

Oswald Fogelklou
Matematiska institutionen
Uppsala universitet

Kurslitteratur Robert A. Adams & Christopher Essex, Calculus, A complete course, 7th edition

Läsanvisningar följer nedan.

Kurshemsida <http://www2.math.uu.se/~oswald/flervariabel11.html>

Kontakt e-post: oswald@math.uu.se

Rum: Å14102

Telefon: 018-4713286

Undervisning Undervisningen består av 20 föreläsningar och 10 lektioner. Jag är ansvarig för föreläsningarna. Vidare är Jimmy Kungsman ansvarig för lektionerna för W2A, Justin Pati för lektionerna för W2B, jag för lektionerna för ES2A och Max Isacson för lektionerna för ES2B.

Tentamen Tentamen äger rum 20 oktober. Den består av 8 uppgifter på 5 poäng vardera. Betyg 3 motsvarar 18-24 poäng, betyg 4 motsvarar 25-31 poäng och betyg 5 motsvarar 32 poäng eller mer.

Inlämningsuppgifter Två frivilliga inlämningsuppgifter kommer att lämnas ut på 20 poäng vardera. Den som har sammanlagt minst 28 poäng får 3 bonuspoäng på ordinarie tentamen. Den som har sammanlagt mellan 16 och 27 poäng får 2 bonuspoäng på ordinarie tentamen. Inlämningsuppgifterna ska senast lämnas in 7 oktober respektive 18 oktober. En student som vill lämna in en inlämningsuppgift gör det till sin lektionsledare. Om man inte har möjlighet att lämna över den personligen finns det postfack på våning 4 till alla utom Max. Dit kan man ta sig dygnet runt, t.ex. med hissen bredvid Jalla Jalla. Den som vill lämna in till Max kan lämna in till mig och skriva att den ska till Max.

Innehåll Följande delkapitel och kapitel ingår helt eller delvis i kursen: 10.1–10.7, 11.1, 11.3, 12, 13.1–13.3, 14, 15.4, 16.3. På nästa sida finns en förteckning över föreläsningarnas och lektionernas innehåll. Därefter följer mer detaljerad information om kursens innehåll och tips för att läsa boken och lösa problem. Det finns även extraproblem i denna kursinformation. Dessa markeras med bokstäver. Föreläsningarna innehåller mest teori men också en del problemräkning. Lektionerna innehåller uteslutande problem. Ett urval av de rekommenderade problemen kommer att räknas på lektionerna.

Föreläsning	Innehåll	Delkapitel i boken
1–2	Introduktion	10.1–10.5
3–4	Gränsvärden, kontinuitet, partiella derivator	12.1–12.3
5	Högre derivator, differentierbarhet	12.4, 12.6
6	Taylorutveckling	12.9
7	Kedjeregeln	12.5
8	Gradienter, riktningsderivator	12.7
9	Extremvärden, lokala extremvärden	13.1, 10.7
10	Extremvärden under bivillkor	13.2
11	Lagrangemultiplikatorer	13.3
12	Kurvor, båglängder	11.1, 11.3
13	Dubbelintegraler, itererad integration	14.1–14.2
14	Generaliserade integraler, polära koordinater	14.3–14.4, 12.8
15–16	Trippelintegraler	14.5–14.7, 10.6
17	Linjeintegraler av vektorfält	15.4
18	Greens formel	16.3
19–20	Reserv, repetition	

Lektion	Innehåll	Delkapitel i boken
1	Introduktion	10.1–10.5
2	Gränsvärden, kontinuitet, partiella derivator	12.1–12.3
3	Högre derivator, differentierbarhet, Taylorutveckling	12.4, 12.6, 12.9
4	Kedjeregeln, gradienter, riktningsderivator	12.5, 12.7
5	Extremvärden, lokala extremvärden	13.1, 10.7
6	Extremvärden med bivillkor, Lagrangemultiplikatorer	13.2–13.3
7	Kurvor, båglängder, reserv, repetition	11.1, 11.3
8	Dubbelintegraler	14.1–14.4, 12.8
9	Trippelintegraler	14.5–14.7, 10.6
10	Linjeintegraler av vektorfält, Greens formel	15.4, 16.3

