Introduktionskurs i matematik

Erik Melin

Innehåll

Version: 20060905

Förord

Det är idag en ganska stor nivåskillnad mellan gymnasiematematiken och den matematik som lärs ut vid universitet och högskolor. Skillnaden har flera orsaker. En orsak är själva stoffet. Gymnasiekursernas omfattning har krympt, medan universitetets kurser inte har anpassats i samma takt.

En annan orsak kanske kan sägas ha med inställningen till matematik att göra. Matematik är inte bara beräkningar och logiska resonemang. Matematik är också ett hantverk, som liksom andra hantverk kräver mycket praktisk övning. Man kan inte läsa sig till kunskap om hantering av uttryck, formler eller ekvationer. Genom att använda miniräknare förlorar man mycket av denna övning. I vardagsmatematiken är det naturligtvis praktiskt att slippa räkna för hand. Men högskolematematiken har högre ambitioner; den får inte plats i en miniräknare eller i en dator.

En tredje orsak till svårigheter i övergången från gymnasiet är språket. Liksom andra ämnen har matematik ett fackspråk och detta fackspråk ser man egentligen inte alls på gymnasiet. Att läsa matematisk text kräver alltså övning. Ett av de främsta syftena med det här kompendiet är att erbjuda sådan övning utan att de matematiska svårigheterna dominerar.

De två första avsnitten handlar om vetenskapen matematik i allmänhet och matematikens språk i synnerhet. Resten av kompendiet behandlar ”enkla” (så tillvida att inga djupare matematiska resonemang krävs) delar av matematiken, men där presentationen av materialet är så matematiskt korrekt och precist som möjligt. Materialet är huvudsakligen inriktat mot diskret matematik och algebra.

Avslutningsvis vill jag tacka kollegor och andra som läst tidigare versioner och kommit med värdefulla synpunkter och förslag på förbättringar. Särskilt vill jag nämna Lennart Salling, Christer Kiselman och sist men inte minst min mor, Christina Melin, som läst delar med icke-matematikerns ögon.

Uppsala den 24 augusti 2005
Erik Melin

1. Vad är matematik?

Nästan alla böcker som är tänkta att introducera universitetsmatematiken brukar börja med avsnitt som heter något i stil med ”Vad är matematik?”. Där brukar författaren försöka dela med sig av sin syn på vad matematik är och hur man som student bör närma sig denna vetenskap.

Det brukar betonas att matematiken inte bara handlar om att beräkna, utan att den kanske viktigaste delen handlar om att generalisera resonemang och med logiken som verktyg förstå vilka påståenden som hänger ihop och vilka som inte gör det. Allt detta är rätt.

> Unfortunately, no one can be told what *mathematics* is.
> You have to see it for yourself.

Denna travesti av Morpheus[1] replik ur filmen *the Matrix* (Warner Bros. 1999), är faktiskt ganska passande. I filmen berättar Morpheus för Neo, studenten och den blivande hjälten, att världen han dittills upplevt i själva verket är en drömvärld, skapad av datorer. Datorerna överför upplevelsen av den virtuella världen direkt till människornas hjärnor och det man tror sig se med sina ögon är alltså i själva verket bara en signal överförd till synnerven. Så långt science fiction. Poängen är att den datorstyrda världen kontrolleras av lagar som är inprogrammerade i datorerna. Den som förstår dessa lagar och deras konsekvenser, kan ändra på lagarna och få den virtuella världen att bete sig efter egen vilja.

Här finns analogin. En matematisk *teori* är uppbyggd från en samling lagar, så kallade *axiom*. Matematik handlar om att utforska konsekvenserna av dessa axiom. Men man kan också ändra axiomen (i varje fall så länge de inte motsäger varandra) och på så sätt skapa nya teorier.

Den teori som man ägnar sig mest åt i grundskolan och gymnasiet är den som handlar om tal. Här är axiomen valda så att teorin stämmer överens med vår intuitiva uppfattning om hur tal ska bete sig. Vad denna intuition grundar sig i kan man ha olika åsikter om. Kanske är det att räkna och addera kulor? Kanske att mäta sträckor och räkna ut avstånd? Eller kanske handlar det om att räkna pengar? I vilket fall visar sig talteorin vara mycket användbar och matematiska teorier i allmänhet är ett oumbärligt verktyg för en lång rad vetenskaper.

I grundskolan och gymnasiet får man talteorin färdigserverad; man koncentrerar sig på själva handhavandet av tal och formler, på beräkningsdelen. Själva teorin anses för svår eller kanske för ointressant för att diskutera. Men vill man verkligen förstå matematiken, måste man förstå dess grundstenar.

[1] Namnet anspelar på Morfeus, grekisk sömngud med ansvar för drömmar.

För en datavetare är den här sortens förståelse extra viktig. Att programmera en dator handlar egentligen om att lära den vilka regler som gäller. Och att själv förstå konsekvenserna av de regler man programmerat in.

Jag kan inte tala om vad matematik är. Inte heller kan jag tala om vad *the Matrix* är. Men jag kan tala om vad *en* matris är. Matris är det svenska ordet för engelskans *matrix*.

Definition 1.1. En **matris** av **typ** $m \times n$ är en uppsättning av $m \cdot n$ stycken element, a_{ij}, arrangerade i m stycken rader och n stycken kolonner enligt följande

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriser är av mycket stor betydelse i matematiken, inte minst därför att datorer är bra på att räkna med dem. I det här kompendiet har vi emellertid inget behov av att använda matriser, och de kommer inte att behandlas mera.

2. Matematikens språk

I likhet med de flesta andra områden har matematiken ett språk, ett fackspråk, som i vissa avseenden skiljer sig från vardagsspråket. För att läsa och förstå en matematisk text, och naturligtvis för att kunna skriva egna – exempelvis problemlösningar – är det viktigt att behärska det matematiska språket. Och det enda sättet att lära sig det är genom övning – att ta sig igenom matematiska texter, mening för mening; att låta det ta den tid det tar. Det här avsnittet kan förhoppningsvis ge några råd på vägen och lite uppmuntran.

Det finns många ord som bara används inom matematiken Du kan redan an hel del, t.ex. *integral*, *sinuskurva* och *logaritm*. Troligtvis kommer du att ha lärt dig ännu fler när du läst det här kompendiet. Att definiera (och namnsätta) nya begrepp är en mycket betydelsefull del av matematiken. Ta derivatan som exempel. Att från början beskriva vad en derivata är, blir tämligen komplicerat. Förutsatt att den man ska förklara för har ett hum om vad reella tal är och kan de vanliga räknesätten, måste man ändå börja med att förklara vad en funktion är, hur räta linjer i planet kan beskrivas genom sin lutning och vad gränsvärden är. Först därefter kan man göra en precis definition av derivatan.

När derivatan av en funktion väl är definierad, kan detta begrepp användas för att på ett kort och tills synes enkelt sätt tala om komplicerade saker, t.ex. hur man löser min/max problem. Men den som läser en sådan text utan att vara bekant med derivatan är chanslös; det hela blir förmodligen fullständigt obegripligt. Kommer man till ett matematisk begrepp som man inte känner till eller har glömt bort är det alltså läge att dra i nödbromsen. Innan man har någon nytta av att fortsätta måste man på ett eller annat sätt ta reda på vad det okända begreppet betyder.

En extra lurighet är att matematiker ofta använder vardagliga ord i en precis betydelse. Exempelvis kan man tala om att en mängd[2] är *kompakt*. Eftersom vi vet vad kompakt betyder i vardagsspråket, kan man förledas att tro att man därmed vet vad en kompakt mängd är. Detta är helt felaktigt. Kompakthet är ett matematiskt begrepp med en precis definition, som man måste kunna för att förstå vad det handlar om. Anledningen till att man valt ordet kompakt, är troligtvis att det i vissa sammanhang ger en intuitiv bild av hur mängderna ”ser ut”. En bra tumregel är:

Tumregel: Används beskrivande ord om ett matematiskt objekt har dessa alltid en precis definition, såvida det inte tydligt framgår att det är en intuitiv beskrivning.

Denna tumregel ska man även hålla sig till när man skriver matematik själv. Målande eller ungefärliga beskrivningar duger inte som utsagor, däremot kan de vara på sin plats som illustration.

Matematisk text är ofta mycket kompakt jämfört med andra sorters texter. En fempoängskurs i historia kan inkludera många hundra sidor kurslitteratur. En fempoängskurs i matematik kan få plats på trettio sidor, även om det kanske är lite extremt. Den slutsats man bör dra av jämförelsen, är att man som matematikstudent måste räkna med att ägna mycket mer tid åt varje sida. Själv minns jag hur jag som nybörjare kunde ägna mig en hel dag åt några få stycken text. Ha tålamod! Ju vanare man är desto lättare blir det.

Om man läser igenom en matematisk text om något man inte behärskar ungefär lika snabbt som man läser en nyhetsartikel, har man med all sannolikhet inte lärt sig någonting. När man kommer till ett matematiskt resonemang tvingas man ta en mening åt gången. När man läst en mening, måste man stanna och tänka efter. Vad var det som sades egentligen? Är det nåt som är oklart eller oväntat? Förstår jag hur det passar ihop med vad som sagts tidigare? Är allt inte helt klart, kan man inte fortsätta. Man måste backa, läsa om, och fundera mera. Det är klokt att ha en penna i handen när man läser och göra anteckningar, antingen i marginalen eller någon annan-

[2]Se avsnitt 3 för en definition av en mängd.

stans. Ibland utelämnas beräkningsteg som man måste kontrollera. Ibland kan man rita egna figurer för att förstå bättre.

Ett vanligt förekommande uttryckssätt är ”det följer att...” eller något liknande. Det betyder att det som sägs är en logisk konsekvens av det som sagts tidigare. Här måste man alltid tänka efter så man själv förstår varför det är en konsekvens.

Exempel 2.1. Låt $f(x) = \sin x + 1$, och a ett reellt tal. Låt $K = f(a)^2$. Det följer att $0 \leqslant K \leqslant 4$.

Varför är $K \geqslant 0$? Jo, ett reellt tal i kvadrat är aldrig negativt! Varför är $K \leqslant 4$? Jo, vi vet att $\sin x$ alltid ligger mellan -1 och 1. Därför ligger $\sin x + 1$ alltid mellan 0 och 2. Ett sådant tal i kvadrat kan inte bli större än 4. Ju mer avancerad matematik man kommer till desto mer komplicerade egna resonemang av det här slaget måste man utföra för att hänga med.

En annan vanligt förekommande fras är ”det inses lätt att...” eller ”det är lätt att visa att...”. Betydelsen är ungefär den samma som för ”det följer att...”, men indikerar att man som läsare kan tvingas jobba lite hårdare för att inse det lätta. Faktum är att en del författare använder uttrycket ganska vårdslöst, om argument man inte orkar skriva ut eller rent av inte orkar tänka ut. Det har hänt fler än en gång att något som påståtts vara lätt att visa i själva verket varit falskt. I vilket fall finns det ingen anledning att känna sig dum för att man tycker det är svårt att förstå något som påstås vara lätt. Det är författaren som (förhoppningsvis) tycker att det är lätt, inte du! I läroböcker används ofta uttryck av det här slaget för att få studenten att tänka efter själv. Gör ett ordentligt försök, men tveka aldrig att fråga någon kursare eller lärare om du inte förstår.

Varning: När man skriver en tenta är det sällan en bra idé att använda frasen ”det är lätt att visa att...”. Även enkla argument kan ge poängutdelning. Om du tror att något är sant men inte kommer på hur man bevisar det, är det bättre att vara ärlig och göra ett antagande än att försöka dölja okunskapen. Att påstå att något är lätt att visa, som är falskt, ger inget pluspoäng.

Entydighet är ett annat begrepp som ofta används inom matematiken. Man kan t.ex. säga att en funktion f är *entydigt* bestämd av någon egenskap. Det betyder att det inte finns några val kvar att göra – det finns endast en funktion f som uppfyller de angivna egenskaperna.

Exempel 2.2. Variabeln x är entydigt bestämd av ekvationen $3x = 9$. Det enda x som uppfyller ekvationen är $x = 3$. Variabeln y är *inte* entydigt bestämd av ekvationen $y^2 = 1$. Det finns två möjligheter: $y = 1$ eller $y = -1$.

Ytterligare ett begrepp som är vanligt i matematiskt språk är *godtyckligt*. Det är vanligt att man skriver att x kan väljas godtyckligt eller att N är ett tal som kan väljas godtyckligt stort. I båda fallen uttrycker man med detta att oavsett vilket val man gör, så kommer det matematiska resonemanget att fungera. Ofta kan man med den typen av resonemang bevisa något i oändligt många fall.

Exempel 2.3. Låt N vara ett godtyckligt stort positivt heltal. Då är

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^N} < 1.$$

2.1. Definitioner, satser, lemman och bevis

Matematisk text har ofta en viss struktur, som underlättar läsningen. Definitioner har vi redan tidigare diskuterat. I löpande text gör man ofta definitioner på det här viset: Ett reellt x tal kallas *positivt* om $x > 0$ och *negativt* om $x < 0$. Observera kursiveringen av de ord som definieras. Notera också att man med ordet *om* i definitioner egentligen menar *om och endast om*. Denna förenkling, som endast tillåts i definitioner, är en tyst överenskommelse i syfte att lätta upp språket. Vill man lyfta fram en definition lite tydligare, kan man göra så här:

Definition 2.4. Ett heltal n, $n \geqslant 2$, kallas ett **primtal**, om det inte kan delas[3] av något annat heltal än ± 1 och $\pm n$.

En definition följs ofta av ett eller flera exempel för att illustrera definitionen. Det är ofta lättare att förstå definitionen efter det att man förstått exemplen.

Exempel 2.5. De minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Talet 4 är inget primtal, eftersom 2 delar 4.

Ibland gör man också en anmärkning för att lyfta fram någon liten iakttagelse eller dylikt.

Anmärkning 2.6. Det är lätt att inse att 2 är det enda jämna primtalet.

Den slutsats eller det resultat som en matematiker får fram presenteras ofta i form av en *sats* (eller *teorem*). Den kanske mest kända satsen är *Pythagoras sats*. Ofta kan man använda resultaten i satser för att lösa problem av olika slag. Efter satsen följer i typfallet ett *bevis* som är ett logiskt resonemang för att visa att satsen är sann. Det är vanligt att man markerar slutet på beviset med en kvadrat. Ibland används förkortningarna V.S.B. (Vilket skulle bevisas.) eller Q.E.D. (lat. Quod erat demonstrandum) istället.

[3] Om a och b är heltal sägs a dela b om det existerar ett heltal c så att $b = ac$.

