UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

ÖVNINGAR 4
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-09-26

Övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

Uppgifter markerade (B) ger *bonuspoäng* som kan tillgodoräknas vid den skriftliga tentamen. Bonusmarkerade uppgifter löses och presenteras vid nästföljande lektion (se schema). Det är tillåtet att arbeta i grupper om två (varje medlem skall dock vara beredd att presentera lösningen). Presentationen tillgår så att alla som vill ha bonuspoäng lämnar in skrivna lösningar och markerar noggrant vilka de anser sig ha löst. För varje uppgift väljer läraren ut en person att presentera och diskutera lösningen vid tavlan.

1. (B) Avgör vilka av följande formler som är bevisbara intuitionistisk satslogik. Ge ett bevis i naturlig deduktion eller en Kripke-modell som bevisar att de är obevisbara. (Symbolerna $\to$ och $\neg$ i Kap. 4 betecknas här $\supset$ och $\sim$.)

   (a) $(((P \supset Q) \supset Q) \supset Q) \supset (P \supset Q)$

   (b) $(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$

   (c) $\sim\sim P \supset (P \vee \sim P)$

2. (B) Betrakta en modallogisk modell $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \leq, \{V_t\}_{t \in \mathbb{N}})$ där H_t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ är satslogiska variabler med
$$V_t(H_s) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \geq s, \\ 0 & \text{om } t < s. \end{cases}$$
Låt P vara en satslogisk variabler Uttryck följande med modallogiska formler som använder fixt antal H-variabler (vars antal är oberoende av m och n).

   (a) P gäller vid alla tidpunkter i intervallet $[m, n] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$. (Dvs finn en formel A som innehåller P så att $\mathcal{M} \models A$ omm för alla $t \in [m, n]$: $V_t(P) = 1$.)

   (b) P gäller vid någon tidpunkt i intervallet $[m, n]$.

3. (B) Definiera för varje $k \in \mathbb{N}$ en relation R_k på $\mathbb{N}$ sådan att dess motsvarande operator $\Box_k$ i en modallogisk modell $(\mathbb{N}, \{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{V_t\}_{t \in \mathbb{N}})$ uppför sig så här
$$V_t(\Box_k A) = 1 \iff V_t(A) = V_{t+1}(A) = \cdots = V_{t+k}(A) = 1.$$
Vad är den intuitiva tolkningen av denna operator? Hur fungerar $\Diamond_k$? Försök ge några allmäna lagar för dessa modaloperatorer och exempel på vad de kan uttrycka.

4. Låt $\mathcal{M} = (W, R, \{V_t\}_{t \in W})$ vara en modallogisk modell. Låt P vara en satslogisk variabel.

   (a) Visa att om $\mathcal{M} \models \Box P \to P$, för alla val av värderingarna V_t, så måste R vara reflexiv.

(b) Visa att om $\mathcal{M} \models \Box P \to \Box\Box P$, för alla val av värderingarna V_t, så måste R vara transitiv.

5. (B deluppgift (b)) Antag att $\mathcal{M} = (W, R, \{V_t\}_{t \in W})$ är en modallogisk modell. Låt A vara en godtycklig modallogisk formel.

   (a) Visa att om R är reflexiv, så gäller $\mathcal{M} \models \Box A \to A$.

   (b) (B) Visa att om R är transitiv, så gäller $\mathcal{M} \models \Box A \to \Box\Box A$.

   (c) Visa att om R är symmetrisk, så gäller $\mathcal{M} \models \Diamond\Box A \to A$.

   (d) Visa att om R är en ekvivalensrelation, så uppfyller $\Box$ introspektionsaxiomen i $\mathcal{M}$.

   (e) Visa att om R är en linjär ordning, så gäller $\mathcal{M} \models \Diamond\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$

6. (B) Låt $\mathcal{M}$ vara en modallogisk modell där nåbarhetsrelationen är en linjär ordning. Låt $u \in \{\Box, \Diamond\}^*$ beteckna en godtycklig sträng av modaloperatorer. Om A är en modallogisk formel, så är $u\,A$ en modallogisk formel. Visa genom att använda uppgift 5 att $u\,A$ är ekvivalent med någon av följande formler

$$A \qquad \Box A \qquad \Diamond A \qquad \Box\Diamond A \qquad \Diamond\Box A.$$
