UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars Lindqvist

ÖVNINGAR 1
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-09-05

Övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

Följande uppgifter berör i huvudsak det material som behandlas i Kapitel 1, 2, 3 och 4 i kompendiet ”Konstruktiv logik”.

1. Låt $S \subseteq \{0,1\}^*$ vara en oändlig mängd av strängar sådana att om $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in S$, så tillhör varje initialsegment $a_1 a_2 \cdots a_k$ av u $(0 \leq k < n)$ också S. Visa att det finns en oändlig 0-1-följd $b_1 b_2 b_3 \cdots$ sådan att alla dess ändliga initialsegment tillhör S.

2. Konstruera en typad lambdaterm $add2$ med typen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som adderar 2 till varje naturligt tal. Visa att $\mathsf{apply}(add2, \mathsf{S}(0)) = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(0)))$.

3. Konstruera en typad lambdaterm add med typen $\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ som implementerar addition. Visa att $\mathsf{apply}(\mathsf{apply}(add, \mathsf{S}(0)), \mathsf{S}(0)) = \mathsf{S}(\mathsf{S}(0))$.

   Tips: Betrakta typen på add, dvs. add kan betraktas som en funktion som givet ett tal n returnerar en funktion som givet ett tal m adderar n till m. Dvs. här krävs program av högre ordning.

4. För varje formel nedan utför följande 2 moment:

   - Bevisa formeln m.h.a. reglerna för intuitionistisk logik.
   - Konstruera ett certifikat för formeln genom att använda typad lambdakalkyl.

   (a) $A \to A$
   (b) $A \wedge B \to B \wedge A$
   (c) $A \vee B \to B \vee A$
   (d) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
   (e) $(A \to \neg A) \to \neg A$
   (f) $A \to \neg\neg A$

5. I intuitionistisk logik är $\neg A$ definierat som $A \to \bot$. I uppgift 4(f) har vi sett att $A \to \neg\neg A$ har en BHK- tolkning. Vad vore en BHK-tolkning för $\neg\neg A \to A$?

6. Har $\bot \to A$ ett certifikat? Motivera. Här krävs ett formellt svar utifån definitionen på certifikat, funktion mm.

———