Sats 2.7. *Om n är ett heltal större än 2 finns det inga positiva heltal x, y och z som uppfyller ekvationen*

$$x^n + y^n = z^n$$

Bevis. Detta är Fermats[4] ”stora sats”. I marginalen i en bok där problemet fanns skrev Fermat att han hade ”ett i sanning underbart bevis”, men att marginalen var för smal för att beviset skulle få plats. Trots många försök har ingen funnit detta ”underbara” bevis och man tvivlar numera på att det existerar. Satsen har däremot bevisats av Andrew Wiles år 1994. Hans bevis är flera hundra sidor långt och mycket komplicerat. Det återges inte här. □

I normala fall skulle alltså ett bevis för satsen skrivits in på den plats där denna historiska notis nu placerades. Ett *lemma* (eller *hjälpsats*) fungerar precis som en sats, men resultatet anses vara av mindre värde för sig självt. Oftast använder man resultatet av ett lemma i beviset av en sats.

Övning 2.1. Formulera och bevisa Pythagoras sats.

2.2. Det grekiska alfabetet

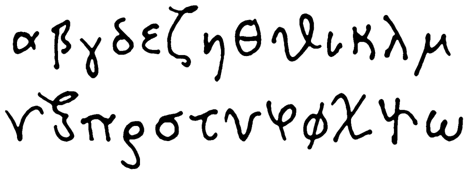
Att matematiker (och andra naturvetare) gärna använder grekiska bokstäver är väl de flesta bekanta med. Orsaken är inte att man vill krångla till formlerna, utan att man vill göra dem tydligare! Precis som f ofta betecknar en funktion och x en variabel, betyder ϵ ofta ett ”litet tal” och θ ofta en vinkel. Samma symbol kan dock ha olika betydelse i olika grenar av matematiken, så naturligtvis måste de alltid definieras. När man väl är insatt i ett visst område får man en känsla för vilka symboler som betyder vad, och det gör det mycket lättare att tolka formler och uttryck. För att symbolerna ska räcka till, använder man även bokstäver ur det grekiska alfabetet.

För att man med njutning ska kunna läsa en text där grekiska bokstäver används, måste man veta vad bokstäverna heter; om man tvingas tänka: ”Låt *krumelur-ett* vara ett heltal, och definiera *krumelur-två* som f av krumelur-ett” blir det snabbt ganska komplicerat. Därför ger vi här en lista på det grekiska alfabetet. Notera att ϵ, θ, ρ och φ kan skrivas på olika sätt – man får välja det sätt man föredrar, men aldrig blanda dem i samma text. Inom parentes står det engelska namnet på bokstaven i de fall det skiljer sig (till stavning) från det svenska.

[4] Pierre Fermat (1601–1665), fransk jurist och amatörmatematiker.

Grekiska alfabetet					
A	α	alfa (alpha)	N	ν	ny (nu)
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ, ε	epsilon	P	ρ, ϱ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	theta	Υ	υ	ypsilon (upsilon)
I	ι	iota	Φ	ϕ, φ	fi (phi)
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	my (mu)	Ω	ω	omega

Det räcker emellertid inte att kunna läsa det grekiska alfabetet. När man för första gången råkar ut för en föreläsare som börjar kalla någonting ξ kan det bli lite stressigt om man aldrig skrivit ξ tidigare. Så här ser det grekiska alfabetet ut när jag skriver det för hand. Säkert kan du skriva det snyggare.



Figur 1: Det grekiska alfabetet.

2.3. Andra matematiska symboler

Det finns många symboler i matematik. Vissa har ganska fixerade betydelser, medan andra kan ha helt olika betydelser i olika sammanhang. I många fall är dessa betydelser rätt komplicerade och kan kräva många sidor text för att förklara.

En mycket viktigt matematisk symbol är likhetstecknet. Faktum är att "=" är en tämligen knepig symbol eftersom den har olika betydelser i olika sammanhang. Grundbetydelsen är klar: vi skriver $a = b$ om a och b står för samma sak. En vanlig variant är i beräkningar av olika slag:

$$(\sqrt{3} + x)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}x + x^2 = 3 + x^2 + 2\sqrt{3}x$$

Här betyder likhetstecknet att vi påstår att de omskrivningar vi gjort inte påverkar värdet av uttrycket, oavsett vilket x vi sätter in. Om vi istället betraktar ekvationen

$$x^2 + x + 2 = 0 \tag{1}$$

så betyder likhetstecknet att x är sådant att likheten är uppfylld (och ofta är uppgiften att bestämma detta x). En tredje betydelse är den definierande. Om vi skriver

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

betyder det att funktionen definieras genom uttrycket i högerledet. Skriver vi nu $g(x) = 0$ så betyder det (troligtvis) att vi också definierar funktionen g att vara lika med 0 överallt. Men skriver vi $f(x) = 0$ betyder det snarare att vi söker de x som uppfyller ekvation (1). Här gäller det alltså att se upp som skribent så att det inte blir några missförstånd. Är det inte klart vad som menas måste man förklara.

Det är vanligt i matematiken med uttryck av typen ”om A så B”, eller ”A medför B” där A och B är påståenden av något slag. Ett klassiskt (men inte så matematiskt) exempel är A=”det regnar” och B=”jag blir våt”. Betydelsen är naturligtvis att om A är sann, kan man dra slutsatsen att B också är sann. Det är ganska vanligt att man i detta läge skriver

$$A \implies B,$$

vilket uttalas ”A medför B”. Uttrycket kallas en *implikation*; A sägs *implicera* B. Om dessutom B medför A så är utsagorna sanna precis samtidigt – de är antingen båda falska eller båda sanna. Man säger då att de är *ekvivalenta* och skriver ibland

$$A \iff B,$$

som läses ”A om och endast om B”. Det förekommer också att ”om och endast om” förkortas till *omm*. När man löser ekvationer, som ju är utsagor om x eller andra variabler, används ofta ekvivalenser. Man skriver

$$6x = 12 \iff x = 2.$$

Något som inte är särskilt lyckat är att använda $\iff$ istället för likhetstecken i beräkningar.

$$x^2 - 1 \iff (x+1)(x-1) \qquad \textbf{FEL}$$

Detta är faktiskt ganska vanligt bland nybörjare. Däremot tror jag aldrig någon på allvar sagt något i stil med ”$2 + 2$ om och endast om 4”, vilket ju är i princip samma sak.

Tabell 1: Vanliga matematiska symboler och skrivsätt

Symbol	Förklaring
$n = 1, 2, \ldots, N$	Talet n antar alla värden (fast ett i taget) mellan 1 och N. Man bör alltid skriva vad N är. Ofta är N ett godtyckligt stort men ändligt tal. Ex. $f(n) > n$ för $n = 1, 2, \ldots, N$.
$n = 1, 2, \ldots$	Samma som ovan, fast för oändligt många n.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$	Summa, ska tolkas som $a_1 + a_2 + \cdots + a_N$. Naturligtvis måste man först tala om vad N är och vad a_n är för $n = 1, 2, \ldots, N$. Om t.ex. $a_n = n^2$ är $\sum_{n=1}^{3} a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
$\displaystyle\prod_{n=1}^{N} a_n$	Produkt, ska för övrigt tolkas på samma sätt som $\sum_{n=1}^{N}$. $\prod_{n=1}^{3} a_n = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36$ med $a_n = n^2$.
$n!$	n fakultet, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.

3. Mängder och funktioner

En *mängd* är en samling av saker. Sakerna kallas *element*. Man skulle kunna likna en mängd vid en påse i vilken man slängt ner ett antal element. En mängd är entydigt bestämd av sina element, d.v.s. två mängder A och B är *lika* om och endast om de innehåller precis samma element. Vi skriver då $A = B$. En särskilt viktig mängd är den som inte innehåller några element alls. Den kallas den *tomma mängden* och betecknas med $\varnothing$. För att tala om att ett element x finns i mängden A skriver vi $x \in A$ och säger att x *tillhör* A. Om x inte tillhör A kan man skriva $x \notin A$.

Inom filosofin är man ibland intresserad av mängder som till exempel *mängden av alla svanar* eller *mängden av alla människor som varit på månen*. I matematiken är mängdernas element oftast lite mer ”matematiska”. Man kan beskriva en mängd genom att ange vilka elementen är inom mängdklamrar. Är elementen bara några få, kan man helt enkelt räkna upp dem:

$$A = \{1,\ 9,\ 0,\ 3.16\}.$$

Notera att ordningen på elementen inte har någon betydelse; det gäller alltså också att $A = \{9,\ 0,\ 3.16,\ 1\}$. Det är även tillåtet att slänga in samma element flera gånger i en mängd utan att den påverkas, d.v.s. $\{1\} = \{1,\ 1\} =$

$\{1, 1, \ldots\}$. Detta bör dock undvikas, eftersom det kan orsaka osäkerhet om vad som egentligen avses. En ”matematisk” mängd måste inte alls bestå av tal. Här har vi en mängd som består av några polynom:

$$\{x^2 - 4,\ x^5 + 3x - 2,\ x^{103} + 78x^3 + 1\}.$$

Har mängden många element eller rent av oändligt många måste man hitta på något annat sätt att beskriva den:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \text{mängden av alla naturliga tal.}$$

Denna mängd är så viktig att den fått en särskild beteckning, $\mathbb{N}$. Vissa författare föredrar att använda symbolen $\mathbf{N}$ för att beteckna de naturliga talen. En annan mycket viktig mängd är $\mathbb{R}$ (eller $\mathbf{R}$), som är mängden av *reella tal.* Det är inte helt lätt att tala om precis vad $\mathbb{R}$ är för en mängd. Intuitivt kan man tänka på den som mängden av alla tal på tallinjen. Exempelvis gäller att $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ och $\pi \in \mathbb{R}$. I avsnitt 4 kommer vi att titta lite närmare på dessa och andra talmängder.

En mängd B kallas en *delmängd* till en mängd A om varje element som finns i B också finns i A. Man skriver $B \subseteq A$. Notera att det alltid är sant att $\varnothing \subseteq A$ och att $A \subseteq A$. Exempelvis gäller det att:

$$\{0, 3, 103\} \subseteq \mathbb{N}$$

medan

$$\{0, 3, 103\} \nsubseteq \{1, 3, 100\}.$$

Det är också viktigt att skilja på $\in$ och $\subseteq$ för att inte orsaka felaktig uppfattning om vad som avses. Följande samband finns mellan dessa symboler

$$x \in A \qquad \text{om och endast om} \qquad \{x\} \subseteq A.$$

Antalet element i en mängd A kallas mängdens *kardinalitet* och brukar betecknas med $\operatorname{card} A$. Om A är en ändlig mängd är $\operatorname{card} A$ helt enkelt ett naturligt tal som anger antalet element. Även för oändliga mängder kan man räkna med $\operatorname{card} A$, som då är ett så kallat kardinaltal. Teorin för sådana är ganska komplicerad, och behandlas inte vidare i detta kompendium. En viktig egenskap hos kardinaliteten är att

$$A \subseteq B \qquad \text{medför att} \qquad \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B.$$

Vi avslutar detta avsnitt med att ge några fler varianter på hur man kan konstruera mängder:

$$\{2n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \text{mängden av jämna naturliga tal.}$$

$$\{x^n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3, \dots\},$$

som är mängden av monom i x och

$$\{n \in \mathbb{N};\ 0 \leqslant n < 1000\} = \{0,\ 1, \dots, 999\},$$

som är mängden av alla hela tal mellan 0 och 999. Notera att vi använder ett semikolon för att skilja på elementen och egenskapen som gör urvalet. Istället för semikolon, är det också vanligt att skriva $\{x^n|\ n \in \mathbb{N}\}$ eller $\{x^n:\ n \in \mathbb{N}\}$. Oavsett vilken separator man väljer brukar man uttala den som *där*. Alltså *Mängden av x^n där n är ett naturligt tal.*

Varning: Det första som kommer efter mängdklammrarna ska vara en beskrivning (formel för) elementen i mängden. Efter separatorn kan man lägga till extra villkor. T.ex. gäller

$$A = \{n/2;\ n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$$

medan

$$B = \{n;\ n/2 \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, \dots\}.$$

Genom att skriva $B = \{n \in \mathbb{N};\ n/2 \in \mathbb{N}\}$ har man förtydligat att mängden man beskrivit är en delmängd av $\mathbb{N}$. Detta är en god vana. För den översta mängden bör man av samma anledning skriva $A = \{n/2 \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\}$.

A *set* is a collection of *elements*. The *empty set* has no element and is a *subset* of every set.

Övning 3.1. Beskriv innehållet i följande mängder med ord
a) $\{3n;\ n \in \mathbb{N}\}$ b) $\{n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ c) $\{x^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ och
d) $\{n + x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \text{ och } 0 \leqslant x \leqslant 1/2\}$.

Övning 3.2. Formalisera följande mängder a) Mängden av alla naturliga tal delbara med 5 b) Mängden av alla naturliga tal som inte är delbara med något annat primtal än 2. c) Mängden av årtal (i valfri tideräkning) som någon person i din bekantskapskrets levat.

Övning 3.3. Låt $X = \{1,\ 10,\ 100\}$ och $Y = \{n \in \mathbb{N};\ 0 \leqslant n \leqslant 10\}$. Avgör om a) $X \subseteq Y$, b) $Y \subseteq X$ eller c) $X \subseteq \mathbb{R}$.

Övning 3.4. Låt $\alpha = \{\varnothing\}$ och $\beta = \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$. Avgör vilka av följande relationer som är sanna a) $\varnothing \subseteq \alpha$, b) $\varnothing \in \varnothing$, c) $\varnothing \in \alpha$, d) $\alpha \subseteq \beta$, e) $\alpha \subseteq \varnothing$ f) $\alpha \in \alpha$ eller om g) $\alpha \in \beta$.

3.1. Operationer med mängder

Om man har två mängder, A och B, kan man slå ihop dem till en mängd som innehåller elementen från både A och B. Denna mängd kallas *unionen* av A och B och skrivs $A \cup B$. Alltså

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ eller } x \in B\}.$$

Till exempel har vi

$$\{1,\ 100,\ 50\} \cup \{2,\ 1000,\ 100\} = \{1,\ 2,\ 50,\ 100,\ 1000\}$$

och

$$\mathbb{N} \cup \{1,\ 3,\ 19\} = \mathbb{N}.$$

Man kan tänka på $\cup$ som en kopp i vilken man häller mängderna A och B. Om man vänder koppen upp och ner får man $\cap$. Den operationen innebär att man bara behåller det som finns i båda mängderna; man häller bort resten. Mängden $A \cap B$ består alltså av de element som finns i både A och B,

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ och } x \in B\}$$

och kallas *snittet* av A och B. Det gäller att

$$\{1,\ 100,\ 50\} \cap \{2,\ 1000,\ 100\} = \{100\}$$

och

$$\mathbb{N} \cap \{1,\ 3,\ 19\} = \{1,\ 3,\ 19\}.$$

Vanligtvis tänker man sig att man har någon *grundmängd* där de inblandade mängderna är delmängder. I de exempel som gavs ovan är $\mathbb{N}$ kanske den naturliga grundmängden, men det är inte heller fel att säga att grundmängden är $\mathbb{R}$. Grundmängden har betydelse när man ska bestämma *komplementet* av en mängd. Om X är en mängd, grundmängden, och $A \subseteq X$ så är A:s komplement (i X) mängden

$$A^c = \{x \in X;\ x \notin A\},$$

d.v.s. mängden av de element som inte tillhör A. Andra vanliga beteckningar för komplementet är $\complement A$ eller $X \setminus A$.