Läsanvisningar, tips och övrig information

Lektion 1, föreläsning 1–2

- Delkapitel 10.1–10.5

Det mesta i delkapitlen 10.1–10.5 bör du känna igen från algebrakursen. Jag kommer därför inte att gå i genom detta i detalj utan satser och uttryck kan presenteras utan bevis på föreläsningarna. Det gäller att förstå mängden $\mathbb{R}^3$ och olika objekt i $\mathbb{R}^3$, t. ex. vektorer och plan.

10.1 Här gäller det att bilda sig en uppfattning om hur olika delmängder av $\mathbb{R}^3$ (t.ex. cylindrar eller plan) ser ut och vilka ekvationer eller olikheter de motsvarar. Dessutom ingår den viktiga avståndsformeln som helt enkelt är Pythagoras sats i ett koordinatsystem. Delkapitlet avslutas med en teoretisk del om öppna och slutna mängder som kan vara ny för dig.

Om man avlägsnar randen från en mängd kallas resten för det inre (interior på engelska).

Rekommenderade problem: 3, 5, 13, 15, 18–21, 23–27, 33–35, 39

10.2 handlar om vektorer. Jag kommer att beteckna vektorn från punkten P till Q som $\overrightarrow{PQ}$. Om $P = O$ kallas en sådan vektor Ortsvektor. I boken skrivs vektorer med fet stil, typ $\mathbf{v}$, men när jag skriver för hand blir det $\vec{v}$. Om en vektor har längd ett kallas den enhetsvektor. Jag kommer att skriva sådana vektorer som $\hat{\mathbf{v}}$. Av någon anledning skrivs inte standardbasvektorerna på detta sätt i boken men det kommer jag att göra. En vektor kan uttryckas i sina komponenter på åtminstone två sätt. $\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} = (a, b, c)$ är två sätt att skriva samma sak. Viktiga begrepp här är skalärprodukt, vektorers längd, vinkeln mellan två vektorer och ortogonalitet. Den hängande kabeln kan hoppas över.

Rekommenderade problem: 1a), 1b), 3a)–e), 3g), 9, 13

Lös även uppgifterna 10.1.6–7 med hjälp av vektorer.

10.3 Detta delkapitel handlar om kryssprodukten vilken vi kommer att använda för att konstruera en vektor som är ortogonal mot två vektorer. Trippelprodukten är mindre viktig men kan användas för att ta reda på om tre vektorer är linjärt beroende. Detta kan man utnyttja i vissa optimeringsproblem i delkapitel 13.3.

Rekommenderade problem: 3, 5, 17

10.4 handlar om plan och linjer. Plan och linjer kan skrivas på olika sätt. För plan är det vanligaste sättet normalform och för linjer parameterform. Punktnormalformen är ofta lättast att utgå ifrån när man bestämmer ett plans normalform. Formler för avstånd mellan punkt och plan, mellan punkt och linje och mellan två ickeparallella linjer är mindre viktigt. Dessa problem går nämligen att lösa med optimering som kommer senare i kursen. Värt att notera är dock att vill man ha avståndet mellan två parallella plan kan man ta en punkt i det ena planet och beräkna dess avstånd till det andra planet. Om en linje är parallell med ett plan eller en annan linje kan man ta en punkt på den linjen och beräkna dess avstånd till planet eller den andra linjen.

Rekommenderade problem: 2, 4, 5, 8, 9, 15–18

10.5 handlar om andragsytor. Det viktigaste namnen är sfärer, cylindrar och ellipsoider. Vad gäller paraboloider och hyperboloider är det viktigaste att bilda sig en uppfattning om hur figuren som motsvarar en ekvation ser ut snarare än att veta exakt vad den heter. Detta gör man enklast om man funderar på vilka värden på variablerna som är möjliga. Om t.ex. $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ t.ex. måste ju $z \geq 0$. Vill man ha en minnesregel för en- och tvåmantlad hyperboloid så kan man räkna minustecken i formlerna på sidan 595. Den enmantlade hyperboloidens ekvation har ett minustecken medan den tvåmantlade hyperboloidens ekvation har två.

