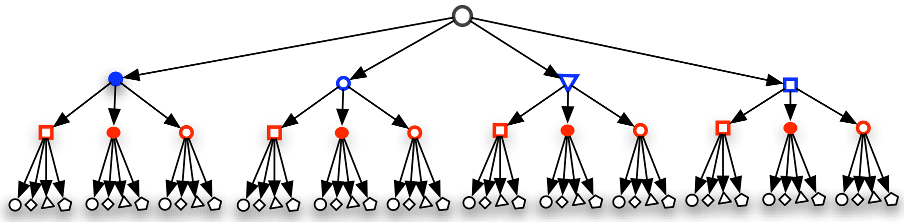
Kombinatorik

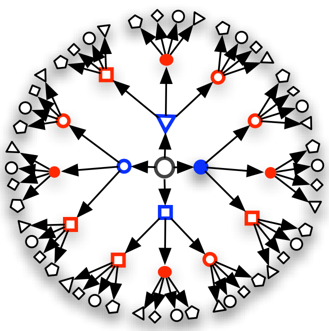
Kombinatorik handlar oftast om att räkna hur många arrangemang det finns av en viss typ.

Multiplikationsprincipen

Antag att vi är på en restaurang för att provsmaka terättersmåltider. Om det finns fyra förrätter att välja mellan, tre huvudrätter samt fyra efterrätter, så har vi totalt $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ stycken måltider att proväta. PUH!

Nedanstående figurer avser att övertyga läsaren om riktigheten i kalkylen.





MULTIPLIKATIONSPRINCIPEN Om operationerna $F_1, F_2, \ldots, F_m$ kan utföras på $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sätt, så kan den sammansatta operationen F_1 följd av F_2 följd av $\ldots$ följd av F_m utföras på $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ sätt.

EXEMPEL 1 Hur många tresiffriga tal finns det i tio-systemet, om vi inte tillåter dem att börja på 0, och inte sluta på 0 eller 5?

LÖSNING Ett tresiffrigt tal kan "opereras fram" med tre operationer i följd på tex följande sätt: Välj den första siffran (bland 9 st), sedan den andra (bland 10 st), och till sist den tredje (bland 8 st). Antalet tresiffriga tal blir (enligt multiplikationsprincipen) $9 \cdot 10 \cdot 8 = 720$.

EXEMPEL 2 Betrakta alla teckensträngar av längd k som *saknar* förekomst av två lika tecken i följd. (Tex är *abba* förbjuden.) Hur många tillåtna strängar finns det om varje tecken väljs från ett alfabet med n olika tecken?

LÖSNING Det första tecknet kan väljas på n sätt, det andra på $n-1$ sätt. (Det gäller ju bara att undvika det tecken som valdes på föregående position.) Samma sak gäller för de återstående positionerna. Det sökta antalet strängar blir därför $n \cdot (n-1)^{k-1}$.

EXEMPEL 3 Betrakta alla teckensträngar av längd k som *saknar* förekomst av två lika tecken. (Tex är *abca* förbjuden.) Hur många tillåtna strängar finns det om tecknen tas (på samma sätt som i förra exemplet) från ett alfabet med n olika tecken?

LÖSNING Det första tecknet kan väljas på n sätt.
Det andra på $n-1$ sätt. (Det gäller ju bara att undvika det tecken som valdes på föregående position.)
Det tredje kan väljas på $n-2$ sätt. (Vi måste undvika de två tecken som valdes på de första två platserna.)
Osv ... Det sista tecknet kan väljas på $n-(k-1)$ sätt. Sökta antalet blir $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$. Kallas *fallande produkt.*

Anmärkning

Eftersom en teckensträng är en lista av tecken, så kan man formulera det senaste problemet på följande sätt utan att lösningen förändras.

"Hur många listor av längd k kan man bilda med hjälp enbart av elementen i $\{1, 2, \ldots, n\}$ då inget element får användas två gånger?"

Permutationer

DEFINITION En *permutation* av en ändlig mängd X är en *uppräkning* av mängdens element i en viss ordningföljd.