Exempel 3.1. Om grundmängden är $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ gäller att $X^c = \varnothing$, $\{1\}^c = \{2,\ 3\}$ och $\varnothing^c = X$.

Om $A \cap B = \varnothing$ betyder ju det att mängderna A och B saknar gemensamma element. Man säger då att A och B är *disjunkta*.

En annan operation man kan göra med mängderna A och B är att bilda mängden av *ordnade par* (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$. Att paret är ordnat betyder $(a, b) \neq (b, a)$ såvida inte $a = b$. Den nya mängden kallas *produktmängden* eller den *Cartesiska produkten*[5] av A och B och betecknas $A \times B$. Alltså har vi

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Om exempelvis $A = \{1,\ 2\}$ och $B = \{10,\ 11,\ 12\}$ får vi:

$$A \times B = \{(1,\ 10),\ (1,\ 11),\ (1{,}12),\ (2,\ 10),\ (2{,}11),\ (2{,}12)\}.$$

Om A och B är ändliga mängder gäller följande formel

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B.$$

Beviset för detta är mycket lätt. Övertyga dig om att formeln stämmer innan du fortsätter! Istället för $A \times A$ skriver man ofta A^2. Ett särskilt viktigt fall av detta är när $A = \mathbb{R}$, d.v.s. de reella talen. Mängden $\mathbb{R}^2$ är då mängden av alla punkter i planet – om $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ brukar x_0 kallas x-koordinat och y_0 kallas y-koordinat.

Ytterligare en viktig mängd som man alltid kan bilda från en given mängd A är *potensmängden*, som betecknas $\mathcal{P}(A)$. Potensmängden är mängden av alla delmängder till A, det vill säga

$$\mathcal{P}(A) = \{B;\ B \subseteq A\}.$$

Om $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ gäller

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}.$$

Sats 3.2. *Om A är en ändlig mängd och $n = \operatorname{card} A$ gäller*

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^n.$$

Bevis. Ett element B i $\mathcal{P}(A)$ är en delmängd av A och därför entydigt bestämt av sina element. För varje element i A kan vi göra två val – antingen ta med det eller låta bli. Det ger $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ olika möjligheter att välja B. Alltså finns det 2^n delmängder av A och påståendet följer. $\square$

I exemplet ovan hade A tre element och följaktligen är $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 8$. Den tomma mängden har inga element, men $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ som har ett element, vilket stämmer med satsen eftersom $2^0 = 1$.

[5] Cartesius, eller egentligen *René Descartes* (1596–1650), fransk filosof och matematiker.

The set $A \cup B$ is the *union* of A and B, and $A \cap B$ is the *intersection*. If $A \cap B = \varnothing$ we say that A and B are *disjoint*. Given these two sets, we can always form their *product*, $A \times B$ and the *power set*, $\mathcal{P}(A)$. The cardinallity of the $\mathcal{P}(A)$ is always strictly greater than the cardinality of A.

Övning 3.5. Låt $A = \{1, 2, 4\}$ och $B = \{1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 3\}$. Bestäm a) $A \cap B$, b) $B \cup (\mathbb{N} \cap A)$, c) $A \times B$, d) $B \times A$, e) $A \times \mathbb{N}$, f) $\mathcal{P}(A)$ och g) $B \cap \{1/n;\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$.

Övning 3.6. Låt X vara en ändlig mängd med kardinalitet 300, och låt A vara en delmängd av X med $\operatorname{card} A = 51$. Bestäm $\operatorname{card}(X \smallsetminus A)$.

Övning 3.7. Bestäm a) $\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N};\ 0 \leqslant n \leqslant 10\}$ och
b) $\operatorname{card}\{n;\ n$ är ett primtal och $n \leqslant 40\}$

Övning 3.8. Låt $X = \{1,\ \{1\},\ 2,\ \{2\},\ 3\}$. Bestäm $\operatorname{card} \mathcal{P}(X)$ och $X \cap \mathcal{P}(X)$. *Ledning:* Det är inte nödvändigt att skriva upp mängden $\mathcal{P}(X)$.

3.1.1. En modell för datorskärmen

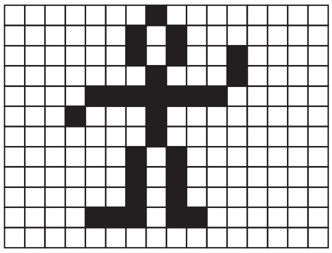
Det här avsnittet ägnas åt att konstruera en modell för att visa bilder på en datorskärm med hjälp av den mängdlära vi redan kan. För enkelhetens skull ska vi begränsa oss till en svartvit skärm. Bilden på skärmen består av en mängd små punkter, så kallade pixlar, som (på vår förenklade skärm) antingen kan vara svarta eller vita. En inte alltför ovanlig datorskärm har 1024 punkter horisontellt och 768 punkter vertikalt. Låt

$$H = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leqslant n < 1024\} \text{ och } V = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leqslant n < 768\},$$

och sätt $D = H \times V$. Ett element i D är ett ordnat par (h, v) där $0 \leqslant h < 1024$ och $0 \leqslant v < 768$, och det motsvarar precis pixeln på plats (h, v) på skärmen. Mängden D är alltså en modell för datorskärmen. Men hur ska vi beskriva en bild? På något sätt måste man välja ut vilka pixlar som ska vara svarta och vilka som ska vara vita. Låt nu B vara en delmängd av D. Om vi bestämmer att de element som finns i B ska vara svarta och resten vita, är ju B precis vad vi behöver: B är en bild på skärmen D. Det betyder att $\mathcal{P}(D)$ är mängden av alla bilder.

Låt oss avsluta med att fundera lite kring storleken på dessa mängder. Vi vet att $\operatorname{card} H = 1024$ och $\operatorname{card} V = 768$. Det betyder att

$$\operatorname{card} D = \operatorname{card} H \cdot \operatorname{card} V = 1024 \cdot 768 = 786432.$$



Figur 2: En liten datorskärm med 16×12 pixlar, och en av alla 6 277 101 735 386 680 763 835 789 423 207 666 416 102 355 444 464 034 512 896 möjliga bilder (delmängder) markerade med svart.

Det finns således 786432 punkter på skärmen. Vidare kan vi enligt sats 3.2 beräkna

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(D) = 2^{786432} \approx 4.18 \cdot 10^{236739}.$$

Detta är ett ganska stort tal. Vissa astronomer uppskattar universums vikt till 10^{53} kg vilket motsvarar 10^{83} elektronmassor. Jämfört med antalet möjliga bilder på vår lilla svartvita skärm är detta ett ganska litet tal. Skulle man se 50 bilder i sekunden, dygnet runt, skulle det ta ungefär 10^{236721} miljarder år att hinna genom alla. Universums ålder uppskattas till ca 13 miljarder år. En slutsats man kan dra är i vilket fall att den som påstår sig ha sett allt ljuger.

Övning 3.9. Gör en uppskattning av antalet olika bilder på en svartvit skärm med 128×128 pixlar.

3.2. Oväntade svårigheter

Vi har något vagt definierat en mängd som en samling av element. Kan man tillåta vilken samling element som helst? Finns mängden av alla mängder? Följande exempel visar att det kan uppstå svårigheter:

Exempel 3.3 (Russells[6] paradox)**.** Låt A vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själva. Vi frågar oss nu om $A \in A$? Om så är fallet, innehåller A sig självt, och enligt definitionen gäller då $A \notin A$. Men det är en motsägelse, så vi kan inte ha $A \in A$. Alltså har vi $A \notin A$, men eftersom A då inte innehåller sig självt, gäller då $A \in A$. Återigen motsägelse.

Enligt exemplet tycks A vara en mängd som varken innehåller A eller inte innehåller A. Sådana mängder vill man inte ha. En lösning är att i stället

[6]Bertrand Russell (1872–1970), matematiker och filosof.

för den s.k. naiva mängdlära som vi har behandlat, införa en *axiomatisk mängdlära* med noggranna regler för precis vilka mängder som får och inte får bildas. Axiom för mängdläran studerar man i mer avancerade kurser i logik.

3.3. Funktioner

Funktionsbegreppet hör till de viktigaste begreppen i matematiken. Ett sätt att se på en funktion är som en maskin som räknar ut något; man brukar ibland jämföra en funktion med en (svart) låda där man kan stoppa in en ”fråga”, som ofta kallas ett *argument*, och få ut ett ”svar”.

Ett enkelt exempel är en funktion som tar ett positivt tal som argument och svarar med arean av en cirkel med motsvarande radie. I det här fallet vet vi hur man kan konstruera funktionen. Om radien är r och arean är A gäller sambandet $A = \pi r^2$. Om vi kallar funktionen f skriver vi $f(r) = \pi r^2$.

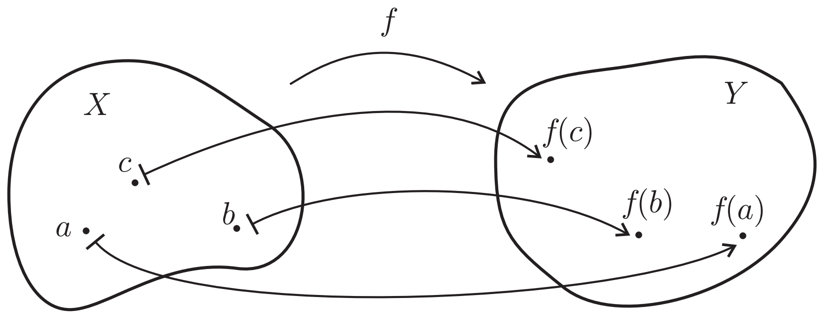
Men man kan också tänka sig mycket mer avancerade funktioner. Exempelvis en funktion som tar en ekvation som argument, och svarar med mängden av alla lösningar. Det går alldeles utmärkt att tänka sig en sådan funktion. Tyvärr är den lite för bra i någon mening; stoppar man in en ekvation som ingen människa eller dator kan lösa, går ju funktionsvärdet inte att räkna ut.

Definition 3.4. Låt X och Y vara två icke-tomma mängder, vilka som helst. En **funktion** (eller **avbildning**) från X till Y är ett samband som för varje element $x \in X$ pekar ut precis ett element $y \in Y$. Om funktionen kallas f kallar vi detta utpekade y för $f(x)$.

Låt oss fundera ett ögonblick på vad den här definitionen betyder. Vi har två mängder X och Y. För varje element x i X får och måste vi välja precis ett element i Y, och detta utvalda element kallar vi $f(x)$. Om man ser elementen i X som ”frågorna” och elementen i Y som ”svaren” ska man alltså bestämma exakt ett svar till varje fråga. Definitionen illustreras i figur 3 på motstående sida.

En funktion ger alltså alltid precis ett värde för varje argument. Ger man samma argument igen, måste man också få samma värde igen; en funktion som väl definierats förändras inte efterhand.

Vad gör man om man behöver en funktion som ger två olika svar? En lösningen är att byta målmängd. Istället för Y kanske funktionen ska ta värden i $Y \times Y$. Det passar bra om funktionen alltid ger två svar – t.ex. om man skriver en funktion som löser andragradsekvationer. Varierar antalet svar, kan $\mathcal{P}(Y)$ vara en lämplig målmängd. Då returnerar funktionen en mängd av värden.



Figur 3: En funktion $f\colon X \to Y$. Elementet a skickas till $f(a)$, b till $f(b)$ och c till $f(c)$.

Medan vi flera gånger betonat att en funktion bara ger ett värde för varje argument, finns det däremot inget som hindrar att en funktion ger samma värde för flera olika argument. Det enklaste exemplet på en funktion är faktiskt en konstant funktionen, en som alltid ger samma värde oavsett vilket argument som ges. Ytterligare en viktig funktion är *identitetsfunktionen*. $\mathrm{Id}\colon X \to X$ som är definierad genom $\mathrm{Id}(x) = x$.

3.3.1. Terminologi och skrivsätt

Det finns en del terminologi och skrivsätt som är bra att känna till när det gäller funktioner. Säg att vi har en funktion f från en mängd X till en mängd Y. Mängden X kallas *definitionsmängd* eller *domän*. Mängden Y kallas *målmängd*. Matematiker skriver kort och gott:

$$f\colon X \to Y$$

för att tala om att f är en funktion från X till Y. Observera att man här inte har talat om hur funktionen ska räknas ut. På gymnasiet ges de flesta funktioner av någon formel – man skriver $f(x) = x^2$ – men en formel är inte det enda sättet att ange en funktion I avsnitt 3.4 kommer vi att bekanta oss med några andra möjligheter. Funktionens *värdemängd* är mängden av de värden som faktiskt antas och betecknas med $f(X)$, alltså:

$$f(X) = \{f(x) \in Y;\ x \in X\}.$$

Värdemängden är en delmängd av målmängden. Om funktionen är konstant har värdemängden bara ett element. I analysen är en viktig typ av problem att bestämma största och minsta värdet i värdemängden, eller med andra ord att hitta funktionens minimum och maximum.

We write $f\colon X \to Y$ to say that f is a *function* (often called a *mapping* or simply a *map*) from the *domain*, X, to the *codomain*, Y. The set $f(X)$ is the *range* of the function.

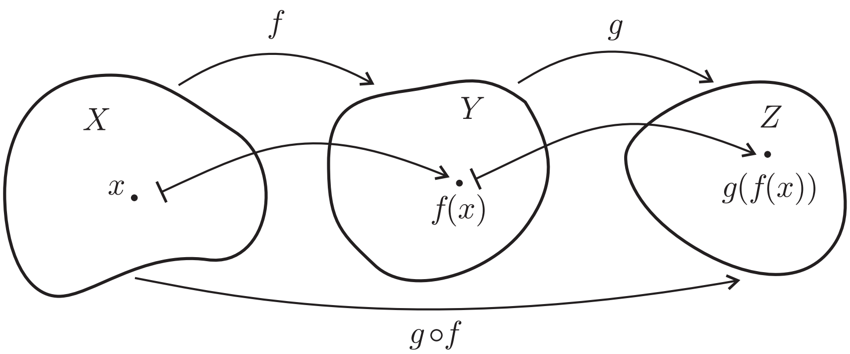
Övning 3.10. Bestäm definitionsmängd, målmängd och värdemängd för funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 1$.

