

# VEKTORRUMMET $\mathbb{R}^n$

RYSZARD RUBINSZTEIN

2008-10-08

## 1. INTRODUKTION

Låt  $n$  vara ett heltal. Med  $\mathbb{R}^n$  kommer vi att beteckna mängden vars element är alla  $n$ -tipplar av reella tal  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,

$$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}.$$

Sådana  $n$ -tipplar  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  kommer vi att kalla för **vektorer** i  $\mathbb{R}^n$ . Om  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  och  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  är vektorer ur  $\mathbb{R}^n$  och  $\lambda$  är ett reellt tal definieras vektorernas summa  $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  genom komponentvis addition

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Produkten  $\lambda \vec{a} \in \mathbb{R}^n$  definieras genom komponentvis multiplikation

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Vektorn  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  betecknas med  $\vec{0}$  och kallas för **nollvektorn** i  $\mathbb{R}^n$ . Given en vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  betecknar vi med  $-\vec{u}$  vektorn  $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) = (-1)\vec{u}$ . Addition av vektorer och multiplikation av vektorer med reella tal uppfyller följande

### Sats 1.1. Egenskaper av vektorer i $\mathbb{R}^n$

Om  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  och  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  är vektorer i  $\mathbb{R}^n$  och  $\lambda$  och  $\mu$  är reella tal, gäller följande:

- |                                                                       |                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ,                         | (5) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$                      |
| (2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ , | (6) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ , |
| (3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ,                                   | (7) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ ,         |
| (4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ ,                                | (8) $1\vec{u} = \vec{u}$ .                                           |

*Bevis.* Egenskaperna (1)-(8) följer direkt från definitionerna (1.1) och (1.2) och lämnas åt läsaren att kontrollera.  $\square$

Observera att om man har valt ett koordinatsystem i rummet representeras varje rymdvektor med sina tre koordinater  $(a_1, a_2, a_3)$ . På så sätt identifieras varje rymdvektor med ett element ur  $\mathbb{R}^3$  och mängden av alla rymdvektorer med hela  $\mathbb{R}^3$ . Additionen av rymdvektorer och deras produkter med reella tal motsvarar då operationerna (1.1) respektive (1.2). På samma sätt ett val av ett koordinatsystem i planet tillåter oss att identifiera mängden av alla vektorer i planet med  $\mathbb{R}^2$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Författaren tackar Jörgen Östensson för språklig hjälp vid förberedelsen av detta manuskript.

## 2. LINJÄRT BEROENDE OCH OBEROENDE

Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$  och låt  $c_1, c_2, \dots, c_k$  vara reella tal. En vektor i  $\mathbb{R}^n$  på formen

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k \quad (2.1)$$

kallas **en linjärkombination** av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ .

**Definition 2.1.** En uppsättning av vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  i  $\mathbb{R}^n$  kallas **linjärt oberoende** om

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

I motsatt fall kallas vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  **linjärt beroende**.

Det finns en enkel metod för att avgöra om en godtycklig uppsättning av vektorer i  $\mathbb{R}^n$  är linjärt beroende eller oberoende. Denna metod demonstreras i exemplet nedan.

**Exempel 2.1:** Avgör om  $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 3)$ ,  $\vec{u}_3 = (2, -1, 1, 1)$  är linjärt beroende eller linjärt oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^4$ .

*Lösning:* För reella tal  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  är villkoret

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{0} \quad (2.2)$$

detsamma som

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Detta innebär att talen  $c_1, c_2, c_3$  uppfyller likheten (2.2) om och endast om  $(c_1, c_2, c_3)$  är en lösning till det homogena linjära ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (2.4)$$

(Observera att koefficientmatrisens kolonner är lika med vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ . Detta är en omedelbar följd av (2.3).)

Vi löser ekvationssystemet (2.4) med Gausselimination:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} + \boxed{1} \\ \boxed{4} - \boxed{1} \end{array} \xrightarrow{\text{R}_2 - \text{R}_1, \text{R}_3 + \text{R}_1, \text{R}_4 - \text{R}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{1} - \boxed{2} \\ \boxed{4} - \boxed{2} \cdot \boxed{2} \\ \boxed{1} \cdot \boxed{3} \end{array} \xrightarrow{\text{R}_4 - 2\text{R}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{1} - 5 \boxed{3} \\ \boxed{2} + 3 \boxed{3} \\ \boxed{4} - 5 \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{array} \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Den sista matrisen visar att ekvationssystemet (2.4) har enbart den triviala lösningen  $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ . Enligt (2.2) betyder det att den linjära kombinationen  $c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3$  är lika med nollvektorn  $\vec{0}$  enbart då  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ . Enligt Definitionen 2.1 innebär det att vektorerna  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  är **linjärt oberoende**.  $\square$

Den metod som vi använde i Exempel 2.1 kan tillämpas i varje  $\mathbb{R}^n$  och för en godtycklig uppsättning av vektorer  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ .

**Anmärkning 2.2.** Vektorerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$  är **linjärt beroende** om och endast om någon av dessa vektorer kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga.

*Bevis.* ( $\Rightarrow$ ) Om vektorerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$  är linjärt beroende finns det koefficienter  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , ej alla lika med noll, sådana att

$$c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

Om t.ex.  $c_1 \neq 0$  kan vi skriva om det till  $-c_1 \vec{u}_1 = c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_k \vec{u}_k$ . Det följer att

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) \vec{u}_2 + \left(-\frac{c_3}{c_1}\right) \vec{u}_3 + \dots + \left(-\frac{c_k}{c_1}\right) \vec{u}_k,$$

vilket visar att  $\vec{u}_1$  är en linjärkombination av de övriga vektorerna  $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k$ .

( $\Leftarrow$ ) Antag nu att någon av vektorerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ , t.ex.  $\vec{u}_1$  är en linjärkombination av de övriga,

$$\vec{u}_1 = b_2 \vec{u}_2 + \dots + b_k \vec{u}_k, \quad b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}.$$

Detta kan skrivas om som  $(-1)\vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + \dots + b_k \vec{u}_k = \vec{0}$ , vilket visar att det finns en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ , som ger nollvektorn  $\vec{0}$  fast inte alla koefficienterna är lika med noll. Det innebär, enligt Definition 2.1, att vektorerna  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  är linjärt beroende.  $\square$

**Exempel 2.2: Geometrisk tolkning.** Låt oss analysera den **geometriska** innebörden av de nya begreppen "linjärt beroende" och "linjärt oberoende" av vektorer i rummet  $\mathbb{R}^3$ .

(i) Låt  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$  vara två vektorer i  $\mathbb{R}^3$ .

Enligt Anmärkning 2.2 är vektorerna  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  linjärt beroende om och endast om en av dem är en linjärkombination av den andra, t.ex.  $\vec{u}_2 = c_1 \vec{u}_1$  (eller tvärt om). Detta innebär att vektorerna  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  är parallella. (Se Figur 2.1.)

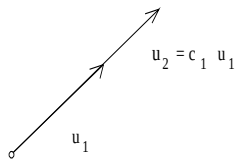


Fig. 2.1

Slutsats: två vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  är **linjärt beroende** om och endast om de är **parallella**.

Det följer att

(ii) två **icke-parallella** vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  är **linjärt oberoende** (Figur 2.2)

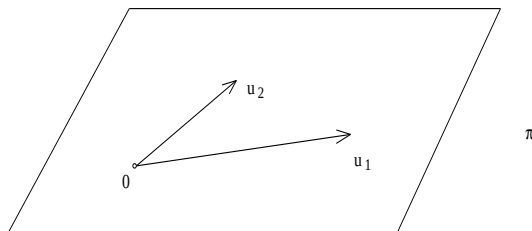


Fig. 2.2

(iii) Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  och  $\vec{u}_3$  vara tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ .

Enligt Anmärkning 2.2 är vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  linjärt beroende om och endast om en av dem är en linjärkombination av dem övriga, t.ex.  $\vec{u}_3 = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ . Det betyder att  $\vec{u}_3$  ligger i det plan som spänns upp av vektorerna  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$  och att alla tre vektorerna ligger i detta plan. (Figur 2.3)

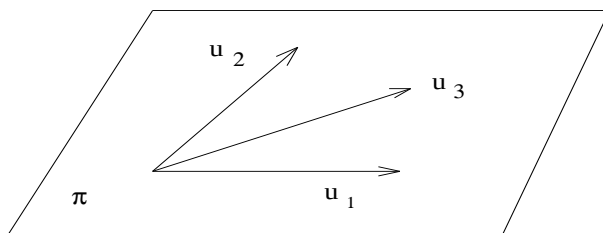


Fig. 2.3

Slutsats: tre vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  är **linjärt beroende** om och endast om **de ligger i ett och samma plan**.

