Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson

2003-04-03

Reell analys MN1, lösningar till valda problem (forts)

Kapitel 3 i Rudins bok (sidorna 78–82), samt Vretblad (sidan 16). Vx nedan betyder uppgift x i Vretblad.

V2.14 Antag först att $\limsup a_{n+1}/a_n < 1-r$, för något $r > 0$. Då finns, för varje $\varepsilon > 0$ ett N sådant att $n \geq N \Rightarrow a_{n+1}/a_n < 1-r+\varepsilon$. Tag nu ε sådant att $\varepsilon < r$. Då är alltså $0 < a_{n+1} < a_n(1-r+\varepsilon)$ för varje $n \geq N$. Vi får

$$0 < a_{n+1} < a_n(1-r+\varepsilon) < \cdots < a_N(1-r+\varepsilon)^{n-N+1}, \; n \geq N.$$

Eftersom $(1-r+\varepsilon) < 1$ är högerledet i olikheten ovan termer i en konvergent geometrisk serie, och därmed är $\sum_{n=N}^{\infty} a_{n+1}$ konvergent, enligt jämförelsekriteriet. Av detta följer förstås att även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar.
Om $\liminf a_{n+1}/a_n > 1+r$ för något $r > 0$, så finns till varje $\varepsilon > 0$ ett N, sådant att $a_{n+1}/a_n > 1+r-\varepsilon$ för alla $n \geq N$. Tag $\varepsilon < r$. Analogt med ovan fås

$$a_{n+1} > a_N(1+r-\varepsilon)^{n-N+1}, \; n \geq N.$$

Nu blir i stället högerledet termer i en divergent geometrisk serie, eftersom $1+r-\varepsilon > 1$, och därmed divergerar den givna serien enligt jämförelsekriteriet.

V2.16 Talföljden är begränsad så $-\infty < \limsup a_n < \infty$. Antag att $\limsup a_n \leq A$. Då finns för varje $\varepsilon > 0$ ett tal N sådant att $a_n < A+\varepsilon$ om $n \geq N$. Vi får

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N + \ldots a_n}{n} < \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1} + (n-N+1)A}{n} =$$

$$= \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + A\frac{n-N+1}{n}$$

För fixt N konvergerar det sista utrycket mot A, då $n \to \infty$. Alltså, om vi tar lim sup i olikheterna ovan, får vi

$$\limsup \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \limsup \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + A\frac{n-N+1}{n} \right) =$$

$$= \lim \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + A\frac{n-N+1}{n} \right) = A$$

vilket visar den givna olikheten (syns bäst om vi tar $A = \limsup a_n$). Strikt olikhet fås till exempel för $a_n = (-1)^n$. Då blir vänsterledet i den givna olikheten $= 0$ och högerledet blir 1.

V2.17 Tag en följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A + B$, som konvergerar mot $x \in \mathbb{R}^n$. Vi kan skriva $x_n = a_n + b_n$, där $a_n \in A$ och $b_n \in B$. Eftersom A är kompakt, så finns en delföljd $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, som konvergerar mot $a \in A$. Delföljden $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ kommer då fortfarande att konvergera mot x förstås. Vi får därför att $b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \to x - a$, $k \to \infty$. Eftersom B är sluten och $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset B$, så måste $x - a = b \in B$. Alltså är $x = a + b$, där $a \in A$ och $b \in B$, så $A + B$ är sluten.

V2.19 Antag att $\limsup a_n \leq A$. Analogt med lösning till V2.15 får vi (med lämpligt val av N) att

$$0 < a_{n+1} < a_N (A + \varepsilon)^{n-N+1}, \; n \geq N.$$

Ersätt $n + 1$ med n (för tydlighetens skull). Vi får (observera att $\sqrt[n]{c} \to 1$, $n \to \infty$ om $c \in \mathbb{R}_+$):

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N (A+\varepsilon)^{n-N}} = \sqrt[n]{a_N}(A+\varepsilon)^{(n-N)/n} =$$

$$= \sqrt[n]{a_N}(A+\varepsilon)^{-N/n}(A+\varepsilon) \to (A+\varepsilon), \; n \to \infty$$

Alltså är $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq (A + \varepsilon)$ för varje $\varepsilon > 0$, vilket medför att $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Av detta följer $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup a_n$.
Den mellersta olikheten är trivial och den vänstra visas analogt med den högra.

