

1. Finn och klassificera samtliga kritiska punkter till funktionen

$$f(x, y) = e^x(y^2 + xy).$$

Lösning: De partiella derivatorna är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(y^2 + xy) + e^xy = e^x(y^2 + xy + y) = e^xy(y + x + 1)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x(2y + x).$$

Vi söker kritiska punkter, d.v.s. nollställen för de partiella derivatorna. Eftersom $e^x > 0$ ges dessa av ekvationssystemet

$$\begin{cases} y(y + x + 1) = 0 \\ 2y + x = 0. \end{cases}$$

Vi ser direkt att $y = 0$ medför att $x = 0$. Antag därför att $y \neq 0$. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + x + 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

med lösningen

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1. \end{cases}$$

De kritiska punkterna är alltså $(0,0)$ och $(-2,1)$. Vi räknar nu ut de partiella derivatorna av andra ordningen och får

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x(y^2 + xy + y) + e^xy = e^x(y^2 + xy + 2y) = e^xy(y + x + 2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x(2y + x) + e^x = e^x(2y + x + 1)$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x.$$

I $(0,0)$ är hessianen

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $D_2 = -1 < 0$ är $H(0,0)$ indefinit och följaktligen är $(0,0)$ en sadelpunkt.

I $(-2,1)$ är hessianen

$$H(-2,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} \\ e^{-2} & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Eftersom $D_1 = e^{-2} > 0$ och $D_2 = e^{-4} > 0$ är $H(-2,1)$ positivt definit och följaktligen är $(-2,1)$ en lokal minimipunkt.

SVAR: De enda kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(-2,1)$. $(0,0)$ är en sadelpunkt. $(-2,1)$ är en lokal minimipunkt.

2. Kurvan C kan på parameterform skrivas som $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t}, \arcsin(t))$, där $0 \leq t \leq T$. Konstanten T uppfyller olikheterna $0 < T < 1$. Båglängdsparametrisera kurvan C .

Lösning: Vi har $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t}, \arcsin(t)) = (-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}, \frac{1}{2\sqrt{1+t}}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}})$.

Detta medför att $|\mathbf{v}(t)|^2 = (-\frac{1}{2\sqrt{1-t}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{1+t}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})^2 = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1+t+1-t+4}{4(1-t^2)} = \frac{3}{2(1-t^2)}$.

Därför är $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{|\mathbf{v}(t)|^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}$.

Det följer att $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(\alpha)| d\alpha = \int_0^t \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \arcsin(t)$.

Följaktligen gäller det att $t = \sin(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s)$.

SVAR: Båglängdsparametriseringen av kurvan ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \left(\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right)}, \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right)}, \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right)\right) \right) \\ &= \left(\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right)}, \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s\right)}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s \right), \text{ där } 0 \leq s \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \arcsin(T). \end{aligned}$$

3. Bestäm samtliga lösningar $f \in C^2$ till den partiella differentialekvationen

$$e^{-2x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12(e^x + y)^2,$$

genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = e^x - y \\ v = e^x + y. \end{cases}$$

Variablerna u och v får inte förekomma i svaret.

Lösning: Enligt kedjeregeln gäller att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} e^x + \frac{\partial f}{\partial v} e^x = e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

och att

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Genom att återanvända formlerna för förstaderivatorna och att använda produktregeln får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^x) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + e^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + e^x \left(e^x \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + e^x \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right) \\ &= e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + e^{2x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = - \left(-\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \left(-\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Om vi sätter in uttrycken för de partiella derivatorna får vi

$$e^{-2x} \left(e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + e^{2x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) - e^x \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 12(e^x + y)^2 = 12v^2.$$

Därför gäller $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 3v^2$.

Om vi integrerar över u får vi

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 3uv^2 + g(v).$$

Om vi integrerar över v får vi

$$f = uv^3 + G(v) + H(u), \text{ där } G, H \in C^2 \text{ (} G(v) \text{ är en primitiv funktion till } g(v) \text{)}.$$

SVAR: $f = (e^x - y)(e^x + y)^3 + G(e^x + y) + H(e^x - y)$, där $G, H \in C^2$.

