ) med utbetalningarna $(3, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$ resp. $(2, 1)$.

8.13 a) Tusingfotspelet har en delspelsperfekt jämviktslösning: I varje inre position ska spelarna gå ett steg nedåt. Utfall: $(1, 1)$.

c) Alla alternativ där spelare 1 går ett steg nedåt i sitt första drag och spelare 2 också går ett steg nedåt i sitt första drag är Nashjämvikter.

d) Nej.

8.14 $(2, \frac{4}{3})$

8.15 Låt (q_1^*, q_2^*) vara Cournotjämvikten. Spelare 1:s Stackelberglösning $\overline{q}_1$ fås genom att maximera funktionen $V_1(q_1, m(q_1))$, där $m(q_1)$ är maximipunkten till $V_2(q_1, q_2)$ betraktad som funktion av q_2. Det följer att $V_1(\overline{q}_1, m(\overline{q}_1)) \geq V_1(q_1^*, m(q_1^*))$, och eftersom $V_2(q_1^*, q_2^*) \geq V_2(q_1^*, q_2)$ för alla q_2, är $m(q_1^*) = q_2^*$. Alltså är $V_1(\overline{q}_1, m(\overline{q}_1)) \geq V_1(q_1^*, q_2^*)$.

8.16 (BDE, HR). Förväntad nytta: $(2.2, 2.8)$.

Kapitel 9

9.1 a) Spelare 1 ska med sannolikhet $\frac{5}{6}$ satsa med vinnande kort och passa med förlorande kort och med sannolikhet $\frac{1}{6}$ satsa med såväl vinnande som förlorande kort. Spelare 2 ska syna och lägga sig med lika sannolikhet $\frac{1}{2}$. Värde: $-\frac{1}{4}$.

b) För $0 < p \leq \frac{2}{3}$ ska spelare 1 satsa med vinnande kort och passa med förlorande kort med sannolikhet $(2 - 3p)/(2 - 2p)$ och satsa med såväl vinnande som förlorande kort med sannolikhet $p/(2 - 2p)$. Spelare 2 ska syna och lägga sig med lika sannolikhet $\frac{1}{2}$. Spelets värde är $3p - 1$. För $p \geq \frac{2}{3}$ ska spelare 1 alltid satsa och spelare 2 alltid lägga sig, och spelets värde är 1.

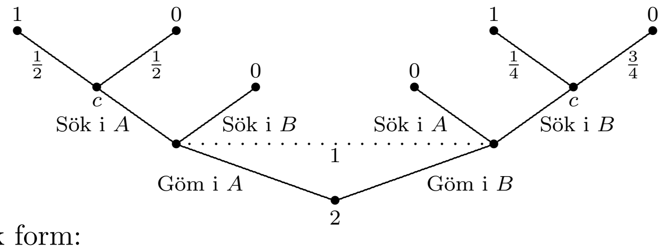
9.2 a) Ja

b) Strategisk form:

	ac	ad	bc	bd
AC	2	4	-3	-1
AD	2	2	0	0
BC	0	3	0	3
BD	0	1	3	4

c) Spelare 1 ska välja AD och BD med sannolikhet $\frac{3}{5}$ resp. $\frac{2}{5}$, och spelare 2 ska välja ac och bc med sannolikhet $\frac{3}{5}$ resp. $\frac{2}{5}$. Värde: $\frac{6}{5}$.

9.3 Spelträd:

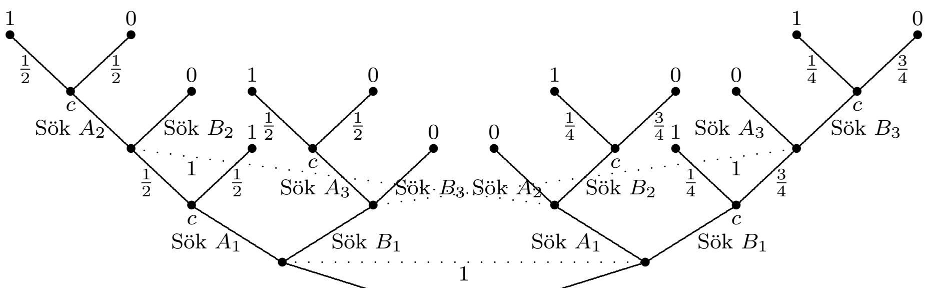


Strategisk form:

	Göm i A	Göm i B
Sök i A	$\frac{1}{2}$	0
Sök i B	0	$\frac{1}{4}$

Optimal strategi för spelare 2 är att gömma i rum A med sannolikhet $\frac{1}{3}$ och i rum B med sannolikhet $\frac{2}{3}$. Optimal strategi för spelare 1 är att söka i A med sannolikhet $\frac{1}{3}$ och i B med sannolikhet $\frac{2}{3}$. Värde: $\frac{1}{6}$.