R11 a) Om $a_n \geq 1$ för oändligt många n, så konvergerar $a_n/(1 + a_n)$ ej mot 0, och då konvergerar den givna serien ej. Om $a_n < 1$ så får vi $a_n/(1 + a_n) > a_n/2$. Antag nu att detta gäller för alla utom ändligt många n, säg (efter en eventuell omnumrering) för alla $n \geq N$. Då divergerar serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n/(1 + a_n)$, eftersom $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ gör det, enligt jämförelsekriteriet.

b) Vänsterledet i olikheten är större än eller lika med (ersätt alla nämnarna med den största, som är s_{N+k}):

$$\frac{a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}}{s_{N+k}} = \frac{a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}}{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}} =$$

$$= \frac{(a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+k})-(a_1+\cdots+a_N)}{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}} =$$

$$= 1-\frac{a_1+\cdots+a_N}{a_1+\cdots+a_{N+k}} = 1-\frac{s_N}{s_{N+k}}$$

Låt nu N vara fixt och sätt $A = a_1+\cdots+a_N$. Då blir

$$\frac{s_N}{s_{N+k}} = \frac{A}{A+a_{N+1}\cdots+a_{N+k}}$$

Eftersom $a_n > 0$ och $\sum a_n$ divergerar, så måste

$$\lim_{k\to\infty}(a_{N+1}\cdots+a_{N+k}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=N+1}^{N+k} a_n = \infty$$

Ur detta följer att $\lim_{k\to\infty}\frac{s_N}{s_{N+k}} = 0$, så partialsummorna till serien $\sum a_n/s_n$ bildar ingen Cauchyföljd, eftersom skillnaden mellan två partialsummor blir

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}}+\ldots\frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1-\frac{s_N}{s_{N+k}}$$

och högerledet i denna olikhet går mot 1 då $k\to\infty$. Alltså är serien $\sum a_n/s_n$ divergent.

c)

$$\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n} = \frac{s_n-s_{n-1}}{s_{n-1}s_n} = \frac{a_n}{s_{n-1}s_n} \geq \frac{a_n}{s_n^2}$$

där den sista olikheten följer av

$$a_n > 0 \Rightarrow s_{n-1} = a_1+\ldots a_{n-1} \leq a_1+\ldots a_{n-1}+a_n = s_n.$$

Vi får

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{a_n}{s_n^2} \leq \left(\frac{1}{s_{m-1}}-\frac{1}{s_m}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{s_{m-1}} - \frac{1}{s_n} \to 0,\ n, m \to \infty$$

eftersom $s_l \to \infty$ då $l \to \infty$. Alltså utgör partialsummorna till serien $\sum a_n/s_n^2$ en Cauchyföljd, och därmed är serien konvergent.

d) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+n^2 a_n)$ blir konvergent, ty $a_n > 0$ medför att

$$0 < \frac{a_n}{1+n^2 a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+na_n)$, kan divergera eller konvergera, beroende på hur a_n väljs. Om vi tar $a_n = 1$ för alla n, så blir den uppenbarligen divergent, men om vi väljer

$$a_n = \begin{cases} n^{-2}, & \text{om } n \neq 2^p \text{ för alla } p \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{om } n = 2^p \text{ för något } p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

så ser vi att $\sum a_n = \sum_{p=1}^{\infty} 1 + \sum_{n \neq 2^p} n^{-2}$ är divergent, så a_n uppfyller förutsättningarna. Vidare är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^p} + \sum_{n \neq 2^p} \frac{n}{-21+n^{-1}} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^p} + \sum_{n \neq 2^p} \frac{1}{n(n+1)}$$

och bägge dessa serier är konvergenta.

