

Skrivtid 14-19. *Inga hjälpmedel tillåtna. Denna tentamen innehåller 8 uppgifter. Maxpoäng på varje uppgift är 5 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För betyg 3 (eller 4 resp. 5) krävs minst 18 (eller 25 resp. 32) poäng. Den som har klarat 16-27 poäng på inlämningsuppgifterna får 2 bonuspoäng på denna tentamen. Den som har minst 28 poäng på inlämningsuppgifterna får 3 bonuspoäng på denna tentamen. Lycka till!*

1. Finn och klassificera samtliga kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = e^x(y^2 + xy)$.
2. Kurvan C kan på parameterform skrivas som $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t}, \arcsin(t))$, där $0 \leq t \leq T$. Konstanten T uppfyller olikheterna $0 < T < 1$. Båglängdsparametrisera kurvan C . Ledning: $\frac{d}{dt} \arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

3. Bestäm samtliga lösningar $f \in C^2$ till den partiella differentialekvationen

$$e^{-2x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12(e^x + y)^2,$$

genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = e^x - y \\ v = e^x + y. \end{cases}$$

Variablerna u och v får inte förekomma i svaret.

4. Funktionen $f(x, y)$ är differentierbar i $(0,1)$ och $f(0,1) = 3$. I punkten $(0,1)$ gäller följande:

- Riktningsderivatan är $\sqrt{2}$ i riktningen som i polära koordinater beskrivs av vinkeln $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Detta innebär att riktningen är $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\frac{3\pi}{4}), \sin(\frac{3\pi}{4}))$.
- Riktningsderivatan är -1 i riktningen $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

Bestäm tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(0,1,3)$.

5. Låt K vara den begränsade kropp som begränsas av ytorna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = x^2 + y^2$. Densiteten i kroppen är $\delta = z$. Beräkna momenten $M_{x=0} = \iiint_K x \delta dV$, $M_{y=0} = \iiint_K y \delta dV$ och $M_{z=0} = \iiint_K z \delta dV$. Ledning: Beakta symmetrier.

6. Parabeln $x = y^2$ delar området mellan parablerna $y = x^2$ och $2y = x^2$ i två delar i första kvadranten. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-y^2/x} \sin\left(\frac{\pi x^2}{3y}\right) dA,$$

där D är den del som är obegränsad.

7. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_C \left(y^3 \tan(x^3) - \frac{3x^2}{(1+y^2)^2} \right) dx + \left(x e^{y^2} + \frac{4x^3 y}{(1+y^2)^3} \right) dy,$$

där C är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,1)$ genomlöst ett varv moturs.

8. Låt området $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definieras av

$$\Omega : \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 1. \end{cases}$$

Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = 5x + 3y$ i Ω om de existerar. Motivera noggrant.