Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson

2003-05-02

Hemtentamen i Reell analys MN1 –

förslag till lösningar

1. a) Detta påstående är sant.
   Bevis: Låt $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och antag att $a \in f(X)$, och välj $p \in X$ sådant att $f(p) = a$. Låt vidare $V \subset \mathbb{R}$ vara en omgivning av a. Då är $p \in f^{-1}(V) \neq \emptyset$, vilket medför att $f^{-1}(V) = X$. Om vi låter $V = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, så får vi alltså att $f(X) \subset V$ vilket ger att $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ för alla $q \in X$. Eftersom $\varepsilon > 0$ kan väljas godtyckligt litet följer det att f är konstant.

   b) Detta påstående är också sant.
   Bevis: Låt $x_0 \in X$ vara givet och definiera $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0$ för övrigt. Låt vidare $V = \{a \in \mathbb{R} : |1 - a| < 1/4\}$. Då är V öppen och $f^{-1}(V) = \{x_0\}$. Detta visar att alla enpunktsmängder i X är öppna, vilket medför att alla delmängder av X är öppna.

2. $\mathcal{D}$ är sluten, ty om $f_n \in \mathcal{D}$ och $f_n \to f \in C[0,1]$ likformigt, så $f(f, 0) = \lim_{n\to\infty} d(f_n, 0) \leq 1$. Vidare är $\mathcal{D}$ punktvis kompakt, ty $\{f(x) : f \in \mathcal{D}\} = [-1, 1]$ för varje fixt $x \in [0, 1]$.
   Om nu $\mathcal{D}$ är sluten, punktvis kompakt och dessutom ekvikontinuerlig, så är $\mathcal{D}$ kompakt i $C[0,1]$, enligt Arzela–Ascolis sats. Varje följd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ innehåller då en konvergent delföljd. Tag $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Då är $f_n \in \mathcal{D}$, men ingen delföljd av $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

3. Låt $\alpha_1(x) = x$ om $-1 \leq x \leq 0$ och $= 0$ för övrigt, $\alpha_2(x) = 1$ om $0 < x < 1$ och $= 0$ för övrigt, samt $\alpha_3(x) = x + 1$ om $<\leq x \leq 2$ och $= 0$ för övrigt. Vi får

$$\int_{-1}^{2} e^x d\alpha = \int_{-1}^{2} e^x d\alpha_1 + \int_{-1}^{2} e^x d\alpha_2 + \int_{-1}^{2} e^x d\alpha_3 =$$

$$\int_{-1}^{0} e^x dx + \int_0^1 e^x d\alpha_2 + \int_1^2 e^x d(x+1) =$$

$$= (1 - e^{-1}) + (e+1) + \int_1^2 e^x dx = 2 + e - e^{-1} + e^2 - e = 2 + e^2 - e^{-1}.$$

4. a) Det enda som kräver lite eftertanke för att visa att d är en metrik är att $d(f,g) = 0$ endast om $f = g$. Antag därför att $d(f,g) = 0$. Eftersom $|f(t) - g(t)|$ är kontinuerlig på $[0,2]$, så finns (om $|f(t_0) - g(t_0)| \neq 0$) ett $\delta > 0$ sådant att $|f(t) - g(t)| \geq |f(t_0) - g(t_0)|/2$ om $|t - t_0| < \delta$, $t \in [0,2]$. Låt $V = \{t : |t - t_0| < \delta, t \in [0,2]\}$. Då blir

$$\int_0^2 |f(t) - g(t)| dt \geq \int_V < \delta |f(t) - g(t)| dt \geq$$

$$\geq \delta |f(t_0) - g(t_0)|/2 > 0.$$

Alltså gäller $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$.

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi får (med $n \leq m$)

$$\int_0^2 |f_n(t) - f_m(t)| dt = \int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^n - t^m) dt =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \to 0,\ m \geq n \to \infty.$$

Alltså är $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchyföljd.

c) Antag att $f \in C[0,2]$ och $d(f_n, f) \to 0$, $n \to \infty$. Punktvis gäller $f_n(x) \to 0$, $0 \leq x < 1$ och $f_n(x) \to 1$, $1 \leq x \leq 2$. Låt $g(x)$ beteckna det punktvisa gränsvärdet. Vi får

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^2 |f_n(t) - g(t)| dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 t^n dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Alltså gäller $d(f_n, g) \to 0$, $n \to \infty$. Men

$$d(f,g) \leq d(f, f_n) + d(f_n, g) \to 0,\ n \to \infty$$

vilket ger att $f = g$, som är en motsägelse, eftersom g ej är kontinuerlig.

5. Antag att X är Hausdorff och låt $(x, y) \notin \Delta$, det vill säga $x \neq y$. Då finns öppna mängder U och V i X sådana att $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ och $y \in V$. Eftersom $U \cap V = \emptyset$ så gäller $(z, z) \notin U \times V$ för alla $z \in X$, det vill säga $U \times V$ är en öppen omgivning av (x, y) i $X \times X$ sådan att $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Detta visar att Δ är sluten.
   Antag omvänt att Δ är sluten och välj $x, y \in X$, $x \neq y$. Då är $(x, y) \notin \Delta$, så det finns en öppen mängd $W \subset X \times X$ som innehåller (x, y) och $W \cap \Delta = \emptyset$. W är en union av mängder av typ $U \times V$ där U och V är öppna i X, så det finns U och V öppna i X sådana att $(x, y) \in U \times V$ och $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Detta ger att $(z, z) \notin U \times V$ för alla $z \in X$, så $U \cap V = \emptyset$. Detta visar att X är Hausdorff.