Det följer att

(iv) tre vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  som **inte ligger i ett och samma plan** är linjärt **oberoende**. (Figur 2.4)

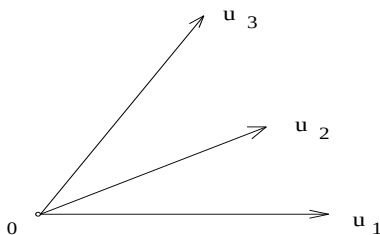


Fig. 2.4

(v) Varje uppsättning av **fyra eller fler** vektorer i  $\mathbb{R}^3$  är **linjärt beroende**. Detta är ett speciellt fall av ett mer generellt resultat, se Sats 2.3 nedan.

Därvid avslutar vi diskussionen av den geometriska tolkningen av begreppen "linjärt beroende och oberoende" av vektorer i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ .

**Sats 2.3.** Om  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  är vektorer ur  $\mathbb{R}^n$  och  $k > n$ , så är vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  **linjärt beroende**.

*Bevis.* Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  är linjärt beroende om det finns reella tal  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , **ej** alla lika med noll, sådana att  $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$ . Detta är ekvivalent med likheten

$$c_1 \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_1 \\ | \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_2 \\ | \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_k \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \vec{0} \\ | \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Vi betraktar nu (2.5) som ett **homogent** linjärt ekvationssystem i  $k$  obekanta  $c_1, c_2, \dots, c_k$  och med  $n$  ekvationer. Notera att eftersom enligt antagandet  $k > n$ , **är antalet obekanta  $k$  större än antalet ekvationer  $n$** . Enligt en tidigare bevisad sats följer det att det homogena ekvationssystemet (2.5) har någon **icke-trivial** lösning  $(c_1, c_2, \dots, c_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Enligt Definition 2.1 betyder det att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  är **linjärt beroende**.  $\square$

### 3. DET LINJÄRA HÖLJET

Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 3.1.** Det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$  är mängden av dessa vektorer i  $\mathbb{R}^n$  som kan framställas som linjära kombinationer av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ ,

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\} = \{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Exempel 3.1:** Avgör om vektorn  $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$  tillhör det linjära höljet av vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 3)$  och  $\vec{u}_3 = (2, -1, 1, 1)$  i  $\mathbb{R}^4$ .

*Lösning.* Enligt Definitionen 3.1 tillhör vektorn  $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$  det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  om och endast om  $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$  är en linjär kombination av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  dvs. om det finns reella tal  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{v}. \quad (3.1)$$

Detta är ekvivalent med kravet att det linjära ekvationssystemet i obekanta  $c_1, c_2$  och  $c_3$ ,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssystemet (3.2) med Gausselimination.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 8 \\ -1 & -1 & 1 & | & -5 \\ 1 & 3 & 1 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} + \boxed{1} \\ \boxed{4} - \boxed{1} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 3 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{1} - \boxed{2} \\ \boxed{4} - \boxed{2} \\ \frac{1}{3}\boxed{3} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & -4 \\ 0 & 1 & -3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 5 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{1} - 5\boxed{3} \\ \boxed{2} + 3\boxed{3} \\ \boxed{4} - 5\boxed{3} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Det följer att ekvationssystemet (3.2) har en unik lösning  $(c_1, c_2, c_3) = (1, 3, -1)$ .

(Kontroll:  $1\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3 = 1 \cdot (1, 1, -1, 1) + 3 \cdot (1, 2, -1, 3) - (2, -1, 1, 1) = (2, 8, -5, 9) = \vec{v}$ . Det stämmer!)

Eftersom  $\vec{v} = 1\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3$  får vi att  $\vec{v}$  är en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  och därmed att  $\vec{v}$  tillhör det linjära höljet av  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ,

$$\vec{v} \in \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}.$$

(Vi rekommenderar att läsaren, med hjälp av samma metod, visar att vektorn  $\vec{w} = (2, 8, -5, 10)$  **inte** tillhör  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ .)  $\square$

**Exempel 3.2: Geometrisk tolkning.** Vi skall nu geometriskt beskriva linjära höljet av olika uppsättningar av vektorer i  $\mathbb{R}^3$ .

