Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson

2003-04-03

Reell analys MN1, lösningar till valda problem (forts)

Kapitel 4 i Rudins bok (sidorna 78–82), kapitel 3, 4 i Vretblad. Vx nedan betyder uppgift x i Vretblad.

V3.4 Låt $\delta > 0$ vara givet. Välj x, y sådana att $0 < y < x = \delta \leq 1$. Då blir

$$0 < \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{1}{\delta} \to \infty,\ y \to 0^+.$$

Speciellt blir $1/y - 1/x \geq 1$ om y väljs tillräckligt nära 0. Alltså är $|x - y| < \delta$ och $|1/y - 1/x| \geq 1$, vilket visar att funktionen ej är likformigt kontinuerlig.

V3.7 Medelvärdessatsen ger

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|, \text{ för något } \xi \text{ mellan } x \text{ och } y.$$

Antag att $|f'(x)| \leq M$ för alla x, och låt $\varepsilon > 0$. Tag $\delta < \varepsilon/M$. Då fås

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| < M\frac{\delta}{M} = \delta < \varepsilon.$$

Alltså är f likformigt kontinuerlig.

V3.10

a) Om f är kontinuerlig på $[0, 1]$ så är bilden av intervallet under f kompakt. Alltså finns ingen sådan kontinuerlig surjektion, då $]0, 1[$ ej är kompakt.

b) Till exempel $f(x) = \arctan x$ är en kontinuerlig surjektion från $\mathbb{R}$ (som är sluten) till $]-\pi/2, \pi/2[$ (som är öppen).

V3.14 Om $f(x) = 0$ för alla $x \in [a, b]$, så blir gränsvärdet $= 0$. Antag att $f(x)$ ej är idententiskt $= 0$. Vi observerar först att

$$\left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq \left(\max_{a\leq t\leq b} (f(t))^n \int_a^b dx\right)^{1/n} = (b-a)^{1/n} \max_{a\leq t\leq b} f(t).$$

Låt $\max_{a \le t \le b}(f(t))^n = f(t_0) > 0$. Ett sådant $t_0 \in [a,b]$ existerar, ty f är kontinuerlig och $[a,b]$ är kompakt. Låt sedan $\varepsilon > 0$ vara givet och välj $\delta > 0$ sådan att $|x - t_0| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - f(t_0)| < \varepsilon$, det vill säga $f(t_0) - \varepsilon < f(x) < f(t_0) + \varepsilon$. Låt dessutom $\varepsilon > 0$ vara så litet att $f(t_0) - \varepsilon > 0$. Dela upp intervallet i två delar: $I_1 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a,b]$ och $I_2 = [a,b] \setminus I_1$. Vi får

$$\left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} = \left(\int_{I_1} (f(x))^n dx\right) + \left(\int_{I_2} (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq$$

$$\geq \left(\int_{I_1} (f(x))^n dx\right)^{1/n} \geq \left((f(t_0) - \varepsilon)^n \int_{I_1} dx\right)^{1/n} =$$

$$= (f(t_0) - \varepsilon)|I_1|^{1/n},$$

där $|I_1|$ betecknar längden av intervallet I_2. Observera att $|I_1| \geq \delta$, om $\delta litet$. Sammantaget har vi alltså att

$$(f(t_0) - \varepsilon)\delta^{1/n} \leq \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n} f(t_0).$$

Om vi låter $n \to \infty$ i dessa olikheter får vi

$$(f(t_0) - \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{1/n} \leq f(t_0).$$

Då detta gäller för alla $\varepsilon > 0$ får vi att det sökta gränsvärdet är lika med $f(t_0) = \max f(t)$.

R2 Låt $E \subset X$, där $f : X \longrightarrow Y$, och X och Y är topologiska rum. Tag $x \in \overline{E}$ och låt W vara en omgivning av $f(x)$ i Y. Eftersom f är kontinuerlig blir då $f^{-1}(W) = V$ en omgivning av x i X. Alltså finns $z \in V \cap E$ sådant att $z \neq x$. Vidare är $f(z) \in W$. Om $f(z) \neq f(x)$, så ser vi därför att $f(x)$ är en gränspunkt till $f(E)$.
Antag nu att $f(z) = f(x)$ för alla $z \in V \cap E$. Då blir $W \cap f(E) = f(V) \cap f(E) = f(V \cap E) = \{f(x)\}$, det vill säga $f(x)$ är en isolerad punkt i $f(E)$. Detta ger att $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