Rekommenderade problem: 4, 8, 15, 16

Lektion 2, föreläsning 3–4

- Delkapitel 12.1–12.3

12.1 Här definieras ett antal begrepp:

- Funktioner av flera variabler, deras definitionsmängd D_f och deras värdemängd V_f .
- Mängden $G_f = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D_f\}$ kallas grafen till funktionen $f(x, y)$. Grafen är normalt en yta i $\mathbb{R}^3$ men kan även vara en kurva eller en punkt.
- Ett annat sätt att grafiskt beskriva en funktion är med mängden $L_C = \{(x, y) | f(x, y) = C\}$, där $C \in \mathbb{R}$. Denna mängd kallas en nivåkurva. Normalt är denna mängd en kurva i $\mathbb{R}^2$, men den kan även vara en punkt eller till och med tomma mängden, vilket inträffar om $C \notin V_f$.

Rekommenderade problem: 1, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 18–24, 27, 37–39

12.2 Här definieras gränsvärden i $\mathbb{R}^2$. Den stora skillnaden om man jämför med gränsvärden i $\mathbb{R}$ är att vi kan närma oss i en punkt i så många olika riktningar. Vi behöver inte ens närma oss en punkt längs en rät linje. Se exempel 4. För att räkna med alla riktningar på en gång

kan man använda polära koordinater
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Exempel 5 går att lösa på detta sätt.

Rekommenderade problem: 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13

12.3 Här definieras partiella derivator. Dessa kan beskrivas som en funktions lutning längs koordinataxlarna. Däremot sägs ingenting om övriga riktningar. Det är fullt möjligt att en funktion som har partiella derivator inte är kontinuerlig. Däremot måste ju en deriverbar funktion av en variabel vara kontinuerlig. Ibland kan dock en funktion av två variabler approximeras med ett tangentplan precis som en deriverbar funktion av en variabel kan approximeras med en rät linje. I detta delkapitel räknar vi ut tangentplan av funktioner, i delkapitel 12.6 undersöker vi när tangentplan existerar och i delkapitel 12.7 räknar vi ut tangentplan av ytor i allmänhet.

A Låt funktionen $f(x, y)$ vara definierad som

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{annars.} \end{cases}$$

Har funktionen partiella derivator? Är i så fall de partiella derivatorna kontinuerliga?

Rekommenderade problem: 5, 9, 11, 12, 13, 19, 23, 26, 28, 36

Lektion 3, föreläsning 5-6

- Delkapitel 12.4, 12.6, 12.9

12.4 Kan man derivera en gång partiellt är det inte svårt (bara kanske bökigare) att derivera flera gånger partiellt. De finns olika skrivsätt för partiella derivator. Vi har t.ex. $f_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Den partiella derivering som ligger närmast f är den som utförs först. Ofta spelar dock deriveringsordningen ingen roll. Se teorem 1.

Rekommenderade problem: 1, 9, 15, 17

12.6 I detta delkapitel definieras ett tillräckligt villkor för att en funktion ska kunna approximeras med ett tangentplan, nämligen differentierbarhet. Det är fullt möjligt att en kontinuerlig funktion som har partiella derivator överallt inte är differentierbar. De partiella derivatorna ger ju bara information om vad som händer i koordinataxlarnas riktningar, inte i andra riktningar. Om en funktions partiella derivator är kontinuerliga är funktionen emellertid differentierbar. Avsnittet om funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är mindre viktigt. Vi kommer främst att studera determinanter av jacobimatriser när vi beräknar dubbelintegraler senare i kursen. De avslutande avsnitten om differentialer i tillämpningar och differentialer och legendretransformationer ingår inte i kursen.

Rekommenderade problem: 1 och extraproblem C

B Visa att funktionen f som i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definieras som $f(x, y) = \frac{e^{x^2} - e^{-y^2}}{x^2 + y^2}$ kan utvidgas så att den blir differentierbar i $\mathbb{R}^2$.