4. Funktionen $f(x, y)$ är differentierbar i $(0, 1)$ och $f(0, 1) = 3$. I punkten $(0, 1)$ gäller följande:

- Riktningsderivatan är $\sqrt{2}$ i riktningen som i polära koordinater beskrivs av vinkeln $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- Rikttningsderivatan är -1 i riktningen $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Detta innebär att riktningen är $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\frac{3\pi}{4}), \sin(\frac{3\pi}{4}))$.

Bestäm tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(0, 1, 3)$.

Lösning: Eftersom funktionen är differentierbar i $(0, 1)$ gäller det att $D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(0, 1) = u_1 f_1(0, 1) + u_2 f_2(0, 1)$.

Vinkeln $\theta = \frac{3\pi}{4}$ motsvaras av enhetsvektorn $\mathbf{u} = (\cos(\frac{3\pi}{4}), \sin(\frac{3\pi}{4})) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Därför har vi följande ekvationssystem

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}f_1(0, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_2(0, 1) = \sqrt{2} \\ \frac{3}{5}f_1(0, 1) - \frac{4}{5}f_2(0, 1) = -1 \end{cases}$$

som har lösningen

$$\begin{cases} f_1(0, 1) = -3 \\ f_2(0, 1) = -1. \end{cases}$$

Tangentplanet har därför ekvationen $z = 3 + (-3)(x - 0) + (-1)(y - 1) = 4 - 3x - y$.

SVAR: Tangentplanet har ekvationen $z = 4 - 3x - y$.

5. Låt K vara den begränsade kropp som begränsas av ytorna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z = x^2 + y^2$. Densiteten i kroppen är $\delta = z$. Beräkna momenten $M_{x=0} = \iiint_K x \delta dV$, $M_{y=0} = \iiint_K y \delta dV$ och $M_{z=0} = \iiint_K z \delta dV$. Ledning: Beakta symmetrier.

Lösning: Av symmetriskäl är $M_{x=0} = M_{y=0} = 0$.

Kroppen beskrivs enklast med cylinderkoordinater. Vi har $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Det gäller att $r^2 \geq r$ om $r \geq 1$ och $r^2 \leq r$ om $r \leq 1$. Eftersom K är begränsad har vi alltså $r \leq 1$ och $r^2 \leq z \leq r$.

$$\begin{aligned} M_{z=0} &= \iiint_K z \delta dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r z^2 r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=r^2}^{z=r} r dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 (r^4 - r^7) dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^8}{8} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{8}{40} - \frac{5}{40} \right) = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

SVAR: $M_{x=0} = M_{y=0} = 0$. $M_{z=0} = \frac{\pi}{20}$.

6. Parabeln $x = y^2$ delar området mellan parablerna $y = x^2$ och $2y = x^2$ i två delar i första kvadranten. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-y^2/x} \sin\left(\frac{\pi x^2}{3y}\right) dA,$$

där D är den del som är inte är begränsad.

Lösning: Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2/y \\ v = y^2/x. \end{cases}$$

Då gäller

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Det följer att

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| 1 / \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = |1/3| = 1/3.$$

Vi ser nu att integranden är positiv och att

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-y^2/x} \sin\left(\frac{\pi x^2}{3y}\right) dA &= \int_1^\infty \int_1^{2x} e^{-v} \sin\left(\frac{\pi u}{3}\right) \frac{du dv}{3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-v} \right]_1^R \left[-\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi u}{3}\right) \right]_1^{2x} \\ &= (0 - (-e^{-1})) \left(\frac{1}{2\pi} - \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \right) = \frac{1}{\pi e}. \end{aligned}$$

$$\text{SVAR: } \iint_D e^{-y^2/x} \sin\left(\frac{\pi x^2}{3y}\right) dA = \frac{1}{\pi e}.$$

7. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_C \left(y^3 \tan(x^3) - \frac{3x^2}{(1+y^2)^2} \right) dx + \left(x e^{y^2} + \frac{4x^3 y}{(1+y^2)^3} \right) dy,$$

där C är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,1)$ genomlöpt ett varv moturs.