R4 Låt $y \in f(X)$ och välj $x \in X$ sådant att $y = f(x)$. Givet $\varepsilon > 0$, finns då $\delta > 0$ sådant att $d_X(x,p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, eftersom f är kontinuerlig. (Här betecknar d_X och d_Y metrikerna på X respektive Y.) Eftersom E är tät i X, så finns $p \in E$ sådant att $d_X(x,p) < \delta$. Av

detta följer att $f(p) \in f(E)$ samt att $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, och därmed att $f(E)$ är tät i $f(X)$.
Antag att f och g är sådana att $f(p) = g(p)$ för alla $x \in E$, samt att f och g är kontinuerliga. Låt $x \in X$. Eftersom E är tät i X, så finns en följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ som konvergerar mot x. Vi får, på grund av kontinuiteten hos f och g, att

$$d_Y(f(x), g(x)) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), g(x_n)) = 0,$$

det vill säga $f(x) = g(x)$.

R6 Här antar man att $X \times X$ har produkttopologin, som ges av (till exempel) metriken $\Delta((x,z),(y,w)) = d(x,y) + d(z,w)$, där d är metriken på X. Låt nu E vara en kompakt delmängd av X och låt

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in E\}$$

beteckna grafen till f.
Antag först att f är kontinuerlig. Då är även $f(E)$ kompakt. För att visa att G_f är kompakt räcker det att visa att G_f är sekventiellt kompakt, enligt sats. Låt därför $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty} \subset G_f$. Eftersom E är kompakt och $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, så finns en delföljd $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ som konvergerar mot $x \in E$. Kontinuiteten hos f ger att $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(E)$, $k \to \infty$. Sammantaget ger detta att det finns en delföljd av $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^{\infty} \subset G_f$ som konvergerar mot $(x, f(x)) \in G_f$. Alltså är G_f sekventiellt kompakt.
För att visa den omvända implikationen, antar vi att G_f kompakt f och att ej är kontinuerlig (säg i punkten $x \in E$), och härleder en motsägelse. Att f ej är kontinuerlig i $x \in E$ betyder att

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists y \in E : d(x,y) < \delta \text{ och } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Tag nu $\delta_n = 1/n$ och $y_n \in E$ så att detta gäller för varje $n \in \mathbb{Z}_+$. Vi har alltså att $d(x, y_n) < 1/n$ och $d(f(x), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0$ för alla n. Om G_f är kompakt, så finns det en delföljd av $\{(y_n, f(y_n))\}_{n=1}^{\infty}$ som konvergerar mot ett element $(p, q) \in G_f$. Vi kan utan inskräkning anta att den ursprungliga följden konvergerar. Eftersom $(p, q) \in G_f$, så måste $q = f(p)$. Vidare är $x = p$, ty $d(x, y_n) < 1/n$ för alla n, det vill säga $y_n \to x$. Alltså måste $f(y_n) \to q = f(x)$. Men detta strider mot antagandet att $d(f(x), f(y_n)) \geq \varepsilon$ för alla n. Därmed måste f vara kontinuerlig i x, och eftersom x var godtycklig följer det att f är kontinuerlig på E.

R15 Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och öppen. Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Låt $W =]a, b[$. Eftersom f är öppen så är $f(W)$ en öppen mängd, och eftersom f är kontinuerlig är $f(W)$ ett intervall (satsen om mellanliggande värden). Alltså är $f(W) =]c, d[$ för några $c, d \in \mathbb{R}$. Vidare antar f ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[a, b]$, säg i punkterna x respektive y. Uppenbarligen är $c = f(x)$ och $d = f(y)$. Eftersom $c, d \notin]c, d[= f(]a, b[$, så får vi att $x = a$ och $y = b$ (eller omvänt). Alltså att $f(a) < f(b)$ (eller omvänt). Eftersom a och b var godtyckligt valda, så visar detta att f är monoton.

R20

a) Antag först att $\inf_{z \in E} d(x, z) = 0$, samt att x ej tillhör E. Givet $\varepsilon > 0$ finns då $z = z(\varepsilon) \in E$ sådant att $d(x, z) < \varepsilon$. Detta ger att varje omgivning till x innehåller punkter i E, det vill säga att $x \in E' \subset \overline{E}$.
Antag omvänt att $x \in \overline{E}$. Då finns, för varje $\varepsilon > 0$, en punkt $z \in E$ sådan att $d(x, z) < \varepsilon$, vilket medför att $\inf_{z \in E} d(x, z) = 0$.

b) Låt $x, y \in X$ och $z_0 \in E$. Då är

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z) \leq d(x, z_0) \leq d(x, y) + d(y, z_0).$$

Eftersom $z_0 \in E$ var godtycklig ger detta att

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \rho_E(y) \Leftrightarrow \rho_E(x) - \rho_E(y) \leq d(x, y).$$

Genom att byta plats på x och y ovan får vi även $\rho_E(y) - \rho_E(x) \leq d(y, x)$. Dessa båda olikheter ger att $|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$, vilket ger att $\rho_E(x)$ är likformigt kontinuerlig på X.