EXEMPEL 4 Här är alla (sex) permutationer av $\{1, 2, 3\}$

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)$$

$n!$

Om $|X| = n$,
så är antalet permutationer av X lika med $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

ANM $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ betecknas "$n!$" och uttalas "n-fakultet".

BEVIS: Varje permutation kan "opereras fram" genom att man gör n stycken operationer i följd:
1. Välj permutationens första element. Här har vi alla n element att välja bland.
2. Välj permutationens andra element. Nu finns det $n-1$ element kvar att välja bland.
2. Välj permutationens tredje element. Nu finns det $n-2$ element kvar att välja bland.

$\vdots$

n. Välj permutationens n:te element. Nu finns det bara 1 element kvar att välja. Multiplikationsprincipen ger resten ...

EXEMPEL 5 *HULK*

Hur många olika teckensträngar kan man bilda genom att *kasta om* bokstäverna i *HULK*?

LÖSNING Betrakta bokstäverna i *HULK*. De låter sig permuteras på 4! olika sätt. Härav följer att svaret på den givna frågan är
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

EXEMPEL 6 *HULL*

Hur många olika teckensträngar kan man bilda genom att *kasta om* bokstäverna i *HULL*?

LÖSNING Betrakta först bokstäverna i HUL_1L_2. De kan permuteras på 4! sätt. Varje sådan permutation har en "tvillingpermutation" som skiljer sig från den förra enbart genom att de två L:en är omkastade. Härav följer att svaret på den givna frågan är $\frac{4!}{2} = 12$.

EXEMPEL 7 *LULL*

Hur många olika teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i *LULL*?

LÖSNING Är $\frac{4!}{3}$ rätt svar?
NEJ!, men $\frac{4!}{3!}$. Se här ...
Antag att x olika strängar kan bildas av *LULL*. Varje permutation av $L_1UL_2L_3$ kan då opereras fram med hjälp av två operationer i följd:
1. Bilda en sträng med hjälp av *LULL*. (x sätt)
2. Permutera de tre L:en. (3! sätt).
Därför är antalet permutationer av $L_1UL_2L_3$ lika med $x \cdot 3!$, men även (förstås) lika med $4!$. Härav följer att $x = \frac{4!}{3!}$.

EXEMPEL 8 *MAHNAHMAHNA*

Hur många olika teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i *MAHNAHMAHNA*? Tex är *MAHNAHMAHNA* och *MANNHAHAHAM* två olika sådana strängar.

LÖSNING Antag att det finns x stycken. Betrakta först följande sträng av 11 olika tecken $M_1\, A_1\, H_1\, N_1\, A_2\, H_2\, M_2\, A_3\, H_3\, N_2\, A_4$. Antalet permutationer av densamma är förstås lika med $11!$, men också lika med $x \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!$ eftersom varje permutation kan opereras fram med hjälp av följande fem operationer i följd:
1. Bilda en sträng med hjälp av MAHNAHMAHNA. (x sätt)
2. Permutera de två M:en. (2! sätt).
3. Permutera de fyra A:na. (4! sätt).
4. Permutera de tre H:na. (3! sätt).
5. Permutera de två N:en. (2! sätt).
Det följer att $x = \frac{11!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 69\,300$.

Binomialtal

När man expanderar ett s.k. *binom* $(z+1)^n$ får man ...

binom	expanderat binom
1	1
$z+1$	$z+1$
$(z+1)^2$	$z^2+2\,z+1$
$(z+1)^3$	$z^3+3\,z^2+3\,z+1$
$(z+1)^4$	$z^4+4\,z^3+6\,z^2+4\,z+1$
$(z+1)^5$	$z^5+5\,z^4+10\,z^3+10\,z^2+5\,z+1$
$(z+1)^6$	$z^6+6\,z^5+15\,z^4+20\,z^3+15\,z^2+6\,z+1$
$(z+1)^7$	$z^7+7\,z^6+21\,z^5+35\,z^4+35\,z^3+21\,z^2+7\,z+1$

De expanderade binomens koefficienter kallas för *binomialtal* och innehåller kombinatorisk information, vilket avsnitten nedanför kommer att visa.

