

1. Finn och klassificera samtliga kritiska punkter till funktionen

$$f(x, y, z) = z^2(x^3 + xy - y) - 2z.$$

Tips: Tänk på att funktionens hessian är symmetrisk.

2. Kurvan C kan på parameterform skrivas som $\mathbf{r}(t) = (t \sin(t) + \cos(t), t \cos(t) - \sin(t), t^2)$, där $0 \leq t \leq T$ och T är en positiv konstant. Båglängdsparametrisera kurvan C .

3. Bestäm samtliga lösningar $f \in C^2$ till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y),$$

genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y. \end{cases}$$

Variablerna u och v får inte förekomma i svaret.

4. Den enkla, slutna, styckvis släta och positivt orienterade kurvan C beskrivs på parameterform av $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t))$, där $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Beräkna med hjälp av en linjeintegral arean av det område som C är randkurva till.

5. Finn varje punkt i $\mathbb{R}^3$ som både ligger på den elliptiska paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och på den hyperboliska cylindern $x(y+2) = 1$ och som uppfyller att varje normalvektor till den elliptiska paraboloiden i punkten är vinkelrät (ortogonal) mot varje normalvektor till den hyperboliska cylindern i punkten. Bestäm även tangentplanet till den elliptiska paraboloiden i varje sådan punkt.

6. Låt området $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definieras av

$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 2 \\ z = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = x + z$ i Ω om de existerar. Motivera noggrant.

7. Låt D vara området mellan de horisontella linjerna $y = 0$ och $y = 2$ och **utanför** cirkeln $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dA.$$

Ledning: Gör koordinatbytet $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$

8. Beräkna den generaliserade trippelintegralen

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \int_x^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} dz dx dy,$$

genom att först integrera över y , sedan över x och till sist över z .

Några trigonometriska formler

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y) \quad (1)$$

$$2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y) \quad (2)$$

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x - y) + \sin(x + y) \quad (3)$$

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \quad (4)$$

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \quad (5)$$

$$2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x) \quad (6)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad (7)$$

LÖSNINGAR:

1. Lösning: Vi har en kritisk punkt om och endast om $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s

$$z^2(3x^2 + y) = 0 \quad (8)$$

$$z^2(x - 1) = 0 \quad (9)$$

$$2z(x^3 + xy - y) - 2 = 0. \quad (10)$$

Enligt ekvation (10) är $z \neq 0$. Ekvation (9) medför därför att $x = 1$. Enligt ekvation (8) är nu $y = -3x^2 = -3$. Om vi sätter in $x = 1$ och $y = -3$ i ekvation (10) får vi nu $2z(1 - 3 + 3) - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Den enda kritiska punkten är alltså $(1, -3, 1)$. Hessianen blir

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6z^2x & z^2 & 2z(3x^2 + y) \\ z^2 & 0 & 2z(x - 1) \\ 2z(3x^2 + y) & 2z(x - 1) & 2(x^3 + xy - y) \end{pmatrix}.$$

Om vi sätter in punkten $(1, -3, 1)$ blir hessianen

$$H(1, -3, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $D_2 = -1 < 0$ och $\det(H(1, -3, 1)) = -2 \neq 0$ är $(1, -3, 1)$ en sadelpunkt.

SVAR: Den enda kritiska punkten är $(1, -3, 1)$. Det är en sadelpunkt.

2. Lösning:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \left(t \sin(t) + \cos(t) \right), \frac{d}{dt} \left(t \cos(t) - \sin(t) \right), \frac{d}{dt} \left(t^2 \right) \right) \\ &= (\sin(t) + t \cos(t) - \sin(t), \cos(t) - t \sin(t) - \cos(t), 2t) = (t \cos(t), -t \sin(t), 2t). \end{aligned} \quad (11)$$

Enligt (11) gäller

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(t \cos(t))^2 + (-t \sin(t))^2 + (2t)^2} = \sqrt{t^2 \cos^2(t) + t^2 \sin^2(t) + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t, \end{aligned}$$

ty $t \geq 0$. Därför gäller $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{5}\tau d\tau = \sqrt{5}t^2/2$.