(i) Om  $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$  är en vektor i  $\mathbb{R}^3$  består  $\text{span}\{\vec{u}_1\}$  av alla vektorer på formen  $c_1\vec{u}_1$ , där  $c_1 \in \mathbb{R}$  är ett godtyckligt reellt tal. Låt  $l$  vara den rätta linje genom origo som har  $\vec{u}_1$  som riktningsvektor. Det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1\}$  består av alla vektorer parallella med linjen  $l$ . (Figur 3.1)

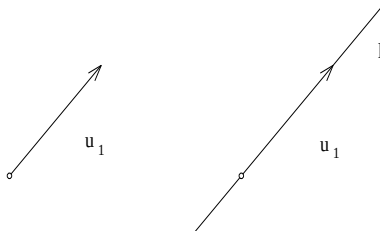


Fig. 3.1

(ii) Om  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  är två **parallella** vektorer i  $\mathbb{R}^3$  har vi  $\vec{u}_2 = b\vec{u}_1$  för något  $b \in \mathbb{R}$  (eller tvärt om). Varje element  $\vec{v}$  ur  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  är på formen  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = c_1\vec{u}_1 + c_2(b\vec{u}_1) = (c_1 + c_2b)\vec{u}_1$  med  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Detta visar att alla element ur  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  är parallella med den linje  $l$  som spänns upp av  $\vec{u}_1$  (förutsatt att  $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ .) (Figur 3.2)

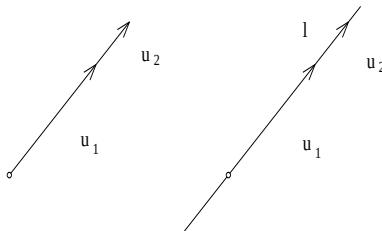


Fig. 3.2

(iii) Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  vara två **icke-parallella** vektorer i  $\mathbb{R}^3$ . Alla element  $\vec{v}$  ur  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  är på formen  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$  med  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  spänner upp ett plan  $\pi$  genom origo i  $\mathbb{R}^3$  och, som vi vet från kursens geometriavsnitt, utgör de en bas i detta plan. Varje vektor parallell med  $\pi$  kan skrivas på formen  $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$  med  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  och varje vektor skriven på denna form är parallell med  $\pi$ . Det följer att  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  består av alla vektorer i  $\mathbb{R}^3$  parallella med planet  $\pi$ .

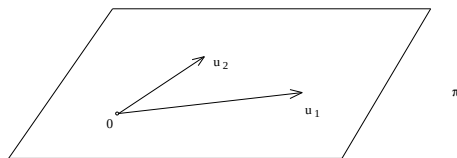


Fig. 3.3

(iv) Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  vara tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$  som **inte** ligger i ett och samma plan. Som vi vet från kursens geometriavsnitt kan dessa vektorer väljas som en bas i  $\mathbb{R}^3$  och, följaktligen, kan **varje vektor**  $\vec{v}$  ur  $\mathbb{R}^3$  skrivas som en linjärkombination  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$  med  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ . Detta visar att  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  är lika med hela  $\mathbb{R}^3$ .

Slutligen

(v) låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  vara tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$  som **ligger i ett och samma plan**. Om alla dessa vektorer är parallella (och inte alla lika med  $\vec{0}$ ) visar man på samma sätt som i del (ii) att  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  består av alla vektorer parallella med den linje genom origo som  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  är riktningsvektorer till. Om däremot t.ex.  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$  inte är parallella, spänner de upp ett plan  $\pi$  genom origo och alla tre vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  ligger i detta plan. (Figur 3.4)

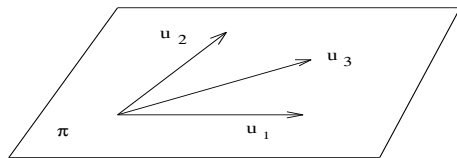


Fig. 3.4

Vektorerna  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$  kan väljas som en bas för planet  $\pi$  och  $\vec{u}_3 = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$  för några  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Det följer att varje linjärkombination av  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  är på formen

$$\begin{aligned} c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 &= c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3(b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2) = \\ &= (c_1 + c_3b_1)\vec{u}_1 + (c_2 + c_3b_2)\vec{u}_2 \end{aligned}$$

dvs. är en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$ .

Detta visar att  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  vilken enligt del (iii) består av alla vektorer parallella med planet  $\pi$ .  $\square$

#### 4. BAS

Låt  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 4.1.** Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^n$  om

- 1)  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  är linjärt oberoende och
- 2)  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\} = \mathbb{R}^n$ .