Pascals triangel

Om man i presentationen av de expanderade binomen ovanför skalar bort allt utom binomialtalen framträder ett triangulärt mönster som kallas Pascals triangel (efter Blaise Pascal 1623 - 1662).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Många intressanta tal och mönster dyker upp explicit eller implicit i Pascals triangel ...

Triangeltalen

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Fibonaccitalen

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Ser du dem inte? Summera elementen längs varje färglagd diagonal i riktning sydväst-nordost! Summeras istället elementen längs varje rad får man tvåpotenserna ...

Tvåpotenserna

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Jämna och udda binomialtal

1
1	1
1	2	1
1	3	3	1
1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1
1	16	120	560	1820	4368	8008	11 440	12 870	11 440	8008	4368	1820	560	120	16	1
1	17	136	680	2380	6188	12 376	19 448	24 310	24 310	19 448	12 376	6188	2380	680	136	17	1
1	18	153	816	3060	8568	18 564	31 824	43 758	48 620	43 758	31 824	18 564	8568	3060	816	153	18	1
1	19	171	969	3876	11 628	27 132	50 388	75 582	92 378	92 378	75 582	50 388	27 132	11 628	3876	969	171	19	1

Samma tal - men flera - och nu skrivna som nollor resp. ettor

1
1	1
1	0	1
1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Kombinationer

Inom kombinatoriken används ordet *kombination* synonymt med ordet delmängd, och att *kombinera* k element ur en mängd med n element betyder "att bilda en delmängd av storlek k av en mängd med n element", man brukar också säga "att välja k element av n stycken". Här får du nåt att fundera över: Hur många sätt finns det att välja tre av fem element?

n välj *k*

Låt $\binom{n}{k}$ beteckna antalet sätt att välja k element bland n element.

Uttalas "n välj k" eller "n över k".

ANM Eftersom k stycken element valda ur $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ bildar en s.k. *k-delmängd* av X, så är $\binom{n}{k}$ lika med *antalet* k-delmängder av X.

EXEMPEL 9 Här är samtliga 2-delmängder av $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\{1, 2\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{1, 4\},$$
$$\{2, 3\}, \quad \{2, 4\},$$
$$\{3, 4\}$$

De är 6 st. Således är $\binom{4}{2} = 6$.

Några enkla identiteter

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

BEVIS Det finns exakt *en* 0-delmängd av $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, nämligen den tomma mängden, och exakt *en* n-delmängd, nämligen X själv. $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

BEVIS Det finns lika många k-delmängder av $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ som det finns $(n-k)$-delmängder. Varför? Jo, till varje delmängd (av X) hör exakt en komplementmängd. Så enkelt är det! $\square$

Illustration: Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Till delmängden $\{2, 5\}$ hör komplementmängden $\{1, 3, 4, 6\}$.

Två formler

Först den klassiska kvotformeln med två lika långa fallande produkter i täljaren och i nämnaren ...

Kvotformeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n{-}1)\,(n{-}2)\cdot\ldots\cdot(n{-}(k{-}1))}{k\,(k{-}1)\,(k{-}2)\cdot\ldots\cdot 1}$$

BEVIS

Formeln följer (eller hur!) om vi kan visa att

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)). \tag{1}$$

är lika med

$$\binom{n}{k}\cdot k\,(k-1)\,(k-2)\cdot\ldots\cdot 1 \tag{2}$$

Men varför beskriver (1) och (2) samma sak? Jo, därför att båda uttrycken beskriver *antalet listor* med k element valda ur $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Att (1) beskriver det nämnda *antalet listor* är en direkt konsekvens av multiplikationsprincipen eftersom första elementet i en sådan lista kan väljas på n sätt, nästa element på $n-1$ sätt, osv ...

Att (2) beskriver samma sak följer också av multiplikationsprincipen.

Ty varje lista av nämnt slag kan skapas genom att man

(i) först väljer en k-delmängd av $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$,

(ii) och sedan permuterar elementen i den valda k-delmängden.

Eftersom (i) kan utföras på $\binom{n}{k}$ sätt och (ii) på $k!$ sätt, så följer (2) av multiplikationsprincipen. □

EXEMPEL 10 $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

Sedan rekursionsformeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

BEVIS

Då man skall komponera en k-delmängd A av $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ måste man ta ställning till huruvida elementet $n+1$ skall vara med i A eller inte.