C Låt funktionen $f(x, y)$ vara definierad som

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{annars.} \end{cases}$$

Undersök var funktionen är kontinuerlig, deriverbar (d.v.s. har partiella derivator) och differentierbar.

12.9 Det går alltid att få ut Taylorpolynomet av grad n genom att beräkna alla partiella derivator upp till ordning n och använda formeln på sida 736. I praktiken är det ibland enklare att stoppa in uttryck i kända Taylorutvecklingar från envariabelanalysen.

Rekommenderade problem: 3, 8, 11

Lektion 4, föreläsning 7–8

- Delkapitel 12.5, 12.7

12.5 Kedjeregeln kan upplevas som bökig men övning ger färdighet. Att derivera funktionen f en gång med kedjeregeln kanske inte är så svårt. När man deriverar andra gången bör man tänka på två saker. För det första förekommer produkter i uttrycket för förstaderivatorna så man måste ofta använda produktregeln. För det andra bör man ersätta f med någon partiell derivata och återanvända det sätt man deriverade på första gången. Om variablerna beror av varandra på ett komplicerat sätt kan det löna sig att rita figurer som till exempel figur 12.22. Ett viktigt exempel är exempel 10. Däremot är avsnittet om homogena funktioner inte så viktigt. En viktig tillämpning för kedjeregeln är förenkling av vissa partiella differentialekvationer. Se extraproblemen.

Rekommenderade problem: 5, 13, 17, extraproblem E

D Bestäm samtliga lösningar $f \in C^2$ till den partiella differentialekvationen

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

där $x > 0$ och $y > 0$ genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x. \end{cases}$$

Variablerna u och v får inte förekomma i svaret.

E Bestäm samtliga lösningar $f \in C^2$ till den partiella differentialekvationen

$$e^{2y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) - e^{2x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 8e^{3y+2x}$$

genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = e^x - e^y \\ v = e^x + e^y. \end{cases}$$

Variablerna u och v får inte förekomma i svaret.

12.7 De partiella derivatorna beskriver funktioners lutningar längs koordinataxlarna. När riktningarna är godtyckliga kallas lutningarna riktningsderivator. Om f är differentierbar kan den så kallade gradienten användas för att räkna ut riktningsderivatorna. Gradienten är då en vektor vars riktning är den riktning i vilken riktningsderivatan är maximal och vars längd är just denna maximala riktningsderivata. Den kan också användas för att bestämma normalvektorer till nivåkurvor och nivåytor och dyker dessutom upp i kapitel 13 och 15.

Rekommenderade problem: 1, 7, 13, 17, 19, 27, 37, extraproblem F

F Hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a$ tangerar ytan $z = 2x^2y$ i minst en punkt. Bestäm a .

G Den hyperboliska cylindern $xy = 1$ skär ytan $z = x^2 + y$ ortogonalt i en punkt. Vilken?

Lektion 5, föreläsning 9

- Delkapitel 13.1, 10.7

Här undersöks om och i så fall var en funktion har lokala minimipunkter och lokala maximipunkter. En funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ har en lokal minimipunkt (maximipunkt) $(a_1, \dots, a_n)$ om det finns en omgivning till punkten sådan att $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(a_1, \dots, a_n)$ ($f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n)$) för alla punkter $(x_1, \dots, x_n)$ som ligger i omgivningen och i definitionsmängden. Lokala minimipunkter och lokala maximipunkter kallas med ett gemensamt namn lokala extrempunkter. Funktionsvärdena där kallas lokala maximum (minimum) eller med ett gemensamt ord lokala extremvärden. Lokala extrempunkter kan endast finnas i punkter där gradienten är nollvektorn d.v.s. kritiska punkter, i punkter där gradienten inte existerar d.v.s. singulära punkter eller i punkter på randen av funktionens definitionsmängd. Det finns flera sätt att ta reda på om en kritisk punkt är en lokal maximipunkt, lokal minimipunkt