Det följer att $t = \sqrt{2s/\sqrt{5}}$, eftersom $t \geq 0$. Följaktligen har vi

SVAR: Båglängdsparametriseringen av kurvan ges av

$$\mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{2s/\sqrt{5}} \sin \left(\sqrt{2s/\sqrt{5}} \right) + \cos \left(\sqrt{2s/\sqrt{5}} \right), \sqrt{2s/\sqrt{5}} \cos \left(\sqrt{2s/\sqrt{5}} \right) - \sin \left(\sqrt{2s/\sqrt{5}} \right), 2s/\sqrt{5} \right),$$

där $0 \leq s \leq \sqrt{5}T^2/2$.

3. Lösning: Enligt kedjeregeln gäller att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Genom att återanvända formlerna för förstaderivatorna och att använda produktregeln får vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Om vi sätter in uttrycken för de partiella derivatorna i differentialekvationen får vi

$$2 \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 4x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} = 2(x^2 + y) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2v.$$

Om vi integrerar en gång över u får vi

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2uv + G(v).$$

Om vi integrerar en gång till över u får vi

$$f = u^2 v + uG(v) + H(v) = x^2(x^2 + y) + xG(x^2 + y) + H(x^2 + y), \text{ där } G, H \in C^2.$$

SVAR: $f = x^2(x^2 + y) + xG(x^2 + y) + H(x^2 + y)$, där $G, H \in C^2$.

4. Lösning: $d\mathbf{r} = \left(\frac{d}{dt} \cos(t), \frac{d}{dt} \sin(2t) \right) dt = (-\sin(t), 2 \cos(2t)) dt$.

Det gäller att $x = \cos(t)$ och $dy = 2 \cos(2t) dt$.

En formel för arean är

$$\text{Arean} = \oint_C x dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) 2 \cos(2t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2t) \cos(t) dt.$$

Enligt den trigonometriska formeln (1) har vi

$$\text{Arean} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t - t) + \cos(2t + t)) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + \cos(3t)) dt = \left[\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - 1/3 - (-1 + 1/3) = 4/3 \text{ a.e.}$$

SVAR: Arean är $4/3$ a.e.

5. Lösning: Den elliptiska paraboloiden kan skrivas som $x^2 + y^2 - z = 0$.

En normalvektor till den är $\mathbf{n}_1 = \nabla(x^2 + y^2 - z) = (2x, 2y, -1) \neq \mathbf{0}$.

Den hyperboliska cylindern kan skrivas som $x(y + 2) - 1 = 0$.

En normalvektor till den är $\mathbf{n}_2 = \nabla(x(y + 2) - 1) = (y + 2, x, 0)$. På den hyperboliska cylindern gäller $\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$.

Ortogonalitetsvillkoret är ekvivalent med ekvationen

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(2x, 2y, -1) \bullet (y + 2, x, 0) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$2x(y + 2) + 2yx = 0 \Leftrightarrow 4x(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = -1.$$

Om $x = 0$ ligger dock inte motsvarande punkt på den hyperboliska cylindern, så $y = -1$.

Eftersom motsvarande punkt ligger på den hyperboliska cylindern har vi

$$x(-1 + 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Eftersom motsvarande punkt ligger på den elliptiska paraboloiden har vi

$$1^2 + (-1)^2 - z = 0 \Leftrightarrow z = 2.$$

Punkten blir alltså $(1, -1, 2)$.

Det följer att $\mathbf{n}_1 = (2x, 2y, -1) = (2, -2, -1)$.

Tangentplanet ekvation blir därför $(2, -2, -1) \bullet (x - 1, y + 1, z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z - 2 = 0$

SVAR: Den enda punkten som uppfyller villkoret är $(1, -1, 2)$. Den elliptiska paraboloidens tangentplan i punkten har ekvationen $2x - 2y - z - 2 = 0$.

6. Lösning: Projektionen av $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + x = 2\}$ på xy -planet är en cirkel.

Det följer att x och y är begränsade och därför även $z = x^2 - y^2$. Därmed är Ω begränsad. Eftersom Ω även är sluten och f är kontinuerlig existerar största och minsta värde för f . Definiera $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + x - 2$ och $h(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$. Då gäller $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0\}$. Extrempunkter kan bara finnas där

$$0 = \begin{vmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x+1 & 2y & 0 \\ 2x & -2y & -1 \end{vmatrix} = -4y(1+2x).$$

Alltså gäller $x = -1/2$ eller $y = 0$.