Fall 1. $n+1 \in A$. Här behöver vi bara komplettera singelmängden $\{n+1\}$ med ytterligare $k-1$ element för att A skall bli en k-delmängd. Eftersom nämnda $k-1$ element måste väljas ur $\{1, 2, \ldots, n\}$ kan detta göras på $\binom{n}{k-1}$ sätt.

Fall 2. $n+1 \notin A$. Nu måste A:s samtliga k element tas ur $\{1, 2, \ldots, n\}$, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt.

De två fallen sammantagna bevisar rekursionsformeln. □

Med hjälp av $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och rekursionsformeln kan man från $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ beräkna $\binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{1}, \ldots, \binom{n+1}{n+1}$.

Gör man detta för det ena n-värdet efter det andra återskapas den ena raden efter den andra i Pascals triangel.

$$\begin{array}{llll}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & \binom{4}{2} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 6 &
\end{array}$$

Binomialsatsen

Hur kan det nu komma sig att att $\binom{n}{k}$ dyker upp i Pascals triangel? Med andra ord, vad har ″antalet sätt att välja k element bland n element″ med binomialtalen att göra?

Svar: Vid expansionen av $(z+1)^n = (z+1)\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+1)$ skall n stycken parentesuttryck multipliceras ihop. Varje term som uppstår vid denna multiplikation är en produkt av n stycken faktorer - en faktor från varje parentesuttryck. Termen $z^k = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{k\,\text{st}}$ uppstår då z väljs ur exakt k stycken av de n parentesuttrycken (och 1 väljs ur de resterande parentesuttrycken). Därför kommer multiplikationen att generera just $\binom{n}{k}$ stycken z^k-termer. □

Vi har just bevisat

BINOMIALSATSEN $(z+1)^n = \binom{n}{0} z^0 + \binom{n}{1} z^1 + \binom{n}{2} z^2 + \ldots + \binom{n}{n} z^n$

EXEMPEL 11 Expandera $(a+b)^n$

LÖSNING

$$(a+b)^n = b^n\left(\frac{a}{b}+1\right)^n = b^n\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{a}{b} + \binom{n}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) =$$

$$\binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2\, b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n$$

EXEMPEL 12 *MAHNAHMAHNA* igen

Hur många olika teckensträngar kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet *MAHNAHMAHNA*?

LÖSNING Det gäller att välja positioner åt två M, fyra A, tre H och två N i en sträng av längd 11. Eftersom det finns $\binom{11}{2}$ sätt att placera två M, sedan $\binom{9}{4}$ sätt att placera fyra A, och $\binom{5}{3}$ sätt att placera tre H, samt $\binom{2}{2}$ sätt att placera två N. Det följer att sökta antalet strängar är lika med $\binom{11}{2}\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 69\,300$.

EXEMPEL 13 Poker ♥, ♦, ♠, ♣

En pokerhand är en kombination av fem kort tagna ur en vanlig kortlek med 52 kort. Hur många pokerhänder finns det där *inga* av de fem korten har samma valör (tex inte två ettor eller tre åttor)?

LÖSNING De 52 korten innehåller 13 olika valörer, där varje valör finns i 4 olika "färger" ♥, ♦, ♠, ♣.

Två "operationer" i följd skall utföras ...

(i) Välj valörer åt de fem korten! $\binom{13}{5}$ sätt

(ii) Välj färger på de fem korten! 4^5 sätt

Av multiplikationsprincipen följer svaret $\binom{13}{5} \cdot 4^5 = 1\,317\,888$.

EXEMPEL 14 Mera poker

Hur många pokerhänder finns det av typen "två par" (tex två ettor och två åttor)?

LÖSNING

(i) Välj valör åt de två paren $\binom{13}{2}$ sätt

(ii) Välj valör åt det återstående kortet $\binom{11}{1}$ sätt

(iii) Välj färger åt de två paren $\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ sätt

(iv) Välj färger åt det återstående kortet 4 sätt

Det sökta svaret blir $\binom{13}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}4 = 123\,552$.