R21 Antag att $E_n \subset X$ är slutna, icke-tomma delmängder sådana att $E_{n+1} \subset E_n$, och att X är ett fullständigt metriskt rum. Antag vidare att $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$, $n \to \infty$. Välj, för varje n, ett $x_n \in E_n$. Om $m, n \geq N$, så är $x_n, x_m \in E_N$, eftersom följden $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ avtar. Alltså blir $d(x_n, x_m) < \operatorname{diam}(E_N)$. Eftersom $\operatorname{diam}(E_N) \to 0$, $N \to \infty$ är därför $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchyföljd, och därmed konvergent med gränsvärde $x \in X$, eftersom X är fullständigt. Vidare är $x_n \in E_N$ om $n \geq N$, och E_N är sluten, så $x \in E_N$ för alla N. Alltså är $x \in \cap_{n=1}^{\infty} E_n$. Om $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, så $x, y \in E_n$ för alla n, och därmed $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(E_n)$ för alla n. Detta medför att $d(x, y) = 0$, det vill säga att $x = y$.

R22 Detta följer ur lösningen till R30 (sidan 46), som vi gjort på föreläsningarna för kompakta Hausdorff rum och fullständiga metriska rum, om man låter $F_n = G_n^c$.

R23

a) Använd ledningen:

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m) \leq d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n).$$

Om man byter m mot n överallt i den sista olikheten fås även $d(p_m, q_m) - d(p_n, q_n) \leq d(p_m, p_n) + d(q_n, q_m)$. Dessa båda olikheter ger tillsammans att $|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)| \leq d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n)$. Eftersom högerledet i den sista olikheten kan fås mindre än ε genom att välja n och m tillräckligt stora, så visar detta att $\{d(p_n, q_n)\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd och därmed konvergent.

R24 a) Reflexivitet och symmetri följer direkt ur definitionen av metrik. Transitivitet följer av triangelolikheten för metriken, samt att $d(x, y) \geq 0$:

$$0 \leq d(p_n, q_n) \leq d(p_n, r_n) + d(r_n, q_n)$$

Det vill säga, om $\{p_n\} \sim \{r_n\}$ och $\{r_n\} \sim \{q_n\}$, vilket innebär att bägge termerna i olikheten ovan går mot 0 då $n \to \infty$ vilket i sin tur medför att vänsterledet gör det, så är $\{p_n\} \sim \{q_n\}$.

b) Tag $\{p_n\}, \{p'_n\}$ och $\{q_n\}, \{q'_n\}$ som två olika representanter i P respektive Q. Eftersom

$$0 \leq d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p'_n) + d(p'_n, q'_n) + d(q'_n, q_n)$$

och $\lim d(p_n, q_n) = \lim d(p'_n, q'_n) = 0$, så ser vi att $\lim d(p_n, q_n) \leq \lim d(q'_n, q_n)$. Genom att byta plats på p_n, q_n och p'_n, q'_n överallt får vi även den omvända olikheten.

Att $\Delta(P, Q)$ är en metrik följer därefter (tämligen) direkt av att d är det.

c) Antag att $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i X^*. Välj en representant $\{p_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ till P_n för varje n. Vi har att det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal N sådant att

$$n, m \geq N \Rightarrow \Delta(P_n, P_m) = \lim_{k \to \infty} d(p_k^{(n)}, p_k^{(m)}) < \varepsilon$$