Om vi sätter in $x = -1/2$ i $g(x, y, z) = 0$ får vi $y^2 = 2 - x^2 - x = 2 - 1/4 + 1/2 = 9/4$. Detta medför att $z = x^2 - y^2 = 1/4 - 9/4 = -2$. Det medför i sin tur att $f = x + z = -1/2 - 2 = -5/2$.

Om vi sätter in $y = 0$ i $g(x, y, z) = 0$ får vi $x^2 + x - 2 = 0$. Följaktligen gäller $x = 1 \vee x = -2$.

Om $x = 1$ blir $z = x^2 - y^2 = 1^2 - 0^2 = 1$. Det följer att $f = x + z = 1 + 1 = 2$.

Om $x = -2$ blir $z = x^2 - y^2 = (-2)^2 - 0^2 = 4$. Det följer att $f = x + z = -2 + 4 = 2$.

Alternativt kan man lösa ut z ur $z = x^2 - y^2$. Vi får då ett problem i två variabler.

SVAR: Största och minsta värdet är 2 respektive $-5/2$.

7. Lösning: Eftersom $y \geq 0$ är integranden aldrig negativ och vi kan räkna på som vanligt. Vi inför polära koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Linjen $y = 2$ motsvarar $r \sin(\theta) = 2 \Leftrightarrow r = 2/\sin(\theta)$. Detta blir en övre gräns för r .

Cirkeln $x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y$ motsvarar $r^2 = 2r \sin(\theta) \Leftrightarrow r = 2 \sin(\theta)$ om $r > 0$. Detta blir en undre gräns för r .

Eftersom $y \geq 0$ gäller $0 \leq \theta \leq \pi$.

Variabelbytet medför

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dA &= \int_0^\pi \int_{2 \sin(\theta)}^{\frac{2}{\sin(\theta)}} \frac{r \sin(\theta)}{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_{2 \sin(\theta)}^{\frac{2}{\sin(\theta)}} \sin(\theta) dr d\theta = \int_0^\pi \sin(\theta) [r]_{2 \sin(\theta)}^{\frac{2}{\sin(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^\pi (2 - 2 \sin^2(\theta)) d\theta = \int_0^\pi 2 \cos^2(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Om vi använder den trigonometriska formeln (4) i (12) får vi

$$\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dA = \int_0^\pi (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^\pi = \pi.$$

SVAR: $\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dA = \pi$.

8. Lösning: Eftersom $0 \leq z \leq 1$ gäller $z^2 \geq z^3 \Rightarrow 3z^2 \geq 2z^3$ så integranden är aldrig negativ och vi kan räkna på som vanligt med itererad integration. Vi har

$$0 \leq y \leq 1 \quad (13)$$

$$y \leq x \leq \sqrt{y} \quad (14)$$

$$x \leq z \leq 1. \quad (15)$$

Variabeln z ska nu vara ytterst. Variabeln får inte bero av andra variabler. Vi har $z \geq x \geq y \geq 0$ från (15), (14) och (13) och $z \leq 1$ från (15). Därmed får vi integrationsintervallet $0 \leq z \leq 1$.

Variabeln x ska vara i mitten. Variabeln får bara bero av den yttersta variabeln, d.v.s. z . Vi har $x \leq z$ från (15) och $x \geq y \geq 0$ från (14) och (13). Därmed får vi integrationsintervallet $0 \leq x \leq z$.

Variabeln y ska vara innerst. Den får bero av övriga variabler. Vi har $y \leq x$ och $x \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y \geq x^2$ från (14). Följaktligen blir integrationsintervallet $x^2 \leq y \leq x$.

Den generaliserade trippelintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \int_x^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} dz dx dy &= \int_0^1 \int_0^z \int_{x^2}^x \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} dy dx dz = \int_0^1 \int_0^z \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} [y]_{x^2}^x dx dz \\ &= \int_0^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} \int_0^z (x - x^2) dx dz = \int_0^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^z dz \\ &= \int_0^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) dz = \int_0^1 \frac{e^z}{6} dz = \frac{1}{6} [e^z]_0^1 = \frac{e - 1}{6}. \end{aligned}$$

SVAR: $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \int_x^1 \frac{e^z}{3z^2 - 2z^3} dz dx dy = \frac{e-1}{6}.$