

**Skrivtid:** 9-14.

**Tillåtna hjälpmedel:** Manuella skrivdon.

För betygen Godkänd/Väl godkänd krävs (minst) 18 respektive 28 poäng.

1. Låt  $X$  vara ett metriskt rum och  $F_n \subset X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , en följd icke-tomma delmängder sådan att  $F_{n+1} \subset F_n$  för alla  $n$ . Avgör huruvida nedanstående påståenden är sanna/falska (ge bevis respektive motexempel).

- a) Om varje  $F_n$  är en sluten delmängd av  $X$ , så är  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  icke-tom.  
b) Om varje  $F_n$  är en kompakt delmängd av  $X$ , så är  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  icke-tom. (5)

**Lösning:** a) är falskt. Tag t ex  $X = \mathbb{R}$  och  $F_n = [n, \infty[$ .

b) är sant. Låt  $x_n \in F_n$ . Då gäller att  $x_n \in F_1$  för alla  $n$  och eftersom  $F_1$  är kompakt finns därmed en konvergent delföljd  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  med gränsvärde  $y$  säg. Det följer att  $y \in F_n$  för alla  $n$  och därmed att  $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

2. Bevisa att om  $X$  är ett metriskt rum och om  $F \subset K$ , där  $K \subset X$  är kompakt och  $F$  är sluten, så är  $F$  kompakt. (5)

**Lösning:** Låt  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  vara en öppen övertäckning av  $F$ . Då är  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{X \setminus F\}$  en öppen övertäckning av  $K$  och därmed finns en ändlig delövertäckning av  $K$ . Denna måste också täcka  $F$ , eftersom  $F \subset K$ , så genom att eventuellt slänga bort  $X \setminus F$  ur denna har vi fått en ändlig delövertäckning av  $F$  ur den ursprungliga övertäckningen.

3. Låt  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig och antag att  $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$  för alla heltal  $n \geq 0$ . Visa att  $f(x) = 0$  för alla  $x \in [0, 1]$ . (6)

**Lösning:** Weierstrass sats ger att det finns en följd  $\{p_k\}_{k=1}^\infty$  av polynom som konvergerar likformigt mot  $f$  på  $[0, 1]$ . Uppenbarligen är  $\int_0^1 f(x)p_k(x) dx = 0$  för alla  $k$ , pga antagandet. Den likformiga konvergensen ger att

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_k(x) dx = 0,$$

vilket medför att  $f(x) = 0$ , eftersom  $f(x)^2 \geq 0$  på  $[0, 1]$ .

4. Låt  $X = C[0, 1]$ , försett med metriken

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Låt vidare  $F \subset [0, 1]$ . Visa att  $Y = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ för alla } x \in F\}$  är en sluten delmängd av  $X$ . (6)

**Lösning:** Låt  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$  vara en konvergent följd i  $X$  med gränsvärde  $f$  säg. Tag  $x \in F$ . Då är

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - f_n(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Alltså är  $f(x) = 0$  för  $x \in F$  vilket visar att  $Y$  är sluten i  $X$ .

5. Låt  $X$  beteckna mängden av alla deriverbara funktioner från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$  och definiera en avbildning  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  genom  $F(\varphi) = \varphi(\varphi(1))$ ,  $\varphi \in X$ . Beräkna riktningsderivatan av  $F$  i en punkt  $\varphi \in X$  och en given riktning  $v \in X$ . (6)

**Lösning:** Vi får:

$$\begin{aligned} \frac{F(\varphi + tv) - F(\varphi)}{t} &= \frac{(\varphi + tv)(\varphi(1) + tv(1)) - \varphi(\varphi(1))}{t} = \\ &= \frac{\varphi(\varphi(1) + tv(1)) - \varphi(\varphi(1))}{t} + v(\varphi(1) + tv(1)) = (\text{om } v(1) \neq 0) = \\ &= v(1) \frac{\varphi(\varphi(1) + tv(1)) - \varphi(\varphi(1))}{tv(1)} + v(\varphi(1) + tv(1)) \rightarrow \varphi'(\varphi(1))v(1) + v(\varphi(1)), t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alltså är riktningsderivatan av  $F$  i punkten  $\varphi$  och riktningen  $v$  lika med  $\varphi'(\varphi(1))v(1) + v(\varphi(1))$  om  $v(1) \neq 0$ . Om  $v(1) = 0$  ser vi ur ovanstående beräkningar att riktningsderivatan blir  $v(\varphi(1))$ . Alltså är den lika med  $\varphi'(\varphi(1))v(1) + v(\varphi(1))$  även i detta fall.

6. Låt  $X = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  vara rummet av linjära operatorer på  $\mathbb{R}^n$ . På  $X$  definieras en norm

$$\|B\| = \max_{|x|=1} |Bx|, B \in X,$$

där  $|x|$  är den vanliga normen på  $\mathbb{R}^n$ . Visa att  $\mathcal{A} = \{B \in X : \|B\| \leq M\}$ , där  $M \in \mathbb{R}$  är fixt, är en ekvikontinuerlig delmängd av  $X$ . (6) **Lösning:** Först observerar vi att, för  $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  och  $B \in \mathcal{A}$ , gäller

$$|Bz| = |z| \left| B \left( \frac{z}{|z|} \right) \right| \leq |z| \|B\|, \text{ ty } \left| \frac{z}{|z|} \right| = 1.$$

Låt  $\varepsilon > 0$  vara givet. Vi får

$$|Bx - By| = |B(x - y)| \leq \|B\| |x - y| \leq M |x - y| \leq \varepsilon$$

om  $|x - y| < \delta = \varepsilon/M$ , vilket visar att  $\mathcal{A}$  är ekvikontinuerlig.

7. Låt  $X$  vara ett metriskt rum och  $A \subset X$  en icke-tom delmängd. Låt vidare  $\rho_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ , där  $d$  är metriken på  $X$ . Visa att  $\rho_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  är likformigt kontinuerlig. (6)

**Lösning:** Låt  $x_0 \in X$  vara godtycklig, men fix. För  $a \in A$  gäller då att

$$\rho_A(x_0) = \inf\{d(x_0, z) : z \in A\} \leq d(x_0, a) \leq d(x_0, y) + d(y, a)$$

för alla  $y \in X$ , enligt triangelolikheten. Tag sedan infimum av bägge led då  $a \in A$ . Detta ger

$$\rho_A(x_0) \leq d(x_0, y) + \rho_A(y) \Rightarrow \rho_A(x_0) - \rho_A(y) \leq d(x_0, y).$$

Genom att byta plats på  $x_0$  och  $y$  överallt ovan fås även olikheten

$$\rho_A(y) - \rho_A(x_0) \leq d(x_0, y).$$

Sammanfattningsvis är alltså  $|\rho_A(y) - \rho_A(x_0)| \leq d(x_0, y)$  vilket visar att  $\rho_A$  är likformigt kontinuerlig.