Lösning: Låt T vara området på och innanför triangeln. Greens teorem medför att

$$\begin{aligned} &\oint_C \left(y^3 \tan(x^3) - \frac{3x^2}{(1+y^2)^2} \right) dx + \left(x e^{y^2} + \frac{4x^3 y}{(1+y^2)^3} \right) dy \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x e^{y^2} + \frac{4x^3 y}{(1+y^2)^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(y^3 \tan(x^3) - \frac{3x^2}{(1+y^2)^2} \right) \right) dA \\ &= \iint_T \left(e^{y^2} + \frac{12x^2 y}{(1+y^2)^3} - 3y^2 \tan(x^3) - \frac{12x^2 y}{(1+y^2)^3} \right) dA = \iint_T (e^{y^2} - 3y^2 \tan(x^3)) dA = \iint_T e^{y^2} dA \\ &= \int_0^1 \int_{-y}^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 2y e^{y^2} dy = [e^{y^2}]_0^1 = e - 1, \text{ där vi har utnyttjat att } \iint_T -3y^2 \tan(x^3) dA = 0 \\ &\text{av symmetriskäl.} \end{aligned}$$

$$\text{SVAR: } \oint_C \left(y^3 \tan(x^3) - \frac{3x^2}{(1+y^2)^2} \right) dx + \left(x e^{y^2} + \frac{4x^3 y}{(1+y^2)^3} \right) dy = e - 1.$$

8. Låt området $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definieras av

$$\Omega : \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 1. \end{cases}$$

Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = 5x + 3y$ i Ω om de existerar. Motivera noggrant.

Lösning: Om vi adderar likheten $-x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ och olikheten $2x^2 - y^2 + z^2 \leq 1$ får vi $x^2 + 3z^2 \leq 2$. Projektionen av detta område på xz -planet är området på och innanför en ellips. Därför är x och z begränsade. Enligt likheten måste då även y vara begränsad. Det följer att Ω är begränsad. Eftersom Ω även är sluten och f är kontinuerlig antar f största och minsta värde. Vi delar in Ω i områdena

$$\Omega_1 : \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 < 1. \end{cases}$$

och

$$\Omega_2 : \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Definiera nu $g(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 - 1$ och $h(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + z^2 - 1$.

I Ω_1 gäller att $g = 0$ och $h < 0$. I lokala extrempunkter gäller även att $\nabla f = (5, 3, 0)$ och $\nabla g = (-2x, 2y, 4z)$ är linjärt beroende. Alltså måste z vara noll och $\frac{-2x}{5} = \frac{2y}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x$. Detta medför att $g = -x^2 + (-\frac{3}{5}x)^2 + 0 - 1 = -\frac{16}{25}x^2 - 1 \neq 0$, vilket är omöjligt. Alltså finns inga lokala extrempunkter i Ω_1 .

I Ω_2 gäller att $g = 0$ och $h = 0$. I lokala extrempunkter gäller även att ∇f , ∇g och ∇h är linjärt beroende. Vi har linjärt beroende om och endast om

$$0 = \begin{vmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -2x & 2y & 4z \\ 4x & -2y & 2z \end{vmatrix} = 60z(x + y).$$

Alltså gäller $z = 0$ eller $y = -x$. Om vi sätter in $z = 0$ i $g = h = 0$ får vi

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

med lösningen

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{3}, \end{cases}$$

där tecknen kan väljas oberoende av varandra. Det största värde som f antar i dessa fyra punkter är $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ och det minsta är $-5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

Om vi sätter in $y = -x$ i $g = h = 0$ får vi

$$\begin{cases} 2z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Följaktligen gäller $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ eller $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Eftersom $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, z) = \sqrt{2} < 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ och $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, z) = -\sqrt{2} > -5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ får vi svaret:

SVAR: Största och minsta värdet av f i Ω är $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ respektive $-5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.