**Exempel 4.1:** Vektorerna

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

utgör en bas i  $\mathbb{R}^n$ . (Varje vektor  $\vec{e}_j$  har 1 som  $j$ -te komponenten och alla andra komponenter lika med 0.) Denna bas kallas för **standardbasen** i  $\mathbb{R}^n$ .

*Bevis.* För varje vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  har vi

$$\begin{aligned} \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) &= a_1(1, 0, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, 0, \dots, 1) = \\ &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Detta visar att varje vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  är en linjärkombination av vektorerna  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  och därmed är  $\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$ . Dessutom visar (4.1) att likheten  $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n = \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$  medför  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , vilket visar att vektorerna  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  är linjärt oberoende.

Därmed utgör vektorerna  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  en bas i  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Vi har en grundläggande

**Sats 4.2.** Varje bas i  $\mathbb{R}^n$  innehåller  $n$  vektorer.

*Bevis.* Ett fullständigt bevis för satsen (i ett större sammanhang) kommer att genomföras i en senare kurs. Tillsvidare vill vi bara påpeka följande: om en uppsättning vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^n$ , är dessa vektorer linjärt oberoende. Det följer då från sats 2.3 att  $k \leq n$ .  $\square$

**Anmärkning 4.3.** Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$  För varje vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  finns det **unika** reella tal  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  sådana att

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n. \tag{*}$$

Den unika  $n$ -tippeln av talen  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  kallas för  $\vec{v}$ 's koordinater i basen  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ .



*Bevis.* ( $\Rightarrow$ ) Låt oss anta att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Eftersom  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \mathbb{R}^n$  finns det reella tal  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{v}. \quad (1)$$

För att visa att dessa tal  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  är unika låt oss anta att även reella tal  $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$  uppfyller

$$d_1\vec{u}_1 + d_2\vec{u}_2 + \dots + d_n\vec{u}_n = \vec{v}. \quad (2)$$

Om vi subtraherar likheten (2) från (1) får vi

$$(c_1 - d_1)\vec{u}_1 + (c_2 - d_2)\vec{u}_2 + \dots + (c_n - d_n)\vec{u}_n = \vec{0}. \quad (3)$$

Eftersom vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  är linjärt oberoende (som basvektorer i en bas) medför (3) att  $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$ . Vi får  $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n$  vilket visar att talen  $c_1, c_2, \dots, c_n$  som uppfyller (1) är unika.

( $\Leftarrow$ ) Låt oss anta nu att en uppsättning vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$  uppfyller villkoret (\*). Eftersom för varje vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  gäller

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n,$$

får vi att  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \mathbb{R}^n$ .

Eftersom för varje vektor  $\vec{v}$  är likheten (\*) uppfylld med en unik uppsättning av koefficienterna  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , gäller det i synnerhet för nollvektorn  $\vec{0}$ . Det betyder att likheten

$$\vec{0} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n, \quad (4)$$

kan vara uppfylld med endast en uppsättning av koefficienter  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Eftersom (4) är uppfylld med koefficienterna  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , är det den enda möjligheten. Vi får då

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

vilket innebär att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  är linjärt oberoende.

Därmed utgör vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  en bas i  $\mathbb{R}^n$ . □

**Exempel 4.1 (igen)** Låt  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  vara standardbasen i  $\mathbb{R}^n$ , dvs.  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$  osv.

Som vi har sett tidigare, för varje vektor  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  har vi

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \dots + v_n\vec{e}_n.$$

Det betyder att  $n$ -tupeln  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  samtidigt utgör vektorn  $\vec{v}$ 's koordinater i standardbasen. □

**Exempel 4.2:** Visa att vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (-1, -1, 1)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$  och finn koordinaterna för  $\vec{v} = (1, -3, 1)$  i denna bas.

*Lösning.* Vi skall använda Anmärkning 4.3 för att lösa uppgiften.

Låt  $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$  vara en godtycklig vektor i  $\mathbb{R}^3$ . Finns det reella tal  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{w} \quad ? \quad (4.2)$$

Är en sådan uppsättning av reella tal  $(c_1, c_2, c_3)$  unik?