9.4 Spelträd:



Den optimala strategin för spelare 2 är att gömma myntet i rum A med sannolikhet $\frac{3}{11}$ och i rum B med sannolikhet $\frac{8}{11}$. Den optimala strategin för spelare 1 är att med sannolikhet $\frac{4}{11}$ börja söka i rum B och om han inte hittar myntet fortsätta att söka i rum B, och att med sannolikhet $\frac{7}{11}$ börja söka i rum A och om han inte hittar myntet söka i rum B, eller vice versa, dvs. att med sannolikhet $\frac{7}{11}$ börja söka i rum B och sedan fortsätta i rum A om han inte hittar myntet. Spelets värde är $\frac{7}{22}$.

Strategisk form:

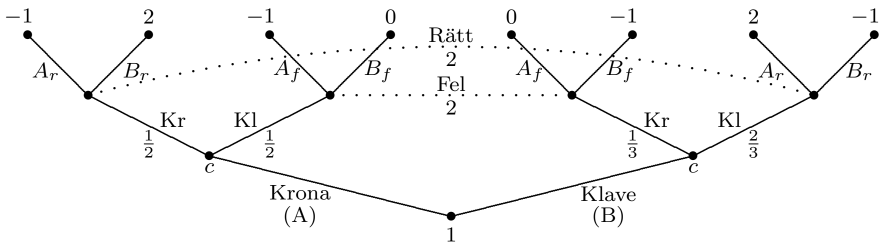
	Göm i A	Göm i B
Sök i A_1, Sök i A_2, Sök i A_3	$\frac{3}{4}$	0
Sök i A_1, Sök i A_2, Sök i B_3	$\frac{3}{4}$	0
Sök i A_1, Sök i B_2, Sök i A_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Sök i A_1, Sök i B_2, Sök i B_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Sök i B_1, Sök i A_2, Sök i A_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Sök i B_1, Sök i A_2, Sök i B_3	0	$\frac{7}{16}$
Sök i B_1, Sök i B_2, Sök i A_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Sök i B_1, Sök i B_2, Sök i B_3	0	$\frac{7}{16}$

9.5 Strategisk form:

	a	b	c
AC	1	2	3
AD	-1	1	1
BC	1	0	-1
BD	1	1	-1

Optimala strategier: Välj AC resp. a med sannolikhet 1.

9.6 Spelträd:



Strategisk form:

	A_rA_f	A_rB_f	B_rA_f	B_rB_f
Krona	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Klave	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	-1

Spelare 1:s optimala strategi är att förutsäga krona med sannolikhet $\frac{4}{7}$ och klave med sannolikhet $\frac{3}{7}$. Spelare 2 ska med sannolikhet $\frac{1}{3}$ gissa på mynt A oavsett om motspelarens förutsägelse var riktig eller ej (strategin A_rA_f) och med sannolikhet $\frac{2}{3}$ gissa på mynt B om förutsägelsen var riktig och på mynt A om den var fel (strategin B_rA_f). Spelet är rättvist eftersom värdet är 0.

9.7 $\tau_1^1(A) = \frac{9}{16}$, $\tau_1^1(B) = 0$, $\tau_1^1(C) = \frac{7}{16}$; $\tau_1^2(V) = \frac{4}{9}$, $\tau_1^2(H) = \frac{5}{9}$; $\tau_1^3(L) = p$, $\tau_1^3(R) = 1 - p$, där $0 \leq p \leq 1$ är godtyckligt.

Kapitel 10

10.1 Nej, $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1$, $v(\{1,2,3\}) = 3$ är ett motexempel.

10.2 Antag att spelet är konvext, att $S \supseteq T$ och att $i \notin S$. Genom att utnyttja konvexitetsolikheten för koalitionerna S och $T \cup \{i\}$ får vi olikheten $v(S \cup \{i\}) + v(T) \geq v(S) + v(T \cup \{i\})$, som medför att $\Delta_i(S \cup \{i\}) \geq \Delta_i(T \cup \{i\})$.
Antag omvänt att spelet inte är konvext. Låt S och T vara två koalitioner med minsta möjliga sammanlagda medlemsantal $|S| + |T|$ sådana att $v(S \cup T) + v(S \cap T) < v(S) + v(T)$. Då är säkert $S \setminus T \neq \emptyset$, och för $i \in S \setminus T$ fås

$$\begin{aligned} v(S \cup T \setminus \{i\}) + v(S \cap T) &\geq v(S \setminus \{i\}) + v(T) \\ &> v(S \setminus \{i\}) + v(S \cup T) + v(S \cap T) - v(S), \end{aligned}$$

vilket förenklas till $v(S) - v(S \setminus \{i\}) > v(S \cup T) - v(S \cup T \setminus \{i\})$. Spelare i bidrar således mer till den mindre koalitionen S än till $S \cup T$.

10.3 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_3 = 5 - x_1 - x_2$.

10.4 a) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_3 = 3 - x_1 - x_2$.
b) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$.

10.6 $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 1$, $v(\{1,2\}) = 6$, $v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 5$, $v(\{1,2,3\}) = 9$.

10.7 $1 \leq x_1 \leq 2$, $4 - x_1 \leq x_2 \leq 3$, $x_3 = 4 - x_1 - x_2$.