3.3.2. Sammansättning av funktioner

Låt X, Y och Z vara icke-tomma mängder och låt $f\colon X \to Y$ och $g\colon Y \to Z$ vara två funktioner. Med hjälp av dessa kan vi nu definiera en ny funktion $h\colon X \to Z$, genom $h(x) = g(f(x))$. Man använder alltså först f för att ta elementet x från X till Y och därefter g för att ta $f(x) \in Y$ till $h(x) = g(f(x)) \in Z$. Funktionen h kallas *sammansättningen* av f och g och brukar betecknas med $g \circ f$. Detta kan utläsas ”g ring f” eller ”g boll f”.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Observera ordningen. Först använder vi f och därefter g, men g står längst till vänster.



Figur 4: Sammansättning av två funktioner f och g.

Exempel 3.5. Låt $X = Y = Z = \mathbb{N}$ och definiera $f(n) = n^2 + 1$ och $g(n) = 3n + 10$. Eftersom alla mängder är lika, kan vi bestämma både $f \circ g$ och $g \circ f$:

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(3n + 10) = (3n + 10)^2 + 1 = 9n^2 + 60n + 101$$

medan

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n^2 + 1) = 3(n^2 + 1) + 10 = 3n^2 + 13.$$

Vi noterar särskilt att $f \circ g \neq g \circ f$.

> Given two functions $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to Z$ we can *compose* them and get $g \circ f$.

Övning 3.11. Låt $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ges av $f(n) = (n-1)^2$ och $g(n) = n^2 + 3n$. Bestäm $f \circ g(n)$ och $g \circ f(n)$.

Övning 3.12. En *binär operation* på en mängd X är en funktion

$$*\colon X \times X \to X.$$

Man skriver oftast inte $*((a, b))$ för värdet av $*$ i punkten $(a, b) \in X^2$. Istället skriver man $a * b$. Ett exempel på en binär operation är $+$ på mängden $\mathbb{N}$. Man säger att en binär operation $*$ är *kommutativ* om $a * b = b * a$ för alla a och b i X. Avgör vilka av följande operationer som är kommutativa:
a) $+$ på $\mathbb{N}$.
b) $-$ på $\mathbb{R}$ (de reella talen).
c) $\circ$ på mängden av alla funktioner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

3.3.3. Inversfunktioner

Antag att vi har en funktion mellan två mängder, $f\colon X \to Y$. Vi är intresserade av att hitta en funktion för att göra resan baklänges från Y till X, alltså en funktion $g\colon Y \to X$ som är sådan att om $y = f(x)$ så är $g(y) = x$, eller annorlunda uttryckt sammansättningen $g \circ f$ ska vara identitetsfunktionen på X, $g(f(x)) = x$ för alla $x \in X$.

Är det alltid möjligt att hitta en sådan funktion g? Svaret visar sig vara nej. Om x_1 och x_2 är två olika element i X, men $y = f(x_1) = f(x_2)$ så kan man ju inte veta om $g(y)$ ska vara x_1 eller x_2. (För ett enkelt exempel på när detta inträffar, tänk på funktionen $f(x) = x^2$. Då är $f(1) = f(-1) = 1$.) Därför är det intressant att studera funktioner som uppfyller villkoret:

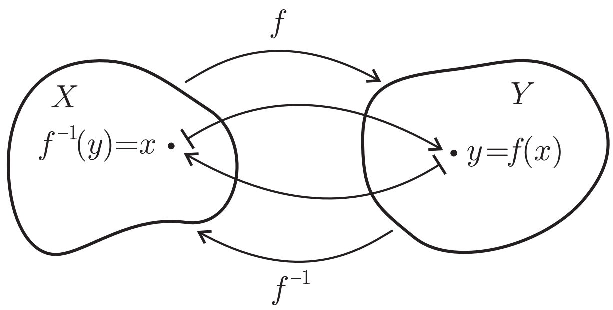
$$x_1 \neq x_2 \qquad \text{medför att} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

En funktion som uppfyller detta villkor kallas *injektiv*. Om f är injektiv och $f(x) = y$, så betyder det att det inte finns något annat $z \in X$ så att $f(z) = y$.

Det finns ytterligare ett problem. Givet ett element $y \in Y$ är det ju inte säkert att det finns något $x \in X$ så att $f(x) = y$. Att säga att denna situation inte kan uppstå är precis samma sak som att säga att värdemängden är lika med målmängden, dvs det gäller att

$$f(X) = Y.$$

Om detta villkor är uppfyllt säger vi att funktionen är *surjektiv*. En funktion som både är injektiv och surjektiv kallas *bijektiv*. Om f är bijektiv går det att hitta funktionen g. För varje $y \in Y$ är då $g(y)$ det existerande (enligt surjektiviteten) och entydigt bestämda (enligt injektiviteten) $x \in X$, med egenskapen att $f(x) = y$. Denna funktion kallas *inversen* till f och brukar betecknas med f^{-1}.



Figur 5: Funktionen f och dess invers, f^{-1}.

Exempel 3.6. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x + 10$. Vi kontrollerar först att f är injektiv. Om $x_1 \neq x_2$ så är $x_1 + 10 \neq x_2 + 10$. Alltså är $f(x_1) \neq f(x_2)$, så f är injektiv. Låt nu y vara ett godtyckligt reellt tal. Då är $y - 10$ också ett reellt tal och $f(y - 10) = y$. Därför är $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, d.v.s. f är surjektiv. Det är lätt att inse att inversen ges av: $f^{-1}(x) = x - 10$.

Exempel 3.7. Låt oss istället titta på funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som ges av samma formel som i föregående exempel, alltså $f(n) = n + 10$. Samma resonemang som där ger att f är injektiv. Men det finns inget naturligt tal k så att $f(k) = 0$ eftersom ju $k = -10$ inte är ett naturligt tal. Inte heller är funktionen $g(n) = n - 10$, som var inversen i det exemplet, en funktion mellan de naturliga talen, eftersom (exempelvis) $g(5) = -5$ inte ett naturligt tal.

Exempel 3.8. Låt $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Funktionen $f\colon X \to X$, som ges av

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1, f(3) = 3 \text{ och } f(4) = 2$$

är en bijektion. Kontrollera det! Inversen ges av

$$f^{-1}(1) = 2,\ f^{-1}(2) = 4,\ f^{-1}(3) = 3 \text{ och } f^{-1}(4) = 1.$$

Anmärkning 3.9. Om funktionen $f\colon X \to Y$ inte är surjektiv beror det på att målmängden Y är "för stor" för att fyllas av funktionen. Om man istället betraktar funktionen som $f\colon X \to f(X)$, är denna automatiskt surjektiv och alltså finns en invers $f^{-1}f(X) \to X$, om bara f är injektiv. I exempel 3.7 är $f(\mathbb{N}) = \{10, 11, 12, \dots\}$ och funktionen $g\colon f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ är inversen till $f\colon \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ där f och g för övrigt är som i exemplet.

> If $f\colon X \to Y$ is both *injective* (or *one-to-one*) and *surjective* (or *onto*) we call it *bijective.* If f is bijective, we may form the *inverse*, f^{-1}.

Övning 3.13. Vilka av följande funktioner är surjektiva? Vilka är injektiva?
a) $f\colon \{1, 2\} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 10n$ (n=1, 2),
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$?

Övning 3.14. Låt $J = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vara mängden av jämna naturliga tal. Definiera $f\colon \mathbb{N} \to J$ genom $f(n) = 2n$. Visa att f är en bijektion och bestäm inversen.

Övning 3.15. Låt J vara som i föregående övning. Beskriv mängden $U = \mathbb{N} \setminus J$ och konstruera en bijektion mellan dessa mängder.

Övning 3.16. Låt $\Phi = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ vara en mängd med fyra element, och låt $\psi\colon \{\alpha, \beta, \gamma\} \to \Phi$ definieras genom $\psi(\alpha) = \beta$, $\psi(\beta) = \gamma$ och $\psi(\gamma) = \delta$. Utöka ψ till hela Φ (d.v.s. definiera $\psi(\delta)$) så att den utökade funktionen blir en bijektion (d.v.s. en bijektiv funktion) och beräkna ψ^{-1}. Är svaret entydigt bestämt?

Övning 3.17. Låt ψ vara den utökade funktionen från föregående uppgift och definiera $\xi\colon \Phi \to \Phi$ genom $\xi = \psi \circ \psi$. Visa att ξ är en bijektion och bestäm ξ^{-1}. Visa att $\psi^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \psi)^{-1}$.

3.4. Att definiera funktioner

Om man talar om att f är en funktion mellan mängderna X och Y, har man egentligen inte talat om vad f är. För att fullständigt beskriva en funktion måste man också tala om hur den verkar; man måste ge villkor som medför att $f(x)$ är entydigt bestämt av x – man säger att f måste vara *väldefinierad*. Det vanligaste sättet är att tala om hur man – i alla fall i princip – kan räkna ut $f(x)$ för varje x. Som vi noterade redan i inledningen finns det dock inget krav på att det faktiskt måste finnas någon människa eller maskin som är kapabel att genomföre beräkningen[7]. Denna anmärkning kanske kan tyckas vara lite subtil, men den är viktig.

Vi har redan stött på några olika sätt att definiera funktioner i tidigare exempel. Om definitionsmängden är liten kan man tala om hur funktionen verkar på varje element.

Exempel 3.10. Låt $X = \{1, 2, 3\}$ och låt f vara en funktion $f\colon X \to \mathbb{N}$ som given av

$$f(1) = 10,\ f(2) = 100 \text{ och } f(3) = 1000$$

Man kan också skriva:

$$1 \mapsto 10,\ 2 \mapsto 100 \text{ och } 3 \mapsto 1000$$

Observera den speciella pilen. Den kan uttalas ”avbildas på”.

Ibland kan man ge funktionen genom en formel. Den metoden är den vanligaste i gymnasiet. Ofta utelämnar man där informationen om mellan vilka mängder funktionen är definierad, utan förutsätter att det är (någon lämplig delmängd av) $\mathbb{R}$, de reella talen. Jag rekommenderar att man är noga med vilka mängder som är inblandade så fort det kan råda någon som helst tvekan. Ett exempel på en funktion definierad genom formel är $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, där $g(n) = 10^n$.

En mycket viktig metod att ange funktioner är genom falluppdelning. Att som i exempel 3.10 ange hur funktionen verkar på varje element är egentligen en specialfall av detta. Ofta skriver man falluppdelningar så här:

Exempel 3.11. Låt $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definierad genom

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n < 10 \\ n - 10 & \text{om } n \geqslant 10 \end{cases}$$

Vi ser att $h(4) = 0$, medan $h(14) = 14 - 10 = 4$.

Övning 3.18. Låt $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definierad genom

$$f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{om } n \text{ är udda} \\ (n+1)^2 + 1 & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

Beräkna a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(f(1))$.

[7]Att studera s.k. *beräkningsbarhet* hos funktioner är att viktigt område inom logik och teoretisk datavetenskap.

Övning 3.19. Skriv upp en funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som returnerar det minsta jämna tal som är större än eller lika med argumentet.

Övning 3.20. Låt h vara som i exempel 3.11. Försök hitta ett uttryck för funktionen $h \circ h$.

Övning 3.21. Funktionen $\sin\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ torde vara mycket välkänd från gymnasiet. Hur definieras den egentligen? Jämför med någon lärobok.

3.4.1. Rekursion

För funktioner som har $\mathbb{N}$ som definitionsmängd, är det ibland mycket praktiskt att definiera funktionen i termer av sig själv, som i följande exempel. Låt $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definierad genom

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ f(n-1) + 2 & \text{annars} \end{cases}$$

Av definitionen följer att

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) = f(1-1) + 2 = f(0) + 2 &= 0 + 2 = 2, \\ f(2) = f(2-1) + 2 &= 4, \\ f(3) = f(2) + 2 &= 6 \text{ o.s.v.} \end{aligned}$$

Ett praktiskt sätt att beräkna en rekursiv funktion är att upprätta en tabell som man fyller i från vänster till höger, så långt man behöver:

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(n)$	0	2	4	6	8	10	12	$\cdots$

I det här fallet är det ganska lätt att se att $f(n) = 2n$ eftersom funktionsvärdet ökar med två i varje steg. Man brukar säga att man hittat en *sluten formel* för funktionen när man kan skriva om den utan rekursion. Olika tekniker för att växla mellan reskursiv form och sluten from kommer du att få studera i kommande algebrakurser.

Anmärkning 3.12. En funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definierar på ett naturligt sätt en följd av tal, $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \ldots$ Det är därför ganska vanligt att man istället tänker på funktionen som en talföljd och då är det ganska vanligt att man skriver x_n istället för $f(n)$, alltså $x_n = f(n)$. Följden ovan blir då x_0, x_1, $x_2, \ldots$ och en rekursionsformel kan skrivas som

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ x_{n-1} + 2 & \text{annars} \end{cases}$$

Varför är man intresserad av rekursion när det verkar mycket enklare att bara använda den slutna formeln? Det finns flera orsaker. En är att det ofta är naturligt (och därmed enklare) att formulera problem hjälp av rekursion. Man kan säga att man kan lösa ett problem genom att lösa (eventuellt flera) mindre delproblem. Sedan finns det funktioner som kan definieras rekursivt, men där det inte finns någon sluten formel. Slutligen är den rekursion vi studerar här starkt besläktad med rekursiva algoritmer i datavetenskap. För att analysera sådana algoritmer är matematisk rekursion ett oöverträffat redskap. Följande exempel är en intuitiv beskrivning av en rekursiv algoritm för sortering[8].

Exempel 3.13. En procedur för att sortera en mängd med N element, delar upp mängden i två ungefär lika stora delar. Sedan anropar den sig självt två gånger – en för varje del. Tillslut blir delarna så små att de bara består av ett element, och en mängd med bara ett element är ju trivialt sorterad. Är delarna större, får ju proceduren tillbaka två sorterade delar. Allt som behöver göras då är att sortera ihop två redan sorterade delar – och det är ett ganska enkelt problem. Genom att rekursivt dela problemet i två enklare problem och lösa dem, lyckas algoritmen lösa det ganska komplicerade problemet att sortera en mängd.

Vi avslutar det här avsnittet med ytterligare ett par exempel på rekursiva funktioner.

Exempel 3.14. Om n är ett naturligt tal är $n!$ (uttalas n-fakultet) definierat genom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Det visar också sig praktiskt att definiera $0! = 1$. Exempelvis är $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Rekursivt kan fakultetsfunktionen definieras genom

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{annars.} \end{cases}$$

Övertyga dig om att rekursionsformeln är korrekt genom att använda den för att t.ex. räkna ut $5!$.

Exempel 3.15 (Fibonaccis[9] talföljd)**.** Låt $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieras genom

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ 1 & \text{om } n = 1 \\ F(n-2) + F(n-1) & \text{annars.} \end{cases}$$

[8] Algoritmen brukar kallas *merge sort*.

[9] Fibonacci, egentligen Leonardo från Pisa, ca. 1180–1250.

