Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson

2003-04-29

Inlämningsuppgifter i Reell analys MN1, del C – Förslag till lösningar

1. a) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då finns, om f är likformigt kontinuerlig, $\delta > 0$ sådant att

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Vidare finns, om $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd, N sådant att $n, m \geq N \Rightarrow d_X(x_n, x_m) < \delta$. Alltså får vi

$$n, m \geq N \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

vilket visar att $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

b) Tag $X =]0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ och $x_n = 1/n$. Då är f kontinuerlig från X till Y och $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd, men $f(x_n) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, är ingen Cauchyföljd i Y.

2. Definiera

$$F(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt - 2x.$$

Då är $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig. Vidare är $F(0) = 1 > 0$ och $F(1) = 1 + \int_0^1 f(t)dt - 2 = \int_0^1 f(t)dt - 1 < 0$, eftersom $f(t) < 1$ för alla $t \in [0, 1]$. Satsen om mellanliggande värden ger att det finns $x_0 \in [0, 1]$ sådant att $F(x_0) = 0$. Dessutom är $F'(x) = f(x) - 2 < 0$ för alla $x \in]0, 1[$, så F är strängt avtagande, vilket visar att x_0 är unikt. Alltså har den givna ekvationen unik lösning i $[0, 1]$.

3. a) Låt $a \leq s < t < u \leq b$. Då finns $\lambda \in (0, 1)$ sådant att $t = \lambda s + (1 - \lambda)u$. Vi observerar följande:

(*i*)

$$t - s = \lambda s + (1 - \lambda)u - s = (1 - \lambda)(u - s),$$

(ii)

$$u - t = u - \lambda s - (1-\lambda)u = \lambda(u-s).$$

Från (i) får vi att

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = \frac{f(t)-f(s)}{(1-\lambda)(u-s)},$$

och från (ii) att

$$\frac{f(u)-f(t)}{u-t} = \frac{f(u)-f(t)}{\lambda(u-s)}.$$

Alltså,

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \Leftrightarrow \frac{f(t)-f(s)}{(1-\lambda)(u-s)} \leq \frac{f(u)-f(t)}{\lambda(u-s)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(f(t)-f(s)) \leq (1-\lambda)(f(u)-f(t)) \Leftrightarrow f(t) \leq \lambda f(s)+(1-\lambda)f(u)$$

det vill säga, om och endast om $f(\lambda s + (1-\lambda)u) \leq \lambda f(s) + (1-\lambda)f(u)$.

b) Låt $a < s < t < u < b$ och antag att f är deriverbar. Medelvärdessatsen ger att

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(\xi) \text{ och } \frac{f(u)-f(t)}{u-t} = f'(\tau)$$

för något $\xi \in (s,t)$ och något $\tau \in (t,u)$. Alltså,

$$f'(\xi) \leq f'(\tau) \Rightarrow \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

Det vill säga olikheten gäller om f' är växande.
Omvänt: antag att olikheten är uppfylld. Vi får, med $a \leq s < x_1 < x_2 < u \leq b$,

$$\frac{f(x_1)-f(s)}{x_1-s} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(u)-f(x_2)}{u-x_2}.$$

Låt $s \to x_1$ och $u \to x_2$ i vänstra respektive högra uttrycket i olikheterna ovan. Detta ger $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, det vill säga f' är växande.

c) Antag att f är konvex. Om $n = 2$ så $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ det vill säga $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, så

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

per definition. Antag nu att påståendet har visats för $k \leq n-1$ och låt $\lambda_i \geq 0$ och x_i, $1 \leq i \leq n$, vara givna sådana att $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Först observerar vi att

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 - \lambda_n.$$

Om $\lambda_n = 1$, så måste övriga $\lambda_i = 0$, och olikheten är trivial. Vi antar därför att $\lambda_n \neq 1$. Definiera

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i, \text{ där } \mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}$$

och notera att

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu_i = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i = 1.$$

så

$$f(\lambda_n x_n + (1-\lambda_n) y) \leq \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f(y) = \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_i x_i\right) \leq$$

$$\leq \text{(enligt induktionsantagandet)} \leq \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \mu_i f(x_i) =$$

$$= \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) =$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Alltså gäller olikheten för alla $n \geq 2$.

d) Låt $y_i = \ln x_i$, $1 \leq i \leq n$ (detta går bra, ty $x_i > 0$)och antag att talen α_i är som i formuleringen av uppgiften. Vi får

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n} = e^{\alpha_1 y_1} \cdot e^{\alpha_2 y_2} \cdot \cdots \cdot e^{\alpha_n y_n} =$$

$$= e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n} \leq \alpha_1 e^{y_1} + \alpha_2 e^{y_2} + \cdots + \alpha_n e^{y_n} =$$

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

eftersom $f(x) = e^x$ är konvex (att f är konvex följer av b) ovan, eftersom $f'(x) = e^x$ är växande).