eller ingetdera d.v.s. en sadelpunkt. Man kan ibland använda matrisen hessianen. Under förutsättning att funktionens derivator upp till ordning 2 är kontinuerliga är hessianen symmetrisk. Om den dessutom är positivt (negativt) definit i den kritiska punkten är den kritiska punkten en minimipunkt (maximipunkt). Annars är den kritiska punkten en sadelpunkt under förutsättning att hessianen är inverterbar. För att fastställa matrisens "definithet" kan man beräkna egenvärdena (teorem 10.7.7) eller vissa deldeterminanter till matrisen (teorem 10.7.8). Att lära sig kommentaren överst på sida 748 utantill behövs därför egentligen inte. Om hessianen inte är positivt definit, negativt definit eller indefinit i en kritisk punkt måste funktionen undersökas direkt i en omgivning till den kritiska punkten. Se t.ex. problem 9. Om ett problem går ut på att hitta ett globalt minimum eller maximum, finn alla sådana punkter och räkna ut funktionsvärdet i dessa. Däremot vinner man inget på att bestämma karaktären av de kritiska punkterna. Istället måste man undersöka vad som händer när absolutbeloppet av en eller flera variabler växer obegränsat. Se problem 19 och extraproblemen.

Rekommenderade problem: 3, 4, 9, 12, 17, 19, extraproblemen

H Bestäm, om de existerar, största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = (x^2 + 2y^2 + 1)e^{-x^2 - y^2}$.

I Visa att funktionen $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ har en enda kritisk punkt och att denna kritiska punkt är en lokalt minimipunkt. Visa också att funktionen antar alla reella värden.

Lektion 6, föreläsning 10–11

- Delkapitel 13.2, 13.3

13.2 En kontinuerlig funktion antar alltid ett globalt extremvärde på en sluten och begränsad mängd. Detta kan bara ske i de punkter där funktionen har ett lokalt minimum eller maximum, d.v.s. i kritiska eller singulära punkter eller på randen. Om mängden är sluten, dela upp mängden i rand och det inre. I det inre söker man efter kritiska och singulära punkter. Randen ges ibland av ett enkelt samband mellan variablerna. Man kan då uttrycka någon eller några av variablerna i resterande variabler (exempel 2) eller uttrycka flera variabler i en eller flera parametrar (exempel 1) så att dimensionen på problemet reduceras. Det avslutande avsnittet om linjärprogrammering kan hoppas över.

Rekommenderade problem: 3, 5, 7, 9, 10, 11, 16

13.3 I föregående delkapitel utgick vi ifrån att randen till mängden vi optimerar funktionen f över ges av ett enkelt samband. Om vi inte kan eller vill utnyttja sambandet, säg $g = 0$, ska vi söka efter punkter där f eller g är singulära eller där ∇f och ∇g är linjärt beroende. Linjärt beroende kan man undersöka på flera sätt, t.ex. med determinanter. Under förutsättning att g saknar både kritiska och singulära punkter kan man använda så kallade Lagrangemultiplikatorer λ och optimera funktionen $L = f + \lambda g$ istället. Det går också bra att ha flera samband, säg $g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_m = 0$. Man ska då optimera $L = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$ eller alternativt undersöka var vektoruppsättningen $\nabla f, \nabla g_1, \dots, \nabla g_m$ är linjärt beroende med hjälp av determinanter. Det är ofta speciellt bra om antalet variabler är en mer än antalet samband och sambanden ges av likheter. Glöm inte heller att metoden i föregående

delkapitel ofta fungerar.

Rekommenderade problem: 5, 6, 11–14, 19, 22, 23

Lektion 7, föreläsning 12

- Delkapitel 11.1, 11.3

11.1 I delkapitel 10.4 beskrevs linjer. Här beskrivs kurvor. En partikel som rör sig längs en kurva har ett visst momentant läge och en viss momentan hastighetsvektor. Absolutbeloppet av den sistnämnda vektorn kallas fart. Ett annat viktigt begrepp är acceleration. Räkneregler i teorem 1 känns rätt naturliga.