Vi ser att talföljden som ges av $F(n)$ börjar med

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \ldots$$

Denna talföljd har en märklig förmåga att dyka upp i naturen (t.ex. i samband med kaniners fortplantning och kottars spiralstrukturer) såväl som i optimala datastrukturer.

Övning 3.22. Betrakta följande rekursiva funktion ($k \in \mathbb{N}$).

$$S_k(n) = \begin{cases} k & \text{om } n = 0 \\ S_k(n-1) + 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $S_k(n)$ får några värden av k och n och försök hitta en sluten formel.

Övning 3.23. Låt $P_k(n) = k \cdot n$ vara funktionen som ger produkten av de naturliga talen k och n. Bestäm en rekursiv formel för $P_k(n)$.

Övning 3.24. Följande rekursionsformel är uppenbarligen besläktad med Fibonaccis talföljd.

$$E(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ 2 & \text{om } n = 1 \\ E(n-2) \cdot E(n-1) & \text{annars.} \end{cases}$$

Undersök om det finns någon formel som relaterar $E(n)$ och Fibonaccis talföljd $F(n)$ från exempel 3.15.

3.5. Avrundningsfunktioner

I det här avsnittet ska vi studera några funktioner som avrundar reella tal till heltal. Först måste vi definiera de hela talen. De brukar betecknas med $\mathbb{Z}$ (eller $\mathbf{Z}$), och definieras genom

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\pm n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Avrundning är en mycket viktig operation i många sammanhang. Mest grundläggande är kanske avrundning uppåt och avrundning nedåt. Den funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ som avrundar uppåt, d.v.s. för varje $x \in \mathbb{R}$ returnerar det *minsta heltal som är större eller lika med* x kallas takfunktionen, och brukar betecknas med $\lceil x \rceil$. Ett sätt att definiera den formellt är alltså:

$$\lceil x \rceil = \min(n \in \mathbb{Z};\ n \geqslant x) \tag{2}$$

Symbolen min står för minimum, och plockar alltså ut det minsta av alla heltal som är större eller lika med x. Det går också att definiera takfunktionen genom falluppdelning – fast man får oändligt många fall: ett för varje heltal.

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & \text{om } -2 < x \leqslant -1 \\ 0 & \text{om } -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \leqslant 1 \\ \vdots & \\ n & \text{om } (n-1) < x \leqslant n \text{ där } n \in \mathbb{Z}. \\ \vdots & \end{cases} \tag{3}$$

Notera att det alltid finns precis ett heltal n så att $(n-1) < x \leqslant n$. Det är vad som krävs för att formeln ska definiera en funktion. Att de två definitioneran ger samma resultat är lätt att inse så fort man förstått hur de fungerar. Följande exempel illustrerar:

Exempel 3.16. Låt $x = 3.4$. Mängden av heltal som är större än x är $\{4, 5, 6, \dots\}$ och dess minsta element är helt klart 4, så enligt (2) är $\lceil 3.4 \rceil = 4$. Men 4 är också det unika heltal sådant att $3 < 3.4 \leqslant 4$ som i (3). Om $x = -2.7$ är mängden av heltal som är större än x mängden $\{-2, -1, \cdots\}$. Det minsta elementet är -2, samtidigt som $-3 < -2.7 \leqslant -2$. Det följer att $\lceil -2.7 \rceil = -2$.

Takfunktionen används ofta för att beräkna priset vid uthyrning och dylikt. Om det kostar k kr i timmen att hyra en kanot, och tiden man utnyttjar kanoten är x brukar man få betala $k \cdot \lceil x \rceil$ kr. Har man alltså utnyttjat kanoten i 2.5 timmar får man betala $k \cdot \lceil 2.5 \rceil = 3k$ kr.

I analogi med takfunktionen definierar man golvfunktionen, avrundning nedåt, som den funktion som för alla $x \in \mathbb{R}$ returnerar det *största heltal som är mindre eller lika med* x. Golvfunktionen brukar betecknas med $\lfloor x \rfloor$. Alltså har vi

$$\lfloor x \rfloor = \max(n \in \mathbb{Z};\ n \leqslant x) \tag{4}$$

Symbolen max står naturligtvis för maximum. En alternativ definition är en falluppdelning

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \text{om } n \leqslant x < (n+1) \text{ där } n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Exempel 3.17. Det gäller att $\lfloor 5.5 \rfloor = 5$ medan $\lfloor -5.5 \rfloor = -6$.

Ibland är man intresserad av avrundning till närmaste heltal. Det finns ingen riktigt standardiserad beteckning för avrundning, så här kallar vi funktionen A. Funktionen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ returnerar alltså det heltal som ligger närmast x. Det finns dock ett problem. Om x ligger precis mitt emellan två heltal (t.ex. $x = 0.5$), vilket ska vi då välja? Vi bestämmer oss för att avrunda uppåt i detta fall, men noterar att andra alternativ kan vara intressanta[10]. Funktionen A går att uttrycka med hjälp av golvfunktionen på följande sätt:

$$A(x) = \lfloor x + 0.5 \rfloor$$

För att bevisa denna formel noterar vi att ett reellt tal x kan skrivas (på ett unikt sätt) som

$$x = n + s$$

där n är ett heltal och s är ett reellt tal som uppfyller $0 \leqslant s < 1$. Om $x = 3.14$ måste $n = 3$ och $s = 0.14$. Det följer att om $s < 0.5$ blir $A(x) = n$ och om $s \geqslant 0.5$ blir $A(x) = n + 1$. Antag att $s < 0.5$. Då är $x + 0.5 < n + 1$ så att $\lfloor x + 0.5 \rfloor = n$. Om $s \geqslant 0.5$ följer det att $x + 0.5 \geqslant n + 1$ och därför är $\lfloor x + 0.5 \rfloor = n + 1$. Därmed är formeln bevisad.

Anmärkning 3.18. Funktionerna $\lceil x \rceil$, $\lfloor x \rfloor$ och $A(x)$ brukar finnas i de flesta programmeringsspråk, och brukar heta något i stil med `ceil`, `floor` respektive `round`.

Exempel 3.19. När man räknar med pengar, är det av intresse att kunna avrunda till hela femtioöringar. Det går utmärkt att göra med avrundningsfunktionen. Om $x \in \mathbb{R}$ är antalet kronor, motsvarar $2x$ samma belopp i femtioöringar. Därmed är $A(2x)$ antalet hela femtioöringar. För att få svaret i kronor behöver man bara dela med två. Formeln blir alltså $A(2x)/2$. Om $x = 8.64$ kr, är

$$A(2x)/2 = A(17.28)/2 = 17/2 = 8.50.$$

Om $y = 8.84$ är

$$A(2y)/2 = A(17.68)/2 = 18/2 = 9.00.$$

Övning 3.25. Bestäm a) $\lceil 3.2 \rceil$ b) $\lfloor 3.2 \rfloor$ c) $\lceil -3.2 \rceil$ d) $\lfloor -3.2 \rfloor$ e) $\lceil 2 \rceil$ f) $\lfloor 2 \rfloor$.

Övning 3.26. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är a) $\lceil x \rceil = 0$ b) $\lfloor x \rfloor = 0$.

[10] Ett intressant alternativ är att alltid avrunda till närmaste jämna tal. Dels kan det vara statistiskt fördelaktigt att lika ofta avrunda uppåt som nedåt, dels visar det sig att denna avrundningsfunktion förmår lyfta över egenskaper från de reella talens struktur (topologi) till heltalen. Heltalen utrustade med denna struktur kallas Khalimskylinjen.

Övning 3.27. Lös ekvationen (d.v.s. bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ så att) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

Övning 3.28. Använd avrundningsfunktionen A för att skriva upp en funktion som avrundar till närmaste hela tiotal. Där det finns ett val, ska funktionen avrunda uppåt.

Övning 3.29. Heltalsdelen av ett reellt tal är det heltal som blir kvar om man (i decimalutvecklingen) kastar bort alla siffror efter decimalkommat. Låt $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ vara den funktion som returnerar heltalsdelen av ett reellt tal. Exempelvis är $H(0.7) = H(-0.7) = 0$, $H(3.4) = 3$ och $H(-4.999) = -4$. Skriv upp en formel för H med hjälp av tak- och golvfunktionerna.

Ledning: Gör en falluppdelning beroende på om x är negativt eller positivt.

4. Tal

Oavsett om man anser att matematiken främst handlar om beräkningar eller något annat, så kommer man inte ifrån att tal av olika slag spelar en mycket stor roll. Det finns flera olika talmängder och det här avsnittet syftar till att ge en översikt av dessa talmängder. Det är ingen kurs i hur man räknar och inte heller är det en komplett beskrivning av hur talmängderna konstrueras med härledningar av räkneregler. Snarare är perspektivet detta: Vi är givna de naturliga talen. Varför behöver man fler tal? Vilka matematiska problem ställs man inför när man försöker utöka talmängderna? Hur kan dessa problem lösas?

4.1. Naturliga tal

Att räkna föremål i sin omgivning är kanske den allra mest grundläggande matematiska verksamheten. Huruvida en apa kan räkna till tre bananer låter jag vara osagt, men jag är övertygad om att hon kan inse att fem bananer är fler än fyra.

De tal som behövs för att räkna antal är $1, 2, 3, \ldots$. Talet noll är mer svårtolkat och är historiskt sett yngre. Trots detta brukar man numera låta de naturliga talen utgöras av mängden

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Det bör observeras att somliga inte anser att noll är ett naturligt tal, varför man måste vara observant när man läser en främmande matematisk text. Som bekant kan naturliga tal multipliceras och adderas. Så länge svaret blir ett naturligt tal kan man också subtrahera och dividera inom mängden. Man kan även lösa vissa ekvationer:

$$12 + x = 18 \iff x = 6.$$

Ekvationen $10 + x = 3$ saknar dock lösning om man begränsar sig till naturliga tal. Ekvationen är inte oviktig, den uppkommer t.ex. om man frågar sig hur farten ska ändras om man vill gå från 10 m/s till 3 m/s. Vi vet att ekvationens lösning är $x = -7$, men för att komma åt den behöver vi införa en större mängd tal, de hela talen.

4.2. Hela tal

De *hela talen* eller *heltalen* utgörs av mängden

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Symbolen $\mathbb{Z}$ kommer från tyskans *Zahl*, tal. Negativa tal är mer abstrakta än naturliga tal och historiskt sett tog det lång tid innan de accepterades. Idag är det knappast någon som tvivlar på nyttan med negativa tal. Om a och b är heltal, så finns det alltid en heltalslösning till ekvationen

$$a + x = b,$$

nämligen $x = b - a$. Ekvationen $ax = b$ kan man dock få problem med. I fallet $2x = 10$ går allt bra; lösningen är $x = 5$, men det finns inget heltal x så att $3x = 10$. Den ekvationen representerar exempelvis det betydelsefulla problemet att dela tio liter jordgubbssaft på tre personer. För att kunna lösa den här typen av ekvationer behövs ännu fler tal.

Övning 4.1. Konstruera en injektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Övning 4.2. Konstruera en surjektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

4.3. Rationella tal

Behovet av rationella tal uppstår så fort man vill dela något helt i mindre delar. De första exemplen på mellanstadiet brukar involvera en tårta som ska delas mellan några tårtsugna. Här ska vi försöka introducera de rationella talen på ett mer abstrakt sätt.

Ett *bråk* är ett ordnat par (a, b) av heltal där $b \neq 0$ och är alltså ett element i $\mathbb{Z}^2$. Det vanliga är dock att man istället skriver paret som

$$\frac{a}{b} \qquad \text{eller} \qquad a/b.$$

Ett bekymmer är att värdet av ett bråk (intuitivt tolkat som en kvot) inte bestämmer a och b entydigt. Exempelvis är $1/2 = 3/6$. Två bråk a/b och c/d är lika om heltalen a, b, c, d uppfyller ekvationen $ad = cb$. Alltså

$$a/b = c/d \iff ad = cb.$$

I exemplet ovan har vi $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$. Med hjälp av denna likhetsrelation, kan man dela in mängden av bråk i delmängder, så kallade *ekvivalensklasser*[11], där två bråk a/b och c/d tillhör samma ekvivalensklass om och endast om $a/b = c/d$. Ett *rationellt tal* är en sådan ekvivalensklass och mängden av rationella tal är mängden av ekvivalensklasser.

Mängden av rationella tal brukar betecknas med $\mathbb{Q}$ – tänk på engelskans ord för kvot, *quotient*. Ett rationellt tal representeras av (d.v.s. man skriver det genom att använda) något element i ekvivalensklassen. Några bråk som representerar samma rationella tal som $1/2$ är alltså:

$$\frac{3}{6}, \quad \frac{-3}{-6}, \quad \frac{100}{200}, \quad \frac{13}{26}, \quad \frac{-34}{-68}, \quad \frac{512}{1024}.$$

Trots att dessa bråk skrivs på olika sätt representerar de alltså *samma rationella tal*. Vi noterar särskilt att ett heltal n representeras av $n/1$, och genom att identifiera ett heltal n med det rationella talet $n/1$ kan heltalen betraktas som en delmängd av $\mathbb{Q}$.

Vi har nu en mängd, $\mathbb{Q}$, som vi kallar de rationella talen. För att den ska bli användbar måste man tala om hur man räknar med rationella tal. Dessa regler torde vara mycket välbekanta. Här listar vi de viktigaste:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{(produkt)} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{(summa)} \tag{7}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{(invers)} \tag{8}$$

För att inversen ska vara definierad krävs att $a \neq 0$. Invertering är en operation som finns för rationella tal, men inte för hela tal. Vi ser att

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

Om man multiplicerar ett rationellt tal med dess invers får man således 1, som är *enhetselementet* för multiplikation. Ettan kallas enhetselement eller *identitetselement* för multiplikation eftersom multiplikation med 1 inte

[11] Så kallade ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser går att studera systematiskt, vilket görs i den grundläggande algebrakursen.

påverkar värdet. (Identitetselementet för addition är 0, eftersom $a + 0 = a$ för alla a.) Terminologin är helt analog med den för funktioner; en funktion sammansatt med sin invers blir identitetsfunktionen, $x \mapsto x$, den funktion som inte påverkar värdet.

Med hjälp av inversen kan vi också definiera division om $c \neq 0$.

$$\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{ad}{bc}. \tag{9}$$

Därmed har vi definierat de grundläggande räkneoperationerna på $\mathbb{Q}$. De operationer som definieras av ekvationerna (6)–(9) måste man kunna för att klara av att hantera rationella tal. Som du märker är rationella tal avsevärt mer komplicerade att definiera än de hela talen. Den största svårigheten kanske ligger i att representationen av dem inte är unik.

Faktum är att vi har sopat en teknisk svårighet under mattan. Hur vet man att ekvationerna (6)–(9) ger samma rationella tal oavsett vilka representanter man använder för de rationella argumenten? Detta kräver ett bevis för varje fall. Dessa bevis är visserligen ganska lätta, men vi avstår ändå från att genomföra dem här.