10.8 Kärnan definieras av olikheterna $0 \leq x_1 \leq 1 - a$, $0 \leq x_2 \leq 1 - a$, $a \leq x_1 + x_2 \leq 1$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. För $a \leq \frac{2}{3}$ tillhör $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kärnan.

10.11 a) Kärnan är tom (om $n \geq 3$).
b) $\{x \in \mathbf{R}_+^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$
c) Om diktatorn är spelare 1, så är kärnan lika med $\{(1, 0, \ldots, 0)\}$.

10.12 Följande tre påståenden är ekvivalenta för enkla spel:
(i) Spelare 1 är en vetospelare.
(ii) $(1, 0, \ldots, 0)$ tillhör kärnan.
(iii) Kärnan innehåller ett element x med $x_1 > 0$.

Kärnan består av alla $x \in \mathbf{R}_+^n$ med $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ som uppfyller villkoret att $x_i = 0$ för alla icke-vetospelare i.

10.13 a) $a \leq 2$
b) $a \leq 2$, $b \leq 3$.
c) $f(k) \leq k$ för $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

10.14 a) $\{(t, t, 1-t, 1-t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ om $P = \{1, 2\}$ och $Q = \{3, 4\}$.
b) $\{(1, 1, 0, 0, 0)\}$ om $P = \{1, 2\}$ och $Q = \{3, 4, 5\}$.
c) Antag att $P = \{1, 2, \ldots, m\}$. Om $|P| = |Q|$ är kärnan lika med mängden $\{(t, t, \ldots, t, 1-t, 1-t, \ldots, 1-t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$, där det är de m spelarna i P som får t enheter. Om $|P| < |Q|$ består kärnan endast av elementet $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ som ger samtliga spelare i P en enhet.

10.15 Betrakta den balanserade kollektion av vikter som fås genom att sätta $\lambda_{\{1,2\}} = \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{1,4\}} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{\{2,3,4\}} = \frac{2}{3}$ och $\lambda_S = 0$ för övriga koalitioner S.

10.16 Notera att $S_{i_k} = T \cup S_{i_k-1}$ och $T \setminus \{i_k\} = T \cap S_{i_k-1}$. På grund av konvexiteten är därför $v(S_{i_k}) + v(T \setminus \{i_k\}) \geq v(T) + v(S_{i_k-1})$, vilket ger den sökta olikheten $x_{i_k} = v(S_{i_k}) - v(S_{i_k-1}) \geq v(T) - v(T \setminus \{i_k\})$.

10.17 $(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2})$

10.18 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3})$

10.19 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

10.20 $\frac{1}{4}(a+3, 2a-2, a-1)$ om $5 \leq a \leq 9$, och $\frac{1}{3}(a, a+3, a-3)$ om $a \geq 9$.

10.21 $(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$

Kapitel 11

11.1 $\phi = (\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6})$

11.2 $\phi_k = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$. (Visa med induktion att $c_{\{1\}} = c_{\{1,2\}} = c_{\{1,2,3\}} = \cdots = c_{\{1,2,3,\ldots,n\}} = 1$ och att $c_S = 0$ för alla andra koalitioner S.)

11.3 $\phi = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3})$

11.4 $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = a$, $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = b$.
$\phi = \frac{1}{6}(a + 3b, a, 3b - 2a)$.
Shapleylösningen tillhör inte kärnan (om $a > 0$).

11.5 $\phi = (9.8, 1.3, 1.3, 1.3, 1.3)$

11.6 a) $\phi = (\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$
b) $\phi = (\frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3})$

11.9 $\phi = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

11.10 $\phi = (\frac{n-2}{n}, \frac{2}{n(n-1)}, \frac{2}{n(n-1)}, \ldots, \frac{2}{n(n-1)})$

11.11 Styrkeindex för en
icke-permanent nation: $\frac{1}{15} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{14}{8}^{-1} \approx 0.00186$,

permanent nation: $\frac{1}{15} \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} \cdot \binom{14}{k+4}^{-1} \approx 0.19627$.

Kapitel 12

12.1 a) Kärnan sammanfaller med mängden av Paretooptimala handlingar och är lika med $\{x \in \mathbf{R}^2_+ \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

b) Kärnan utgörs av mängden $\{(t,1) \mid 0 \le t \le 1\} \cup \{(1,t) \mid 0 \le t \le 1\}$, och $(1,1)$ är den unika Paretooptimala handlingen.

c) Kärnan sammanfaller med mängden av Paretooptimala handlingar och är lika med mängden $\{(t, 1-t) \mid 0 \le t \le 1\}$.

12.2 Kärnan består av varukorgarna $(t, t-1)$ och $(3-t, 3-t)$ för aktörerna 1 och 2, där $\frac{3}{2} \le t \le 3 - \sqrt{2}$. I konkurrensjämvikten är priset $(1,1)$ och aktörernas varukorgar $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ resp. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

12.3 a) $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3})$

b) $(1,3)$

12.4 0.5 milj i företag B och 0.5 milj i företag C.

12.5 Arvid ska ge Lage bilarna A och B mot att han får bilarna a och b.

Sakregister