Rekommenderade problem: 7, 11, 17, 19 och extraproblemet

J Visa att kurvorna $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 0 \\ z = \pi/2 - t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = e^s - 1 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$ skär varandra och bestäm vinkeln mellan dem där.

11.3 Precis som linjer kan kurvor parametreras på en massa olika sätt. Kurvors längd kallas båglängd och är integralen av farten. Den parametrering som i viss mån kan sägas vara den naturligaste får man fram genom båglängdsberäkningar.

Rekommenderade problem: 5, 7, 9, 15, 20, 24

På denna lektion kan det även finnas tid för frågor på hela kursen hittills eller tid att börja räkna på dubbelintegraler.

Lektion 8, föreläsning 13–14

- Delkapitel 14.1–14.4, 12.8

14.1 På samma sätt som arean mellan en positiv funktion och x -axeln ges av en integral i envariabelanalys, ges volymen mellan en positiv funktion av x och y och xy -planet av en dubbelintegral. Är funktionen $f = 1$ ges denna integral av arean av integrationsområdet. I de rekommenderade problemen gäller det att utnyttja symmetrier och formler för volymer av koner och klot.

Rekommenderade problem: 14–17

14.2 I detta delkapitel definieras x -enkla och y -enkla områden. Många områden är båda x -enkla, y -enkla och begränsade. Då kan vi bestämma integralen av kontinuerlig funktion genom att först integrera över x och sedan y eller tvärtom. Den integral som utförs först kallas den inre och den andra den yttre. Den yttersta integralen har alltid konstanta integrationsgränser medan den inre får ha integrationsgränser som beror på den yttre variabeln. Ibland är det enklare att börja att integrera över en viss variabel. Se exempel 3.

Rekommenderade problem: 3, 11, 13, 15, 17, 21

14.3 Likasom i envariabelfallet finns det två typer av generaliserade integraler. Integrationsområdet kan vara obegränsat eller funktionen kan vara obegränsad på området. För att kunna utföra en generaliserad integration måste man förvissa sig om att integranden aldrig är negativ (alternativt aldrig är positiv). Annars kan konstiga saker inträffa. Se problem 21. I delkapitlets slut definieras medelvärdet av en integrerbar funktion.

Rekommenderade problem: 4, 5, 9, 26, 27

14.4, 12.8 Om vissa uttryck förekommer flera gånger i integralen eller integrationsgränserna kan det ofta löna sig att göra ett variabelbyte. Man beskriver då integrationsområdet i ett plan med två nya variabler u och v istället för x och y . I bästa fall blir området en rektangel. Även om området blir mer komplicerat kan det löna sig om integranden blir enklare. De viktigaste variabelbytena är linjära variabelbyten samt byte till polära koordinater. Polära koordinater lönar sig ofta om integranden eller integrationsgränserna har cirkelsymmetri, d.v.s. bara beror av $x^2 + y^2$. Råta linjer och cirklar kan man också ofta bemästra. Linjära variabelbyten och variabelbyte till polära koordinater kan också kombineras. Se extraproblem M. I det nya uttrycket för areaelementet dA ingår förutom $dudv$ absolutbeloppet av en jacobian. Se sidan 730 i delkapitel 12.8. Om x och y uttrycks i u och v ska $dudv$ multipliceras med med absolutbeloppet av jacobianen. Om istället u och v uttrycks i x och y ska $dudv$ divideras med absolutbeloppet av jacobianen. Observera att varje punkt i det inre av det ursprungliga området måste motsvaras av en punkt i det inre av det nya området och tvärtom. Annars kan det inträffa att man integrerar flera gånger över någon del av området. Se exempel 11.

Rekommenderade problem: 11, 12, 23, 27, 33, 36, extraproblem L, M och N

K Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_T \frac{dA}{x(x^2 + y^2)},$$

där T är det obegränsade område som ligger under $y = x$ och över $y = 1$.

L Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_S \frac{x^2 dA}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

där S är området som ligger innanför cirkeln med radie 1 och medelpunkt i $(0,1)$.

M Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_S \frac{2xy dA}{2x^2 + y^2},$$

där S är den del av första kvadranten som ligger innanför ellipsen $2x^2 + y^2 = 1$.

N Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_\Omega \frac{(x^2 + y^2) dA}{4 + x^4 - 2x^2 y^2 + y^4},$$

där Ω är det obegränsade område som ligger under $y = x$ och $y = 1/x$ och över x -axeln.

Ledning: Gör variabelbytet $\begin{cases} u = (x^2 - y^2)/2 \\ v = xy. \end{cases}$

O Beräkna den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_P \frac{(3x+2y)dA}{\sqrt{1-((x+y)/2)^2}},$$

där P är parallelogrammen med hörn i $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(1, 1)$ och $(-1, 3)$.

P Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} \arctan(y/x)dA,$$

där Ω är området $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x/\sqrt{3} \leq y \leq x\}$.

Lektion 9, föreläsning 15–16

- Delkapitel 14.5–14.7, 10.6

14.5 Trippelintegraler är en rätt naturlig utvidgning av dubbelintegraler. I stället för att integrera över ett område i $\mathbb{R}^2$ integrerar man över ett område i $\mathbb{R}^3$. Om man integrerar funktionen $f = 1$ får man volymen av området på samma sätt som man får arean av ett område i $\mathbb{R}^2$ om man integrerar funktionen $f = 1$ över området. Liksom för dubbelintegraler gäller det att hitta eventuella symmetrier. Observera också att integrationsgränserna för den yttersta integrationen är konstanter, integrationsgränserna för den mellersta integrationen kan bero på den yttersta variabeln medan integrationsgränserna för den innersta integrationen kan bero på de två yttersta variablerna. En del väljer att rita upp området för att se gränserna (exempel 5) medan andra föredrar att bara analysera olikheter (exempel 6). Tänk slutligen på att det ibland blir enklare att integrera i en viss ordning. Se exempel 28.

Rekommenderade problem: 3, 7, 9, 11, 23, 28

14.6, 10.6 Liksom för dubbelintegraler lönar det sig ofta att göra ett variabelbyte när man beräknar trippelintegraler. De viktigaste variabelbytena är till cylinderkoordinater och till sfäriska koordinater. Cylinderkoordinater kan ses som polära koordinater med tillägg av z . Det säger sig själv att ett variabelbyte till sfäriska koordinater kan vara bra om det finns cylindersymmetri, d.v.s. om integrationsgränserna, integranden eller ännu bättre båda bara beror av $x^2 + y^2$ eller z . Sfäriska koordinater är förstås ideala på att beskriva sfärer. Variabeln ρ är sfärens radie, variabeln ϕ beskriver "latituden" och variabeln θ beskriver "longituden". Om vi beskriver jordens yta med ϕ och θ så motsvarar nordpolen $\phi = 0$. När vi rör oss rakt söderut ökar ϕ så den blir $\pi/2$ på ekvatorn och π på sydpolen. Under förutsättning att vi inte står på nord- eller sydpolen kan vi även röra oss rakt österut eller västerut. Då ändras bara θ . Ett varv runt jorden motsvaras förstås av en ändring med 2π . Om integrationsgränserna, integranden eller ännu bättre båda bara beror av $x^2 + y^2 + z^2$ kan det löna sig att byta till sfäriska koordinater. Det är av yttersta vikt att lära sig vilka ytor och kurvor som uppstår om vi sätter en eller två av variablerna konstanta för cylindriska och sfäriska koordinater. Gå gärna till delkapitel 10.6 för att träna mer. Ännu viktigare är att känna till formlerna för volymelementen för cylindriska och sfäriska koordinater d.v.s. $dV = r dr d\theta dz$ respektive $dV = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$, så att man inte slösar värdefull tentatid på att räkna ut jacobianer.

Rekommenderade problem: 2, 3, 7, 9, 13, 18, extraproblemen

Q Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_{\Omega} z e^{x^2+y^2} dV,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

R Beräkna volymen av det ändliga område som begränsas av paraboloiden $z = 4x^2 + y^2$ och planet $z - 6y + 5 = 0$.