Anmärkning 4.1. Om man skriver att r är ett rationellt tal, menar man att det finns heltal a och b så att $r = a/b$. Man kan även ange ett rationellt tal genom en decimalutveckling, som exempelvis i $r = 1.321$. Vi ser att en möjligt representant för detta rationella tal är $1321/1000$.

Anledningen till att vi införde rationella tal, var att vi ville lösa ekvationen $3x = 10$. Genom att multiplicera vänster- och högerled med inversen $3^{-1} = 1/3$ får vi nu lösningen $x = 10/3$. Mer allmänt, om p och q är rationella tal och $p \neq 0$ så kan vi lösa ekvationen

$$px + q = 0.$$

Den har lösningen $x = -q/p$. Så långt gott och väl. Hur är det med ekvationen $x^2 = 2$? Svaret är nedslående:

Sats 4.2. *Det finns inget rationellt tal r sådant att $r^2 = 2$.*

Bevis. Antag att det finns ett rationellt tal $r = a/b$ sådant att $(a/b)^2 = 2$. Genom att förkorta bort alla eventuella gemensamma faktorer kan vi alltid anta att a och b saknar sådana. Eftersom

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2,$$

gäller att $a^2 = 2b^2$. Men det betyder att a^2 är ett jämt tal, och eftersom ett udda tal i kvadrat alltid är udda, måste därför a vara jämt. Det följer att vi kan skriva $a = 2c$ där c är ett annat heltal. Men

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2,$$

vilket betyder att $2c^2 = b^2$. Men enligt samma resonemang som ovan betyder det att b måste vara ett jämt tal. Men då har ju både a och b en gemensam faktor två, vilket motsäger att a och b saknade gemensamma faktorer. Därför måste vårt antagande om att det fanns ett sådant tal a/b vara felaktigt, och satsen är bevisad. $\square$

4.4. Reella tal

Som vi såg i slutet på föregående avsnitt räcker inte heller de rationella talen till för att lösa alla ekvationer. Vi behöver ännu fler tal! Vi vet ju att $x = \sqrt{2}$ löser ekvationen $x^2 = 2$ och enligt sats 4.2 är $\sqrt{2}$ inte ett rationellt tal. Men vi kan approximera $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ med en följd av rationella tal som närmar sig $\sqrt{2}$, t.ex. följden

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1{,}414213,\ldots$$

Naturligtvis finns det många olika följder som närmar sig samma tal, så precis som i konstruktionen av rationella tal, måste man titta på mängden av de följder som närmar sig samma tal. En sådan mängd av följder identifieras med ett *reellt tal*. Vi avstår här från att fördjupa oss i de tekniska detaljerna kring detta. Mängden av alla reella tal betecknas med $\mathbb{R}$. Det är enklast att tänka på $\mathbb{R}$ som mängden av alla punkter på tallinjen. Ett rationellt r tal kan identifieras med den konstanta följden r, r, r,..., och genom detta blir $\mathbb{Q}$ en delmängd av $\mathbb{R}$. De reella tal som inte är rationella kallas *irrationella*.

Man kan visa att talen π, e, och $\sqrt{a}$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$), är reella tal. Vi anmärker att de reella talen är så många att de flesta inte går att konstruera, vilket lite vagt betyder att det inte går att skriva någon algoritm eller något datorprogram som skriver ut alla decimaler i talet, även om programmet får köras hur länge som helst. De tal som nämndes i inledningen går däremot utmärkt att approximera på en dator. En vanlig PC har inga problem att räkna ut en miljon decimaler i π.

Emellertid finns det fortfarande ekvationer som vi inte kan lösa. Ett reellt tal i kvadrat är aldrig negativt. Därför finns det inget reellt tal som löser ekvationen $x^2 = -1$.

4.5. Komplexa tal

De reella talen är uppradade längs tallinjen. Det kan vara svårt att tänka sig att det finns tal utanför tallinjen. Och om de trots allt finns, vad ska de vara bra för? De kan ju inte mäta en sträcka eller räkna pengar; för dessa ändamål räcker de reella talen.

Att en linje kan ligga i ett plan är vi vana vid. Ritar man en (del av en) linje på ett papper utgör pappret (en del av) planet som linjen ligger i. Om linjen representerar tallinjen, ligger de reella talen på linjen, medan de komplexa fyller upp hela planet. Det är egentligen inte konstigare än att de reella talen fyller upp mellanrummen mellan heltalen.

Hur är det då med användbarheten? Det kan vara svårt att komma på några vardagstillämpningar av komplexa tal. Men i tekniska tillämpningar är komplexa tal av stor betydelse. Exempelvis MP3-musik bygger på en kodning av ljudvågor som inte skulle fungera utan de komplexa talen.

Tallinjen betecknas ju med $\mathbb{R}$ och vi har redan noterat att planet brukar identifieras med produktmängden $\mathbb{R}^2$, d.v.s. mängden av ordnade par (x_0, y_0), där x_0 ofta kallas x-koordinat och y_0 kallas y-koordinat. Ett *komplext tal* är en punkt i planet, och kan alltså identifieras med ett element i $\mathbb{R}^2$, ett ordnat par (a, b) av reella tal. Två komplexa tal (a, b) och (c, d) är lika om och endast om $a = c$ och $c = d$. Mängden av komplexa tal betecknas med $\mathbb{C}$. Notera hur mycket enklare det är att konstruera mängden av komplexa tal jämfört med mängden av rationella tal.

Vi låter den reella tallinjen utgöra x-axeln i vårt plan, så ett reellt tal x identifieras med det komplexa talet $(x, 0)$. Genom denna identifikation betraktar man $\mathbb{R}$ som en delmängd av $\mathbb{C}$.

Det visar sig praktiskt att skriva ett komplext tal (a, b) som $a + bi$ där i kallas den *imaginära enheten*. Tillsvidare betraktar vi i bara som en symbol. Vi har nu en mängd, $\mathbb{C}$, och det återstår att utrusta den med lämpliga räkneregler. Vi börjar med addition. Om (a, b) och (c, d) är komplexa tal definieras summan genom

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{10}$$

Detta är uppenbarligen ekvivalent med att $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$. Två reella tal (skrivna som komplexa tal), $(x, 0)$ och $(y, 0)$ ska ju ha summa $(x + y, 0)$. Vi ser att detta faktiskt gäller om man använder (10).

Multiplikation är något mer komplicerat. Det visar sig att följande formel ger en bra multiplikation:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{11}$$

Kontrollera att formlen ger svaret $(xy,\, 0)$ för produkten av två reella tal $(x,\, 0)$ och $(y,\, 0)$. Om vi betraktar i som en okänd variabel och beräknar

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bic = ad + bdi^2 + (ad + bc)i,$$

stämmer resultatet med (11) om $i^2 = -1$. Eftersom vi sedan tidigare inte har några krav på i (i var bara en symbol) bestämmer vi att i är ett ”tal” som uppfyller denna ekvation. Det komplexa talet $(0,\, 1)$ är ett sådant, eftersom $(0,\, 1) \cdot (0, 1) = (-1,\, 0)$ enligt (11) och därför definierar vi $i = (0,\, 1)$.

Genom att definiera i som det komplexa talet $(0,\, 1)$ kan vi representera alla komplexa tal $(a,\, b)$ som $a+bi$, där $a,\, b \in \mathbb{R}$. Kommer vi bara ihåg att $i^2 = -1$ kan vi nu räkna med komplexa tal genom att använda samma regler som för reella tal.

Komplexa tal brukar betecknas med z eller w. När man skriver att $z \in \mathbb{C}$ menar man att det finns reella tal x och y så att $z = x + yi$. Ska man bevisa något om ett komplext tal, är det ofta nödvändigt att skriva det på den formen. Samma sak gjorde vi, när vi valde en representant a/b för det rationella talet r i beviset av sats 4.2.

Vi har redan sett att $z = i$ löser ekvationen $z^2 = -1$. Följande sats talar om att de komplexa talen löser alla polynomekvationer.

Sats 4.3 (Algebrans fundamentalsats)**.** *Låt n vara ett heltal, $n \geqslant 1$, och låt $a_0,\, a_1, \ldots,\, a_n$ vara komplexa tal där $a_n \neq 0$ så att*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

är ett polynom av grad n. Då finns ett tal $z_0 \in \mathbb{C}$ som löser ekvationen

$$p(z) = 0.$$

Bevis. Det första beviset för denna sats gavs av Gauss[12] år 1799. Det finns flera olika bevis för satsen, men de är tyvärr lite för komplicerade att för att återge här. $\square$

4.6. Bortom komplexa tal

Resultatet i sats 4.3 visade att de komplexa talen räcker till för att lösa alla polynomekvationer. Men det är ändå naturligt att fråga sig om det går att

[12] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) Tysk matematiker.

hitta ännu fler tal. Det första man tänker på är kanske att låta det komplexa talplanet vara inbäddat i det tredimensionella rummet $\mathbb{R}^3$. Ett element i $\mathbb{R}^3$ är en trippel (a_1, a_2, a_3) av reella tal. Att införa en addition av sådana tripplar innebär inga som helst problem:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

När man kommer till multiplikation blir det dock svårigheter. Man kan visa att det inte går att införa någon multiplikation som uppfyller de regler vi är vana vid att multiplikation ska göra. Några ”tredimensionella tal” finns inte.

I fyra dimensioner går det bättre. Om man, analogt med det komplexa fallet, skriver ett element i $\mathbb{R}^4$ som $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$, där $a_\lambda \in \mathbb{R}$ (för $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$), och låter

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

samt kräver att

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i \text{ och } ik = -j.$$

går det att definiera en fungerande multiplikation genom

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = \\ (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) \\ +(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) i \\ +(a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) j \\ +(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) k.\end{aligned}$$

Rummet $\mathbb{R}^4$ utrustat med dessa räkneregler kallas *kvaternionerna* och brukar betecknas med $\mathbb{H}$. Eftersom $ij = k$ medan $ji = -k$ ser vi att denna multiplikation inte är kommutativ, d.v.s. det gäller inte att $zw = wz$ för alla $z, w \in \mathbb{H}$. Det går att visa att man kan införa en multiplikation med ännu lite svagare egenskaper i åtta dimensioner, men att det i övriga fall inte går alls.

5. Exponentialfunktioner

En kilobyte[13] är 1024 bytes. En (viss) mobiltelefon med färgskärm kan visa 65536 färger och spela 32 toner samtidigt. En (viss) dator har 512 megabytes

[13] År 1999 fastslog ett internationellt standardiseringsorgan att man skulle använda prefixen *kibi* (Ki), *mebi* (Mi) och *gibi* (Gi) (där -bi i står för binär) istället för kilo, mega och giga när man menar tvåpotenserna 2^{10}, 2^{20} respektive 2^{30}. Man skulle alltså exempelvis tala om 512 Mibyte minne. Förslaget har dock inte fått någon större spridning.

arbetsminne och en liten MP3-spelare har 128 megabytes musikminne. Är de här talen påkomna av en tillfällighet? Av dataingenjörers godtycke? Svaret är naturligtvis nej. Orsaken är rent matematisk och här ska vi undersöka matematiken bakom. I en kurs i exempelvis datorarkitektur får man lära sig mer om vilka konsekvenser den här matematiken har rent praktiskt när man ska konstruera hårdvara.

Vi påminner först om att om a är ett reellt tal ($a \in \mathbb{R}$) och m är ett naturligt tal ($m \in \mathbb{N}$), definieras a^m genom $a^m = 1 \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a$, där det står m stycken a:n i högerledet. Att det står en etta i början påverkar ju inte produkten (man säger att ettan är ett *enhetselement* för multiplikation), men gör att formeln fungerar också då $m = 0$. Exempelvis är $3^5 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Talet a kalas för *bas*, talet m kallas *exponent* och uttrycket a^m kallas *potens*.

Övning 5.1. Beräkna a^5 om a) $a = \frac{1}{3}$ b) $a = -\frac{1}{3}$.

Följande tabell visar några potenser av två. Notera att samtliga tal som nämndes i inledningen förekommer.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	65536

De tal som är listade i den här tabellen förekommer så ofta i datasammanhang att det kan vara lika bra att lära sig dem utantill. Det är även bra att veta att 2^{24} är ungefär 16,7 miljoner och 2^{32} ungefär 4,3 miljarder.

I en potens är det ju två tal inblandade, basen och exponenten. Det gör det naturligt att tänka på två olika funktioner. Dels kan man tänka på funktionen

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n \text{ för något naturligt tal } n.$$

Observera att man får en ny funktion för varje n man väljer. Till exempel har vi funktionen $f_2(x) = x^2$ (vi väljer $n = 2$). Sådana funktioner arbetar man mycket med i gymnasiet och de kallas *potensfunktioner*. Här dock är vi mer intresserade av den andra möjligheten

$$\exp_a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = a^n \text{ för något positivt reellt tal } a.$$

En funktion av den här typen kallas *exponentialfunktion*. I tabellen ovan räknade vi ut några värden för $a = 2$, alltså funktionen $\exp_2(n) = 2^n$. Notera skillnaden mellan dessa typer av funktioner! Det är inte bra att blanda ihop dem.

Övning 5.2. Man säger att en funktion är *strikt växande* om funktionsvärdet bli större, ju större värde man sätter in (med matematiska symboler kan man skriva $x > y \implies f(x) > f(y)$). Vilken funktion växer snabbast: $f(x) = x^2$ eller $g(x) = 2^x$ (då $x > 0$)? Prova genom att sätta in några värden! Kan resultatet generaliseras? Hur kan man i så fall motivera (bevisa) det? Det är uppenbart att funktionen $h(x) = x^x$ växer snabbare än både potensfunktionen och exponentialfunktionen. Fundera på hur snabbt växande funktioner du kan konstruera med det matematiska språk du behärskar!

5.1. Exponentialfunktionens egenskaper

För att förstå varför exponentialfunktionen har så stor betydelse, måste man känna till hur den fungerar och vilka egenskaper den har. Man kan betrakta egenskaperna som räkneregler att lära sig utantill. Men det finns minst två bra argument mot detta synsätt. Dels blir det ett tråkigt tragglande. Dels är reglerna lätta att glömma bort. Istället gäller det att försöka förstå sig på exponentialfunktionens natur. Då blir räknereglerna uppenbara och behöver överhuvudtaget inte kommas ihåg; när man väl har förstått kan man själv "komma på" just den räkneregel man för tillfället behöver.

