

149. Для кожного натурального числа n , що не є повним кубом, довести нерівність

$$\{\sqrt[3]{n}\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}.$$

Тут $\{x\}$ — дробова частина числа x , тобто $\{x\} = x - [x]$, де $[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x .

(О. Сарана, м. Житомир)

150. Нехай x_1, x_2, \dots, x_n та y_1, y_2, \dots, y_n — два набори попарно різних натуральних чисел, для яких виконується рівність

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_n^{x_n} = y_1^{y_1} + y_2^{y_2} + \dots + y_n^{y_n}.$$

Доведіть, що набір y_1, y_2, \dots, y_n можна отримати з набору x_1, x_2, \dots, x_n за допомогою деякої перестановки.

(А. Примак, м. Київ)

151. Чи існує функція $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, відмінна від константи, така, що

$$f(x, y) + f(y, x) = f(x^2, y^2) + 1$$

для всіх натуральних x, y ?

(О. Манзюк, А. Примак, м. Київ)

152. Довести, що для будь-яких трьох чисел α, β, γ з інтервалу $(0; \pi/2)$ виконується нерівність

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

(В. Ясінський, м. Вінниця)

153. На площині розташовано два однаково орієнтовані трикутники ACB та ADE . При цьому $\angle DEA = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle BAC$, $E \neq C$. Через точку D проведено пряму l , яка перпендикулярна до прямої EC . L — точка перетину прямих l та AC . Доведіть, що точки L, E, C, B лежать на одному колі.

(В. Ясінський, м. Вінниця)

154. Доведіть, що число

$$\frac{\text{НСД}(m, n)}{n} \binom{n}{m}$$

є цілим для довільної пари цілих чисел $n \geq m \geq 1$. Тут $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — біноміальний коефіцієнт.

(William Lowell Putnam Math. Competition)

149. Prove that the inequality

$$\{\sqrt[3]{n}\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$$

holds for every positive integer n not equal to a cube of an integer. (Here $\{x\}$ is the fractional part of the number x , i.e., $\{x\} = x - [x]$, where $[x]$ is the greatest integer not greater than x .)

(O. Sarana, Zhytomyr)

150. Let x_1, x_2, \dots, x_n and y_1, y_2, \dots, y_n be two sets of pairwise different natural numbers for which the equality

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_n^{x_n} = y_1^{y_1} + y_2^{y_2} + \dots + y_n^{y_n}$$

holds. Prove that the set y_1, y_2, \dots, y_n can be obtained from the set x_1, x_2, \dots, x_n by a permutation.

(A. Prymak, Kyiv)

151. Does there exist a non-constant function $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ such that

$$f(x, y) + f(y, x) = f(x^2, y^2) + 1$$

for all positive integers x, y ?

(O. Manziuk, A. Prymak, Kyiv)

152. Prove the inequality

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

for any three numbers $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi/2)$.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)

153. The triangles ACB and ADE are oriented in the same way. We also have that $\angle DEA = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle BAC$, $E \neq C$. The line l passes through the point D and is perpendicular to the line EC . Let L be the intersection point of the lines l and AC . Prove that the points L, E, C, B belong to a common circumference.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)

154. Prove that the expression

$$\frac{\gcd(m, n)}{n} \binom{n}{m}$$

is an integer for all pairs of integers $n \geq m \geq 1$.

(William Lowell Putnam Math. Competition)