Likheten (4.2) kan skrivas som

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Vi betraktar (4.3) som ett linjärt ekvationssystem i obekanta  $c_1, c_2, c_3$  med ett **givet** högerled  $(b_1, b_2, b_3)$  (givet av vektorn  $\vec{w}$ ). Ekvationssystemet löses med Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b_1 \\ 2 & 1 & -1 & | & b_2 \\ -1 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{2} - 2\boxed{1} \\ \boxed{3} + \boxed{1} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 0 & | & b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{1} - \boxed{3} \\ \boxed{2} + \boxed{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 0 & | & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 0 & | & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Den sista matrisen visar att ekvationssystemet (4.3) har en **unik** lösning  $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2, b_1 + b_3, -b_1 + b_2 + b_3)$  för varje val av högerled  $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$ .

Detta betyder i sin tur att för varje vektor  $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  finns det en unik uppsättning av reella tal  $(c_1, c_2, c_3)$  som uppfyller (4.2). Enligt Anmärkning 4.3 innebär det att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$  och att  $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2, b_1 + b_3, -b_1 + b_2 + b_3)$  är  $\vec{w}$ :s koordinater i denna bas.

Låt oss beteckna denna bas med  $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ . Det följer att för vektorn  $\vec{v} = (1, -3, 1) = (b_1, b_2, b_3)$  är  $\vec{v}$ :s koordinater i basen  $\underline{\mathbf{u}}$  lika med  $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2, b_1 + b_3, -b_1 + b_2 + b_3) = (-4, 2, -3)$ .

Vi skriver  $\vec{v} = (-4, 2, -3)_{\underline{\mathbf{u}}}$  ("  $\vec{v}$ :s koordinater i basen  $\underline{\mathbf{u}}$  ").

**(Kontroll:**  $-4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 = -4(1, 2, -1) + 2(1, 1, 0) - 3(-1, -1, 1) = (1, -3, 1) = \vec{v}$ . Det stämmer!)  $\square$

## 5. ETT EXEMPEL

**Exempel 5.1:** Låt  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, 0, -1, 1, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (1, -1, 1, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_5 = (1, 2, -2, 0, 1)$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^5$ . Visa att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$  är linjärt beroende. Finn **bland dem** en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som spänner upp samma linjära hölje som  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ .

*Lösning.* Vi börjar med att undersöka för vilka reella tal  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$  det gäller att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 + c_4\vec{u}_4 + c_5\vec{u}_5 = \vec{0}. \quad (5.1)$$

Detta är ekvivalent med

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Vi betraktar (5.2) som ett linjärt ekvationssystem i obekanta  $c_1, \dots, c_5$  och löser systemet med Gausselimination:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{4} + \boxed{1} \\ \boxed{5} - \boxed{1} \end{array}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{3} - \boxed{2} \\ \boxed{4} + 2\boxed{2} \end{array}} \\
 & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{1} + 2\boxed{2} \\ \boxed{4} + \boxed{3} \\ (-1)\boxed{2} \\ \frac{1}{3}\boxed{3} \end{array}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{1} + 3\boxed{3} \\ \boxed{2} - 2\boxed{3} \end{array}} \\
 & \mapsto \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Den sista matrisen är en **radkanonisk** matris och har pivotelement i kolonn 1, 2 och 4. Vi väljer  $c_3 = s$ ,  $c_5 = t$  som parametrar (kolonner utan pivotelement!) och får lösningarna

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (s, -s - t, s, t, t), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Detta visar att det finns reella tal  $c_1, \dots, c_5$ , **ej alla** lika med 0, som uppfyller (5.1). Det innebär att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$  är **linjärt beroende**.

Om vi i (5.4) väljer  $t = 1$  och  $s = 0$  får vi lösningen  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, -1, 0, 1, 1)$  vilket visar att

$$-\vec{u}_2 + \vec{u}_4 + \vec{u}_5 = \vec{0}$$

och därmed

$$\vec{u}_5 = \vec{u}_2 - \vec{u}_4.$$

Eftersom  $\vec{u}_5$  är en linjärkombination av de övriga vektorerna får vi

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}. \quad (5.5)$$

Om vi i (5.4) väljer  $t = 0$  och  $s = 1$  får vi lösningen  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, -1, 1, 0, 0)$  vilket visar att

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$$

och därmed

$$\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Från detta följer att

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}. \quad (5.6)$$

Till slut, om vi sätter  $c_3 = 0$  och  $c_5 = 0$  dvs.  $s = t = 0$  får vi enbart lösningen  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_4 = 0$  vilket visar att det enda fallet när

$$c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_4 \vec{u}_4 = \vec{0}$$

är då  $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ . Det visar att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$  är **linjärt oberoende**.