Låt mängden av positiva reella tal betecknas med $\mathbb{R}_+$, d.v.s.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$$

Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi undersöker först vad som händer vid multiplikation. Vi vet att $2^2 = 4$ och $2^3 = 8$ och $4 \cdot 8 = 32$. Men man kan kan ju också använda definitionen:

$$2^2 \cdot 2^3 = (1 \cdot 2 \cdot 2)(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Tänker man efter, inser man att exponenten bara beror på antalet faktorer och har man n faktorer i den ena potensen och m faktorer i den andra så får man ju $m + n$ faktorer totalt. Matematiskt kan man formulera detta som:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{12}$$

Speciellt har vi ju $(a^m)^2 = 1 \cdot a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$, och mer allmänt kan man på samma sätt beräkna potenser av potenser:

$$(a^m)^n = 1 \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m = 1 \cdot a^{m+m+\cdots+m} = a^{nm} \tag{13}$$

Om a och b tillhör $\mathbb{R}_+$, är det också lätt att se att

$$(ab)^n = (ab) \cdot (ab) \cdots (ab) = a \cdot a \cdots a \cdot b \cdot b \cdots b = a^n \cdot b^n \tag{14}$$

och att

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = a \cdot a \cdots a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdots \frac{1}{b} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} \tag{15}$$

5.2. Definition genom rekursion

Ett alternativt sätt att definiera exponentialfunktionen är genom en rekursionsformel. Låt basen vara a. Den kanske mest naturliga rekursionsformeln är följande:

$$f_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ a \cdot f_a(n-1) & \text{annars} \end{cases} \tag{16}$$

Vi ser att $f_a(0) = 1$, $f_a(1) = a \cdot f_a(0) = a$, $f_a(2) = a \cdot f_a(1) = a^2$ och det är inte svårt att inse att för $n \geqslant 1$ gäller allmänt $f_a(n) = a^n$. Men detta är inte den enda möjligheten att definiera exponentialfunktionen genom rekursion. En annan variant är

$$g_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ \left(g_a\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 & \text{om } n \text{ är jämn och } n \geqslant 2 \\ a \cdot g_a(n-1) & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases} \tag{17}$$

Att se att g_a också definierar exponentialfunktionen är kanske lite knepigare. Vi börjar med att se på några exempel för att se hur definitionen fungerar. Precis som tidigare har vi $g_a(0) = 1$ och $g_a(1) = a \cdot g_a(0) = a$. Talet två är jämt, så

$$g_a(2) = g_a(2/2)^2 = g_a(1)^2 = a^2$$

För $n = 3$ har vi$g_a(3) = a \cdot g_a(2) = a^3$ medan för $n = 4$ får vi

$$g_a(4) = g_a(2)^2 = (a^2)^2 = a^4$$

Formeln för g_a skiljer sig från formeln för f_a endast i det fall n är jämt. Om vi antar att n är jämt och att $g_a(n/2) = a^{n/2}$ så ger (17) att

$$g_a(n) = (a_a(n/2))^2 = (a^{n/2})^2 = a^n$$

Det här resonemanget betyder ju att varje steg i rekursionsformeln är riktigt förutsatt att alla tidigare värden är korrekta. Men eftersom formeln stämmer i början, enligt vår kontroll, måste den då stämma för alla värden på n. Den här typen av resonemang kan formaliseras till något som kallas *matematisk induktion*. Det är en mycket viktig bevismetod, som ni kommer att få lära er mer om i kommande algebrakurser.

Övning 5.3. Använd rekursionsformlerna (16) och (17) för att beräkna $f_2(7)$ och $g_2(7)$.

Övning 5.4. Hur många rekursionssteg måste man genomgå för att beräkna $f_a(8)$ respektive $g_a(8)$? För att beräkna $f_a(64)$ respektive $g_a(64)$? Vilken formel skulle använda om du ville lära en dator att snabbt räkna ut exponentialfunktionen?

5.3. Exponentialfunktionen med reella tal

Så långt har vi betraktat exponentialfunktionen som en funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. En fråga som är naturlig att ställa är om funktionen kan definieras (på ett vettigt sätt) på en större talmängd än $\mathbb{N}$? Vi börjar med att försöka utöka den till $\mathbb{Z}$. Låt $a \in \mathbb{R}_+$. Vi har redan definierat a^{-1} som inversen till a, d.v.s. det tal x som har egenskapen att $xa = 1$. Det betyder per definition att $a^{-1} = 1/a$, som också är ett positivt reellt tal. För att (13) på sidan 39 ska gälla måste vi då ha (för $n > 0$)

$$a^{-n} = a^{-1 \cdot n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}. \tag{18}$$

Det sista steget i likheten följer av (15) på sidan 39. Om vi använder (18) som definition av exponentialfunktionen för negativa tal, har vi lyckats utöka den till en funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Nästa steg blir att fundera på hur $a^{1/n}$ bör definieras, då $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Om vi igen kräver att (13) ska gälla, måste vi ha

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{n/n} = a^1 = a$$

Talet $x = a^{1/n}$ ska alltså vara sådant att $x^n = a$. Man kan visa att det finns precis ett positivt reellt tal som har den egenskapen, och detta tal brukar kallas *n:te roten* ur a, och betecknas med $\sqrt[n]{a}$. Med hjälp av denna definition och (13) kan vi definiera $a^{m/n}$ när m/n är ett rationellt tal:

$$a^{m/n} = a^{m \cdot 1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

En sak som måste visas är att värdet av a^r, $r \in \mathbb{Q}$ inte beror på vilken representant m/n man väljer för r. Det är inte svårt att bevisa, men vi avstår. Vi kan nu ganska enkelt demonstrera att de lagar vi sett gäller för heltalsexponenter fortsätter gälla för rationella exponenter. Ett exempel på ett sådant bevis är följande kalkyl

$$a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pm}{nm}} \cdot a^{\frac{nq}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^{pm} \cdot \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{1}{nm}}\right)^{pm+nq} = a^{\frac{pm+nq}{mn}} = a^{\frac{p}{n}+\frac{q}{m}}.$$

Nu har vi alltså lyckats utöka exponentialfunktionen till en funktion definierad på $\mathbb{Q}$. Nästa fråga är om man kan definiera tal som $2^{\sqrt{2}}$ och π^π, d.v.s. utöka exponentialfunktionen till alla reella tal. Svaret är ja. Om $\xi \in \mathbb{R}$ så finns det ju en följd $r_1, r_2, r_3, \ldots$ av rationella tal som närmar sig ξ. Man kan visa att föjden

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$$

närmar sig precis ett reellt tal, och att man finner samma reella tal oavsett vilken rationell följd man väljer, så länge denna följd närmar sig ξ. Genom dessa resultat, kan man definiera a^ξ som detta reella tal. Man kan visa att alla lagar för exponentialfunktionen som vi hittills sett, fortsätter gälla även för reella exponenter.

6. Logaritmfunktioner

Låt $P = \{2^n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$. Det är enkelt att se att exponentialfunktionen med bas 2, $\exp_2\colon \mathbb{N} \to P$, $\exp_2(n) = 2^n$ är en bijektion. Om $m \neq n$ är det klart att $2^m \neq 2^n$, så funktionen är injektiv. Om $p \in P$ så finns det per definition ett n så att $\exp_2(n) = 2^n = p$ och därför är funktionen surjektiv. Det följer att det finns en inversfunktion, $(\exp_2)^{-1}\colon P \to \mathbb{N}$, och den ska vi beteckna med L som i logaritm och vi kallar den L-funktionen.

Man kan visa att den utökade exponentialfunktionen $\exp_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ är en bijektion. Inversen till denna funktion är $\log_2$, en logaritm av det slag man studerar på gymnasiet. Genom att begränsa oss till heltal får vi en mycket konkret framställning av logaritmfunktionen. För att skilja vår logaritmfunktion från den ”vanliga”, kallar vi vår funktion L. Slutligen anmärker vi att de lagar vi snart kommer att bevisa också gäller (med ungefär samma bevis) också för den vanliga logaritmen.

Om $n \in \mathbb{N}$ och vi vill beräkna $L(2^n)$ är det klart att svaret ska bli n. Enligt definitionen av inversfunktion ska ju $L(\exp_2(n)) = n$ för alla n, och $\exp_2(n) = 2^n$. Tänker man efter ett ögonblick, inser man att $L(N)$ kan räknas ut genom att räkna hur många gånger man kan dela med två. Vi kan alltså ställa upp följande rekursionsformel

$$L(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 1 \\ 1 + L(n/2) & \text{annars.} \end{cases} \tag{19}$$

Låt oss till exempel beräkna $L(32)$:

$$L(32) = 1 + L(16) = 1 + 1 + L(8) = 3 + L(4) = 4 + L(2) = 5 + L(1) = 5$$

Naturligtvis är $\exp_2(5) = 2^5 = 32$. Eftersom $L(2^n) = n$ är det lätt att beräkna summan av två L-funktioner. Låt n, $m \in \mathbb{N}$

$$L(2^n) + L(2^n) = m + n = L(2^{n+m}) = L(2^n \cdot 2^m)$$

Det sista steget följer av (12) på sidan 39. För två tal p, $q \in P$ gäller alltså

$$L(p) + L(q) = L(pq) \tag{20}$$

Man kan se det som att funktionen L ”gör om” multiplikation till addition. Vi vet sedan tidigare att $L(32) = 5$. Vi kan beräkna

$$L(4) = 1 + L(2) = 2 + L(1) = 2 \text{ och } L(8) = 1 + L(4) = 3.$$

Eftersom $8 \cdot 4 = 32$ vet vi att enligt (20) att $L(4) + L(8) = L(32) = 5$, vilket alltså stämmer. Vidare, om $m \geqslant n$ gäller att

$$\frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n} \in P,$$

eftersom $m - n \geqslant 0$. Vi kan därför beräkna

$$L\left(\frac{2^m}{2^n}\right) = L\left(2^{m-n}\right) = m - n = L(2^m) - L(2^n)$$

Denna kalkyl bevisar att om p, $q \in P$ och $p > q$ gäller

$$L(p) - L(q) = L\left(\frac{p}{q}\right) \tag{21}$$

Slutligen kan vi beräkna L av en potens, eftersom $(2^n)^m = 2^{mn}$ för alla m, $n \in \mathbb{N}$, enligt (13).

$$L\left((2^n)^m\right) = L(2^{mn}) = mn = m \cdot L(2^n)$$

Om $p = 2^n$, d.v.s. om $p \in P$ har vi alltså bevisat att

$$L(p^m) = m \cdot L(p) \tag{22}$$

Vi sammanfattar de egenskaper som vi nu bevisat om funktionen L. De två första kommer av att L är inversen till $\exp_2$. Samtliga dessa lagar måste man förstå och kunna använda.

Antag att $p, q \in P$, $n \in \mathbb{N}$ och i lag (iv) dessutom att $p \geqslant q$.

(i)	$L(2^n) = n$	(ii)	$2^{L(p)} = p$
(iii)	$L(p) + L(q) = L(pq)$	(iv)	$L(p) - L(q) = L\left(\frac{p}{q}\right)$
(v)	$L(p^n) = n \cdot L(p)$	(vi)	$L(1) = 0$

Exempel 6.1. Beräkna $L(1024^2) - L(512^2)$.

Lösning: Först tillämpar vi lag (v), därefter lag (iv)

$$\begin{aligned} L(1024^2) - L(512^2) &= 2L(1024) - 2L(512) = 2(L(1024) - L(512)) \\ &= 2L(1024/512) = 2L(2) = 2. \end{aligned}$$

Exempel 6.2. Antag att $p \in P$ och att $p \geqslant 2$. Förenkla $L\left(\frac{p^3}{4}\right)$.

Lösning: Först tillämpar vi lag (iv), därefter lag (v)

$$L\left(\frac{p^3}{4}\right) = L(p^3) - L(4) = 3L(p) - 2.$$

Övning 6.1. Beräkna $L(16)$, $L(128)$ och $L(512)$.

Övning 6.2. Beräkna $L(2^{10})$, $L(16^{101})$ och $L\left(\frac{128^3}{16}\right)$.

Övning 6.3. Beräkna $2^{L(16)}$, $L(16) \cdot L(32)$ och $L(2^{L(2^{1000})})$.

Övning 6.4. Låt $p, q \in P$. Skriv om uttrycken så att L-funktionen bara används en gång:

a) $L(p) + 2L(q)$ b) $L(p^3) + 2L(2q)$

Övning 6.5. Lös ekvationerna

a) $L(p) = 5$ b) $\exp_2(n) = 128$
c) $L(p) + L(2p) = 7$ d) $L(p^5) = 10$

6.1. En utökning av L-funktionen

Den L-funktion vi studerade i föregående avsnitt har många bra egenskaper, men det finns en stor nackdel. Dess definitionsmängd, P, är mycket gles; för de flesta naturliga tal (mindre än ett givet tal) är funktionen inte definierad.

Problemet är att man hela tiden delar med två, och så fort man får ett udda tal (>1) som argument, är talet delat med två inte ett heltal. Men det finns ett botemedel: avrundning. Genom att utnyttja någon av de avrundningsfunktioner vi definierat kan vi se till att få en funktion som är definierad för alla naturliga tal utom noll.

Låt $\mathrm{Log}\colon \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant 1\} \to \mathbb{N}$ vara definierad rekursivt genom

$$\mathrm{Log}(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 1 \\ 1 + \mathrm{Log}\left(\lceil n/2 \rceil\right) & \text{annars.} \end{cases} \tag{23}$$

Om man jämför med definitionen av L (ekvation 19), är det uppenbart att om $p \in P$ så är $L(p) = \mathrm{Log}(p)$ – divisionen går ju alltid jämt upp, så takfunktionen påverkar inte värdet. Men nu kan vi även beräkna

$$\mathrm{Log}(7) = 1 + \mathrm{Log}(\lceil 3.5 \rceil) = 1 + \mathrm{Log}(4) = 2 + \mathrm{Log}(2) = 3 + \mathrm{Log}(1) = 3$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(9) &= 1 + \mathrm{Log}(\lceil 4.5 \rceil) = 1 + \mathrm{Log}(5) \\ &= 2 + \mathrm{Log}(\lceil 2.5 \rceil) = 2 + \mathrm{Log}(3) \\ &= 3 + \mathrm{Log}(\lceil 1.5 \rceil) = 3 + \mathrm{Log}(2) = 3 + 1 = 4.\end{aligned}$$

Om $p \in P$, d.v.s. $p = 2^n$ för något n, och N är ett heltal så att $p < N \leqslant 2p$, så är det för det första klart att

$$\mathrm{Log}(N) \leqslant \mathrm{Log}(2p) = L(2p) = L(2) + L(p) = 1 + n \tag{24}$$

Stoppar man in ett större tal, $2p$, så kan det inte ta färre divisioner att nå botten i rekursionen än om man stoppar in det mindre talet N.

Vi ska nu visa en olikhet åt andra hållet. Eftersom $N > p$ gäller också att $\lceil N/2 \rceil > p/2$ – här är det helt avgörande att vi avrundar uppåt. I varje steg i rekursionen kommer därför argumentet som kommer från N att vara strikt större än argumentet som kommer från p. Det följer att det krävs minst ett steg mer att komma till botten i rekursionen när man beräknar $\mathrm{Log}(N)$ jämfört med när man beräknar $\mathrm{Log}(p)$. Alltså har vi visat att

$$\mathrm{Log}(N) > \mathrm{Log}(p) = n \tag{25}$$

Lägger man nu samman dessa resultat får man följande sats.