Alltså finns K (som apriori beror av n, m och ε) sådant att

$$n, m \geq N,\ k \geq K \Rightarrow d(p_k^{(n)}, p_k^{(m)}) < 2\varepsilon.$$

Vidare är en representant till P_n en Cauchyföljd i X, det vill säga för varje $\varepsilon > 0$, finns K' (som beror av n och ε) sådant att

$$k, j \geq K' \Rightarrow d(p_k^{(n)}, p_j^{(n)}) < \varepsilon.$$

Vi kan anta att $d(p_{k+1}^{(n)}, p_k^{(n)}) < 2^{-k}$ för varje k och n. (Om detta inte är uppfyllt kan vi alltid välja en delföljd av varje $\{p_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ för vilken detta gäller. Varje sådan delföljd är fortfarande en representant för $P_n \in X^*$.) Vi får då (med $k < l$)

$$d(p_k^{(j)}, p_l^{(j)}) \leq d(p_k^{(j)}, p_{k+1}^{(j)}) + \cdots + d(p_{l-1}^{(j)}, p_l^{(j)}) <$$

$$< 2^{-k} + \cdots + 2^{-l+1} = 2^{-k+1} - 2^{-l+1} = 2^{-k+1}(1 - 2^{-l+k}).$$

Speciellt fås (om $m > n$)

$$d(p_n^{(n)}, p_m^{(m)}) \leq 2^{-n+1}(1 - 2^{-m+n}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Detta visar att diagonalföljden $\{p_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i X. Låt P^* beteckna dess ekvivalensklass i X^*. Vi skall visa att $P_n \to P^*$, då $n \to \infty$. Vi har att

$$\Delta(P_n, P^*) = \lim_{k \to \infty} d(p_k^{(n)}, p_k^{(k)}).$$

Men

$$d(p_k^{(n)}, p_k^{(k)}) \leq d(p_k^{(n)}, p_l^{(n)}) + d(p_l^{(n)}, p_l^{(k)}) + d(p_l^{(k)}, p_k^{(k)}).$$

För första och sista termen i högerledet fås (med $k < l$)

$$d(p_k^{(n)}, p_l^{(n)}) \leq 2^{-k+1}(1 - 2^{-l+k})$$

och

$$d(p_l^{(k)}, p_k^{(k)}) \leq 2^{-k+1}(1 - 2^{-l+k}).$$

Välj nu k så stort att dessa bägge blir $< \varepsilon$. Eftersom

$$\Delta(P_n, P_k) = \lim_{l \to \infty} d(p_l^{(n)}, p_l^{(k)}) < \varepsilon$$

om k och n är tillräckligt stora, blir $d(p_l^{(n)}, p_l^{(k)}) < \varepsilon$ om dessutom l väljs tillräckligt stor. Sammanfattningsvis får vi

$$\Delta(P_n, P^*) \leq \lim_{l > k \to \infty} (d(p_k^{(n)}, p_l^{(n)}) + d(p_l^{(n)}, p_l^{(k)}) + d(p_l^{(k)}, p_k^{(k)})) \leq$$

$$\leq 3\varepsilon \text{ om } n \text{ är tillräckligt stort.}$$

Detta visar att $P_n \to P^*$, då $n \to \infty$, det vill säga att X^* är fullständigt.

d) Vi får, med P_p och P_q som i uppgiften,

$$\Delta(P_p, P_q) = \lim d(p, q) = d(p, q).$$

e) Låt $P \in X^*$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en representant för P. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och välj N sådant att $n, m \geq N \Rightarrow d(p_n, p_m) < \varepsilon/2$. Låt därefter Q vara den följd vars element alla är lika med p_N. Vi får då

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, p_N) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Detta visar att det givet $\varepsilon > 0$ och $P \in X^*$ finns $Q = \varphi(q)$, $q \in X$, sådant att $\Delta(P, \varphi(q)) < \varepsilon$, det vill sägaatt $\varphi(X)$ är tät i X^*. Om X är fullständigt, kan vi välja Q som gränsvärdet (säg p) av Cauchyföljden $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, och vi får då förstås att $\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0$, dvs $P = Q = \varphi(p)$, vilket visar att $\varphi(X) = X^*$ om X är fullständigt.