14.7 I detta delkapitel ingår bara avsnittet om moment och masscentrum. Masscentrum kan sägas vara medelvärde av en kropps läge viktat med densiteten. Om densiteten är konstant blir masscentret oberoende av densiteten och kallas då på engelska för centroid. Jag kommer beteckna dessa storheter som $\vec{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$ respektive $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ i handskrift. Var observant på symmetrier i problem.

Rekommenderade problem: 18–21

Lektion 10, föreläsning 17–18

- Delkapitel 15.4, 16.3

15.4 Här stöter vi på ett nytt begrepp, nämligen vektorfält. Ett vektorfält är helt enkelt en vektor vars komponenter är funktioner av flera variabler. I denna kurs ingår bara plana vektorfält, d.v.s. vektorfält som bara beror av x och y och vars riktningar ligger i xy -planet. Du har säkert hört uttrycket att arbete=kraft $\times$ väg. I själva verket är arbetet linjeintegralen av kraften. Man kan tänka sig att man delar upp vägen i små, små bitar. Sedan tar man skalärprodukten av kraften och vägbitarna och summerar för att beräkna linjeintegralen. Det innebär att bara den del av kraften som är parallell med vägen bidrar till arbetet. Ibland är linjeintegralen när vi går från en punkt P till en punkt Q oberoende av vägen. Det inträffar precis då det vektorfält (t.ex. kraft) som vi integrerar över är en gradient. Sådana vektorfält kallas konservativa. Om vi lyckas hitta en funktion Φ vars gradient just är vektorfältet kan vi mycket enkelt bestämma integralen genom att subtrahera funktionens värde i startpunkten från funktionens värde i slutpunkten. Om vektorfältet inte är konservativt kan det löna sig att dela upp det i en del som är konservativ och en del som inte är konservativ men förhoppningsvis någorlunda enkel. Se exempel 4. Om en väg startar och slutar i samma punkt markeras det ofta med en ring på integraltecknet. Det följer att linjeintegralen över ett konservativt fält då är 0. Funktionens värde är ju detsamma i start- och slutpunkten eftersom det är samma punkt!

Rekommenderade problem: 1, 2, 8, 16, 19

S Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \frac{2xy^3 + x^3}{1 + x^4} dx + \left(\frac{1}{(1 + x^4)^2} + 3y^2 \arctan(x^2) \right) dy,$$

där C är kurvan $y = x^4$ från $(-1, 1)$ till $(0, 0)$.

16.3 Det avslutande delkapitlet beskriver Greens formel. Den omvandlar en linjeintegral till en dubbelintegral. Se problem 1–4 och 7 och observera symmetrin i 7. Man kan också gå åt andra hållet och förvandla en dubbelintegral till en linjeintegral. Se problem 5. Divergensteoremet i planet ingår inte i kursen.

Rekommenderade problem: 1–5, 7, 15.4.8 med Greens formel

Svar till extraproblem

A Båda partiella derivatorna existerar men ingen av dem är kontinuerlig.

B $f(0, 0) = 1$.

C Funktionen är kontinuerlig och deriverbar i $\mathbb{R}^2$ och differentierbar i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

D $f = -\ln(xy)/4 + xyG(y/x) + H(y/x)$, där $G, H \in C^2$.

E $f = -4e^{3y}/3 + G(e^x - e^y) + H(e^x + e^y)$, där $G, H \in C^2$.

F $a = 1/2$.

G $(-2, -1/2, 7/2)$.

H Största värdet är $2/\sqrt{e}$. Det finns inget minsta värde.

I –

J $2\pi/3$.

K $\ln(2)/2$.

L $4/3$.

M $1/4$.

N $\pi/8$.

O $8\pi/3 + 4\sqrt{3}$.

P $5\pi^2/72$.

Q $\pi(e^2 - 1)$.

R 4π v.e.

S $-\pi/4 - \ln(2)/4 - 1/2$.