Sats 6.3. *Låt N vara ett positivt naturligt tal. Då finns det precis ett naturligt tal n så att $2^n < N \leqslant 2^{n+1}$, och det gäller att* $\mathrm{Log}\, N = n + 1$.

Bevis. Låt n vara det största naturliga tal sådant att $2^n < N$. Eftersom det var det största följder automatiskt att $N \leqslant 2^{n+1}$. Låt $p = 2^n$ så att $2p = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Enligt (25) är $\mathrm{Log}(N) > n$ vilket innebär att $\mathrm{Log}(N) \geqslant n + 1$, eftersom bara heltal är inblandade. Enligt (24) är $\mathrm{Log}(N) \leqslant n + 1$. Alltså gäller

$$n + 1 \leqslant \mathrm{Log}(N) \leqslant n + 1.$$

och enda möjligheten är $\mathrm{Log}(N) = n + 1$. □

Följdsats 6.4. *För alla positiva naturliga tal N gäller att* $\mathrm{Log}\, N = \lceil \log_2 N \rceil$.

Bevis. Eftersom $2^n < N \leqslant 2^{n+1}$ för något n, gäller att $n < \log_2 N \leqslant n + 1$, och per definition är då $\lceil \log_2 N \rceil = n + 1$. □

Finns det något tillämpat intresse av funktionen Log? Vi har redan sett att det finns datoralgoritmer som löser problemet genom att dela det i två lika stora delar och sedan genom rekursion angripa delarna var för sig. Det är av intresse att veta hur många steg som krävs för att algoritmen ska nå botten, då antalet steg är avgörande för algoritmens effektivitet. Och tänker man efter är det i detta $\operatorname{Log} N$ steg som behövs om problemet består av ”N delar”.

Övning 6.6. Beräkna $\operatorname{Log} 15$, $\operatorname{Log} 35$ och $\operatorname{Log} 63$.

Övning 6.7. Beräkna $2^{\operatorname{Log} 4}$, $2^{\operatorname{Log} 5}$ och $2^{\operatorname{Log} 200}$.

Övning 6.8. För vilka $n \in \mathbb{N}$ gäller att $\operatorname{Log} n = 2$? Att $\operatorname{Log} n = \operatorname{Log} 100$?

Övning* 6.9. Undersök den rekursivt definierade funktionen

$$\lambda\colon \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant 1\} \to \mathbb{N},$$

$$\lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 1 \\ 1 + \lambda\left(\lfloor n/2 \rfloor\right) & \text{annars.} \end{cases}$$

Gäller det att $\lambda(N) = \lfloor \log_2 N \rfloor$ för positiva heltal N?

7. Representationer av tal

Vad är ett naturligt tal? Ett svar är kanske att ett tal är ett ändligt ord, en sträng, av siffror, exempelvis 143895. Hade man frågat romarna, hade man kanske istället fått exemplet XVIII. Är något av dessa svar mer rätt än det andra? Kanske är det bättre att säga att ett naturligt tal är ett antal av något, men det finns olika sätt att representera eller koda detta antal. Vi är mest vana vid det decimala[14] systemet, som bygger på basen 10 som i följande exempel:

$$1592 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

I skolan brukar man prata om ental, tiotal, hundratal och så vidare. För att systemet ska fungera krävs det tio olika symboler – vi använder siffrorna 0–9. Att man just använder basen tio har egentligen ingen matematisk förklaring, troligen beror det på att människan finner det naturligt att räkna på fingrarna.

[14]deci betyder tio på latin, förekommer i många vanliga ord, t.ex. deciliter – tiondels liter och decennium – tio år. December var ursprungligen årets tionde månad.

7.1. Binära tal

En dator kan bara räkna med två symboler 1 och 0, vilket motsvarar ett en krets kan vara på eller av. Finns det någon möjlighet att beskriva antal med denna kodning? Vi börjar med ett exempel

$$(10011)_{\text{två}} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$$

Så långt var det inga problem. Notera att vi skriver $(10011)_{\text{två}}$ för att skilja det från det vanliga talet tiotusenelva, som man skulle kunna skriva $(10011)_{\text{tio}}$ med samma notation. Det återstår en mycket viktig fråga. Kan *alla* positiva heltal skrivas med bas två? Vi ska nu bevisa att så är fallet. Låt N vara ett positivt heltal, vilket som helst. Låt A_0 vara det största heltalet så att $2^{A_0} \leqslant N$, d.v.s. $A_0 = \lfloor \log_2 N \rfloor$. Definiera nu $N_1 = N - 2^{A_0}$. Eftersom $2^{A_0} \leqslant N$ är $N_1 \geqslant 0$. Dessutom är $N_1 < 2^{A_0}$. För att se det använder man att $N = N_1 + 2^{A_0}$. Vore $N_1 \geqslant 2^{A_0}$, betyder ju det att $N \geqslant 2^{A_0} + 2^{A_0} = 2 \cdot 2^{A_0} = 2^{A_0+1}$. Men det sista innebär att A_0 inte är det största tal så att $N \geqslant 2^{A_0}$, vilket vi har antagit.

Alltså gäller att $0 \leqslant N_1 < 2^{A_0}$. Men om $N_1 \neq 0$ kan vi upprepa resonemanget (där N_1 spelar rollen N hade ovan), hitta ett tal A_1 och låta $N_2 = N_1 - 2^{A_0}$, där $A_1 < A_0$ och $0 \leqslant N_2 < 2^{A_1}$. På samma sätt upprepar vi resonemanget tills $N_k = 0$ för något k. Detta måste inträffa förr eller senare eftersom varje N_i är mindre än N_{i-1} och N_i aldrig kan bli negativt. Om vi nu sätter in vad vi räknat fram får vi

$$N = 2^{A_0} + N_1 = 2^{A_0} + (2^{A_1} + N_2) = \cdots = 2^{A_0} + 2^{A_1} + \cdots + 2^{A_k}$$

Men då är vi ju klara! N kan skrivas som ett binärt tal, där man ska ha k stycken ettor på positionerna A_i, $i = 0, 1 \ldots k$ (och position 0 är längst till höger).

Innan man har lärt sig tvåpotenserna utantill är det praktiskt att ha en lista tillhands när man ska göra de här beräkningarna i praktiken.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, \ldots$$

Räkningen utförs nu genom subtraktioner av största möjliga tvåpotens. Antag att vi vill skriva 315 i basen två. Vi får:

$$\begin{aligned} 315 - \underline{256} = 59, \quad 59 - \underline{32} = 27, \quad 27 - \underline{16} = 11,\\ 11 - \underline{8} = 3, \quad 3 - \underline{2} = 1, \quad 1 - \underline{1} = 0. \end{aligned}$$

Det betyder att

$$315 = 256 + 59 = 256 + (32 + 27) = \cdots = 256 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1$$

det vill säga att

$$315 = 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = (100111011)_{\text{två}}$$

Övning 7.1. Skriv talen a) $(10011)_{\text{två}}$ och b) $(1011000)_{\text{två}}$ i basen tio.

Övning 7.2. Skriv talen a) 17 b) 170 c) 1700 binärt.

7.2. Oktala tal

Binära tal blir snabbt ganska långa att skriva och det är svårt att överblicka ett binärt tal och få en uppfattning om hur stort det är. Därför används i datasammanhang ofta hexadecimala och oktala tal. Vi börjar med att beskriva det oktala talsystemet. Tänk dig ett tal, skrivet i binär form. Genom att lägga till några nollor i början om det behövs, kan vi alltid anta att antalet siffror är delbart med tre. Ett exempel är talet $N = 943 = (001110101111)_{\text{två}}$. Nu grupperar vi siffrorna i grupper om tre och får [001][110][101][111]. Varje grupp motsvarar i sig ett tal mellan noll och sju, så kan representera talet genom [1][6][5][7]. Vi skriver $N = (1657)_{\text{åtta}}$ och säger att vi skrivit N oktalt[15]. Notationen antyder att oktala tal är skrivna med bas åtta, och mycket riktigt är det också så

$$N = 1 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 512 + 6 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 7 = 943$$

Följande tabell listar alla ensiffriga oktala tal, och motsvarande binära representation:

Oktalt	0	1	2	3	4	5	6	7
Binärt	000	001	010	011	100	101	110	111

Exempel 7.1. Talet $(172)_{\text{åtta}}$ blir på binär form

$$[1][7][2] = [001][111][010] = (1111010)_{\text{två}}.$$

Exempel 7.2. Talet $(172)_{\text{åtta}}$ blir på decimal form

$$1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 122.$$

Övning 7.3. Skriv talet $(11000101)_{\text{två}}$ oktalt.

Övning 7.4. Skriv talet $(543)_{\text{åtta}}$ a) binärt b) decimalt.

[15] Okta betyder naturligtvis åtta. Oktober var ursprungligen årets åttonde månad.

7.2.1. Filrättigheter i UNIX/Linux

Oktala tal används tillexempel av UNIX-kommandot `chmod`, som används för att sätta rättigheter på filer. En parameter till kommandot kan vara ett oktalt tal med tre siffror. Varje siffra representerar vad olika användare får göra med filen. Siffran längst till vänster representerar filens ägare, siffran i mitten användargruppen och siffran till höger alla användare.

Varje siffra är kodad på följande vis: Om första biten är ett får filen köras, om andra biten är ett får man skriva till filen, om tredje biten är ett får filen läsas. Exempelvis betyder $6 = (110)_{\text{två}}$ att filen får läsas och skrivas, men inte köras.

Sätter man samman detta, får man att $(731)_{\text{åtta}}$ betyder att filens ägare får göra vad hon vill med filen, användare i gruppen får titta på filen och köra den, medan övriga användare endast får köra den. Kommandot används (exempelvis) så här: `>chmod 731 mittprogram`.

7.3. Hexadecimala tal

Istället för att dela in det binära talet i grupper om tre, kan man tänka sig en annan indelning. En mycket vanlig variant är att dela in talet i grupper om fyra binära siffror. Då behövs ju 16 symboler och det är vanligt att använda talen 0–9 samt A, B, C, D, E och F, för 10, 11, …, 15. Hexa betyder 6 på latin så hexadecimal betyder, inte oväntat, att basen är 16 och man skriver $(2A5F)_{\text{sexton}}$. Liksom tidigare kan vi göra en tabell. Jämför de binära talen med tabellen för de oktala talen och försäkra dig om att du förstår varför det blir som det blir.

Hexadecimalt	0	1	2	3	4	5	6	7
Binärt	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Hexadecimalt	8	9	A	B	C	D	E	F
Binärt	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Exempel 7.3. Talet $(A4F2)_{\text{sexton}}$ blir på binär form

$$[A][4][F][2] = [1010][0100][1111][0010] = (1010010011110010)_{\text{två}}.$$

Exempel 7.4. Talet $(A4F2)_{\text{sexton}}$ blir på decimal form

$$10 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 42226.$$

Exempel 7.5. Vi vill skriva talet 538 hexadecimalt. Vi börjar med att skriva det binärt.

$$538 - \underline{512} = 26, \quad 26 - \underline{16} = 10, \quad 10 - \underline{8} = 2, \quad 2 - \underline{2} = 0.$$

Alltså har vi $538 = 512 + 16 + 8 + 2 = (1000011010)_{\text{två}}$. Skrivet i grupper om fyra får vi $[0010][0001][1010] = [2][1][\text{A}]$ så att $538 = (21\text{A})_{\text{sexton}}$.

Det finns olika notationer för hexadecimala tal. Ibland skriver man dem med ett litet ”h” på slutet, som exempelvis 394Ah. Ett annat vanligt skrivsätt är att starta talet med ”0x”, exempelvis 0x394A.

Övning 7.5. Skriv talet $(110010101)_{\text{två}}$ hexadecimalt.

Övning 7.6. Skriv talet $(1\text{C}3)_{\text{sexton}}$ a) binärt b) oktalt c) decimalt.

Övning 7.7. Skriv talet 1025 hexadecimalt.

Övning* 7.8. Visa att det hexadecimala talet $(\text{FF}\ldots\text{F})_{\text{sexton}}$, där antalet siffror är n stycken, kan räknas ut med formeln $16^n - 1$ i det decimala systemet.

7.3.1. Färger i HTML

HTML[16] är det språk som används för att beskriva sidor på nätet. För att ange färger används hexadecimala tal. På en dataskärm byggs en färg upp genom att blanda färgerna röd, grön och blå. Hur mycket man ska använda av varje färg anges genom ett tal mellan 0 och 255; det finns följaktligen 256 intensitetsnivåer. En färg är alltså en taltrippel (r, g, b) där $0 \leqslant r, g, b \leqslant 255$, exempelvis är $(255, 0, 0)$ klarrött, $(100, 0, 0)$ mörkrött och $(128, 128, 128)$ grått.

Anmärkning 7.6. Om vi betecknar mängden av heltal mellan två givna heltal a, b ($a \leqslant b$), med $[a, b]_{\mathbb{Z}}$, d.v.s.

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{n \in \mathbb{Z};\ a \leqslant n \leqslant b\},$$

så är en färg ett element i

$$C = [0, 255]_{\mathbb{Z}} \times [0, 255]_{\mathbb{Z}} \times [0, 255]_{\mathbb{Z}} = [0, 255]^3_{\mathbb{Z}},$$

En datorskärm kunde, som vi såg i avsnitt 3.1.1, representeras av mängden $D = [0, 1023]_{\mathbb{Z}} \times [0, 767]_{\mathbb{Z}}$. En färgbild, är då en funktion $D \to C$; en sådan funktion tillordnar ju precis en färg till varje pixel. Bildbehandling handlar matematiskt sett om manipulation av sådana funktioner. $\square$

[16]Hyper Text Markup Language

Eftersom 255 är det största tal som kan representeras med två siffror i det hexadecimala systemet, anger man en färg som en sträng med sex hexadecimala siffror, där de två första representerar rött, de två i mitten representerar grönt och de två sista representerar blått. I det här fallet inleder man talet med tecknet $\#$. De tre färgerna ovan blir, i tur och ordning, $\#$FF0000, $\#$640000 och $\#$808080.

Exempel 7.7. Färgen $\#$9590AA motsvarar färgtrippeln (149, 144, 170) och är en svagt blåtonad mörkgrå färg. ($(95)_{\text{sexton}} = 9 \cdot 16 + 5 = 144 + 5 = 149$ och så vidare.)

Övning 7.9. Beskriv din favoritfärg, dels med ord, dels kodad enligt HTML-standard.

Övning* 7.10. Hur många olika färgbilder kan visas på datorskärmen D, som de definierades i anmärkning 7.6?

Sakregister