

Hemtentamen i Reell analys MN1

Lämnas senast fredagen 16 maj, 2003.

1. Låt X vara ett topologiskt rum och låt \mathbb{R} vara försedd med den vanliga topologin. Undersök om följande påståenden är sanna eller falska (ge bevis eller motexempel):
 - a) Om X är försedd med topologin $\mathcal{U} = \{X, \emptyset\}$ och $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, så är f konstant.
 - b) Om varje funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, så är alla delmängder av X öppna.
2. Låt $C[0, 1]$ beteckna alla reellvärda, kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$ med metriken $d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$. Låt $\mathcal{D} = \{f \in C[0, 1] : d(f, 0) \leq 1\}$ ("0" står här för funktionen $g(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$). Visa att \mathcal{D} är sluten och punktvis kompakt, men ej ekvikontinuerlig.
Ledtråd: Om \mathcal{D} vore ekvikontinuerlig, vad skulle man då kunna säga om en (godtycklig) följd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$?

3. Låt

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Beräkna $\int_{-1}^2 e^x d\alpha$.

4. Låt $X = C[0, 2]$.

- a) Visa att $d(f, g) = \int_0^2 |f(t) - g(t)| dt$ definierar en metrik på X .
- b) Låt $f_n \in X, n \in \mathbb{Z}_+$, vara

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Visa att $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är en Cauchyföljd i X med avseende på metriken d ovan.

- c) Visa att det inte finns någon funktion $f \in C[0, 2]$ sådan att $d(f_n, f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, det vill säga att X med metriken d ovan ej är fullständigt.

Anmärkning: Kompletteringen av X med avseende på denna metrik ger de *Lebesgue integrabla* funktionerna.

5. Låt X vara ett topologiskt rum med topologi \mathcal{U} och förse $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ med topologin \mathcal{V} , som består av alla delmängder av $X \times X$ som kan skrivas som en union av mängder av typ $U \times V$, där $U, V \in \mathcal{U}$ (det vill säga $\{U \times V : U, V \in \mathcal{U}\}$ är en bas för topologin \mathcal{V}). Låt vidare Δ var diagonalen i $X \times X$, det vill säga $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$. Visa att X är Hausdorff om och endast om Δ är en sluten delmängd av $X \times X$.