Vi har dessutom

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}.$$

**Svar:**  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$  och vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$  är linjärt oberoende.

**Obs 1:** Detta är **inte** den enda möjliga lösningen till uppgiften. Ett annat val av parametrar i Gausseliminationen skulle ha givit en annan lösning.

**Obs 2:** De linjärt oberoende vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$  i vår lösning motsvarar de kolonner i den radkanoniska matrisen (5.3) som innehåller pivotelement (kolonnerna 1, 2 och 4). Den lösningsmetod som vi har valt fungerar alltid på detta sätt (och leder alltid till en lösning).  $\square$

### Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt  $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna  $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$  och  $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$  tillhör det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ . Om vektorn  $\vec{v}$  resp.  $\vec{w}$  tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ .

2. För vilka värden av konstanten  $a \in \mathbb{R}$  tillhör vektorn  $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$  det linjära höljet av vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$  och  $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$  i  $\mathbb{R}^4$ ?

3. Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$  i  $\mathbb{R}^3$  är linjärt beroende eller oberoende. I fall de är linjärt beroende, finn bland  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .

4. Visa att vektorerna  $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$ ,  $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$  är linjärt beroende. Uttryck en av de som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ .

5. Låt  $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$  vara två vektorer i  $\mathbb{R}^3$ . Finn en ekvation som komponenterna  $x_1, x_2, x_3$  måste uppfylla för att vektorn  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  skall tillhöra det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ . Tolk resultatet geometriskt. För vektorer  $\vec{v}$  som uppfyller ekvationen finn en framställning av  $\vec{v}$  som en linjärkombination av  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$ .

6. (a) Avgör om vektorerna  $\vec{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, -1)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^2$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn  $\vec{F} = (1, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2)$ .

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn  $\vec{F} = (1, 1)$  i  $\mathbb{R}^2$  i komponenter parallella med vektorerna  $\vec{v}_1$  och  $\vec{v}_2$  (dvs. finn  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  sådana att  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  med  $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$  och  $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$ ).

7. (a) Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn  $\vec{F} = (1, 1, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$ .

(b) Vektorerna  $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$  spänner upp ett plan  $\pi$  genom origo i  $\mathbb{R}^3$ . Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn  $\vec{F} = (1, 1, 1)$  som summa av två komponenter  $\vec{F}_1$  och  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , där komponenten  $\vec{F}_1$  är parallell med vektorn  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$  och komponenten  $\vec{F}_2$  är parallell med planet  $\pi$ .

8. Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^4$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn  $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

**Facit:**

1. (a) Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  är linjärt beroende.  
 (b)  $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ ,  $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$ ,  
 $\vec{w} \notin \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ .
2.  $a = 2$ .
3. Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  är linjärt beroende. Vidare är t.ex.  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  och  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  är linjärt oberoende.
4. T.ex.  $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ .  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ .
5. Ekvationen är  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Geometrisk tolkning: vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  spänner upp ett plan  $\pi$  genom origo i  $\mathbb{R}^3$ . Planet  $\pi$  har ekvationen  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Vektorn  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  tillhör det linjära höljet  $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  om  $\vec{v}$  ligger i (= är parallell med) detta plan.  
 Om  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  med  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$  blir  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$  med  $c_1 = \frac{1}{2}x_2$ ,  $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$ .
6. (a) Ja,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^2$ .  
 $\vec{F} = \frac{3}{5}\vec{v}_1 + \frac{1}{5}\vec{v}_2$ .  
 $\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2)\vec{v}_1 + (\frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)\vec{v}_2$ .  
 (b)  $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$  och  $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$ .
7. (a) Ja,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$ .  
 $\vec{F} = (-2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ .  
 $\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3)\vec{u}_1 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)\vec{u}_2 + (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)\vec{u}_3$ .  
 (b)  $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$  och  $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$ .
8. Ja,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^4$ ,  
 $\vec{F} = 5\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 - \vec{u}_4$ ,  
 $\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4)\vec{u}_1 + (-x_3 + x_4)\vec{u}_2 +$   
 $+(x_1 - x_2 - x_4)\vec{u}_3 + (-x_1 - x_3 + 2x_4)\vec{u}_4$ .