UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Kyril Tintarev

Tentamen i Reell Analys MN1
2002-08-13

Del A. *Bestäm om följande påståenden är sanna elle falska. Argumentera med bevis, motexempel osv. Varje problem ger 3 poäng.*

1. Union av två Dedekinds snitt är Dedkinds snitt.
2. Varje slutet klot i ett metriskt rum är kompakt.
3. Om A, B är slutna mängder i ett linjärt rum, deras summa $A + B := \{a + b : \ a \in A, b \in B\}$ är sluten mängd.
4. Om $x_{mn} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ och alla nedanstående gränser existerar, så $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn}$.
5. Om f är en likformigt kontinuerlig reelvärd funktion på $\mathbf{R}$ och A är en sluten mängd, så mängden $f(A)$ är sluten.
6. Varje reellvärd kontinuerlig funktion på $\mathbf{Q}$ (med metriken $|x-y|$) har en kontinuerlig fortsättning till $\mathbf{R}$.
7. Varje uppräknelig mängd av reella tal har en monoton uppräkning ($m > n \Rightarrow x_m > x_n$).

Del B. (*Ange bevis*)

8 (5p) Om en funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är strängt växande och kontinuerlig, så dess invers funktion f^{-1} är kontinuerlig på $f(\mathbf{R})$.

9 (4p) Om ett metriskt rum X är sammanhängande, de enda delmängder av X som är öppna *och* slutna är X och $\emptyset$.

10 (5p) Formulera och bevisa Banachs kontraktionprincip.

11 (5p) Låt $G_k \subset \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{N}$, vara öppna mängder och anta att varje G_k är tät i $\mathbf{R}^n$. Visa att $\cap_{k\in\mathbf{N}} G_k$ är tät i $\mathbf{R}^n$.