R21 Enligt uppgiften ovan är $\rho_F(x) = \inf_{z \in F} d(x, z)$ (likformigt) kontinuerlig på X. Eftersom K är kompakt antar därför $\rho_F(x)$ ett minsta värde på K, säg för $x_0 \in K$. Om $\rho_F(x_0) = 0$, så finns för varje $n \in \mathbb{Z}_+$ ett $y_n \in F$ sådant att $d(x_0, y_n) < 1/n$. Men detta medför att $y_n \to x_0$, $n \to \infty$, och eftersom F är sluten ger detta att $x_0 \in F$. Men det motsäger $K \cap F = \emptyset$. Alltså är $\rho_F(x_0) \geq \delta$ för något $\delta > 0$, vilket ger att $d(x, y) \geq \rho_F(x) \geq \rho_F(x_0) \geq \delta > 0$ för alla $x \in K$ och alla $y \in F$.
Om vi låter $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -1/x > 0\}$ och $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 1/x \leq y\}$ (rita figur!), så är K och F slutna, icke-kompakta delmängder av $\mathbb{R}^2$. Givet $\delta > 0$, kan vi finna $(x_1, y_1) \in K$ och $(x_2, y_2) \in F$ sådana att $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$, ty tag till exempel $x_2 = -x_1 = x \in \mathbb{R}_+$, $|x| < \delta/2$, och $y_1 = y_2 = 1/x$. Då är $(x_1, y_1) \in K$ och $(x_2, y_2) \in F$, samt $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = |(-x, 1/x) - (x, 1/x)| = 2|x| < \delta$.

R22 (Detta resultat kallas *Urysohns lemma* och finns även visat i *"Comments..."* för kompakta Hausdorff rum.)
Här är $\rho_C(x) = \inf_{z \in C} d(x,z)$, $x \in X$. Observera vidare att $|\rho_C(x) - \rho_C(y)| \leq d(x,y)$ för alla $x, y \in X$ och alla icke-tomma delmängder C av X, enligt R20.
Först visar vi att nämnaren $\rho_A(p)+\rho_B(p) \neq 0$ för alla $p \in X$. Eftersom bägge termerna är ≥ 0 räcker det att visa att de inte är $= 0$ samtidigt. Tag $p \in X$ sådant att $\rho_A(p) = 0$. Då finns, för varje $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_n \in A$, sådant att $d(x_n, p) < 1/n$, det vill säga $x_n \in A$ och $x_n \to p$. Men A sluten medför att $p \in A$. Om nu även $\rho_B(p) = 0$, så skulle vi på samma sätt få att $p \in B$, vilket skulle strida mot antagandet att $A \cap B = \emptyset$. Alltså är $\rho_B(p) > 0$. På samma sätt fås $\rho_B(p) = 0 \Longrightarrow \rho_A(p) > 0$.
Uppenbarligen blir nu $f(p) = 0$ om och endast om $\rho_A(p) = 0$, vilket i sin tur är ekvivalent med $p \in A$, enligt vad vi gjorde ovan. Vidare är $f(p) = 1$ om och endast om $\rho_A(p) = \rho_A(p) + \rho_B(p)$, det vill säga $\rho_B(p) = 0$, vilket är ekvivalent med att $p \in B$. För $p \notin A \cup B$ är $\rho_A(p) + \rho_B(p) > \rho_A(p), \rho_B(p)$, och därmed är $0 < f(p) < 1$.
Eftersom f är kvoten av två kontinuerliga funktioner, där nämnaren $\neq 0$, så följer det att f är kontinuerlig.
Sätt nu $V = f^{-1}([0, 1/2[)$ och $W = f^{-1}(]1/2, 1])$. Eftersom $f : X \longrightarrow [0, 1]$ är kontinuerlig, och $[0, 1/2[$, $]1/2, 1]$ är öppna delmängder av det metriska rummet $[0, 1]$, så är V och W öppna delmängder av X. Vidare är det klart att $A \subset V$ och $B \subset W$. Att $V \cap W = \emptyset$ följer av att f är en funktion, ty antag motsatsen, det vill säga att det finns $x \in V \cap W$. Då är $x = f^{-1}(t) = f^{-1}(s)$ för några $t \in [0, 1/2[$ och $t \in]1/2, 1]$. Men detta skulle innebära att $t, s \in \{f(x)\}$ och $t \neq s$, vilket strider mot att f är en funktion.