UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

ÖVNINGAR 5
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-10-02

Övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

Uppgifter markerade (B) ger *bonuspoäng* som kan tillgodoräknas vid den skriftliga tentamen. Bonusmarkerade uppgifter löses och presenteras vid nästföljande lektion (se schema). (Se även information på övningsblad 5.)

1. (B deluppgift (a)) En *kvasiordning* (eller *preordning*) är en reflexiv och transitiv relation. Låt $(A, \sqsubseteq)$ vara en kvasiordning. En (uppräkneligt) oändlig följd (a_n) i A sägs vara *bra* om det finns $i < j < \omega$ med $a_i \sqsubseteq a_j$; i annat fall sägs den vara *kass*. En kvasiordning $(A, \sqsubseteq)$ kallas för *välkvasiordning* (wqo) om varje oändlig följd i A är bra. (En partiell ordning som är en wqo, är uppenbarligen välgrundad. Mängden av ändliga delmängder av $\mathbb{N}$ ordnad med strikt inklusion är välgrundad, men ej välkvasiordnad.) Låt A^* vara mängden av ändliga strängar av element i A (ε betecknar tomma strängen). Definiera en relation $\sqsubseteq^*$ på A^*: $\varepsilon \sqsubseteq^* w$ för alla $w \in A^*$. Vidare, för $u = a_1 \cdots a_m$, $v = b_1 \cdots b_n$ med $1 \leq m \leq n$ låter vi $u \sqsubseteq^* v$ omm det finns $j_1 < \cdots < j_m$ sådana att $a_i \sqsubseteq b_{j_i}$, för varje $i = 1, \ldots, m$. Uppgiften går ut på att visa att $(A^*, \sqsubseteq^*)$ *är en wqo närhelst* $(A, \sqsubseteq)$ *är det.* Vi låter $(A, \sqsubseteq)$ vara en godtycklig wqo, och antar att $(A^*, \sqsubseteq^*)$ inte är en wqo. Bevisa följande påståenden, som leder till en motsägelse.

   (a) (B) $(A^*, \sqsubseteq^*)$ är en kvasiordning. Ge några exempel på relationer och icke-relationer när $(A, \sqsubseteq) = (\mathbb{N}, \leq)$ och när $(A, \sqsubseteq) = (\mathbb{N}^*, \leq^*)$.

   (b)* Det finns en oändlig följd $(t_k)_k$ i A^* sådan att för varje $n \geq 0$ är t_n en sträng av minimal längd sådan att $t_0, t_1, \ldots, t_n$ är de första $n + 1$ termerna i en kass följd. Vi kallar en sådan följd $(t_k)_k$ för en *minimal kass följd*.

   (c)** Varje oändlig följd $(a_k)_k$ i A innehåller en oändlig delföljd $(a_{f(n)})_n$ sådan att $a_{f(n)} \sqsubseteq a_{f(n+1)}$ för alla n.

   (d)** Låt $(t_k)_k$ vara en minimal kass oändlig följd i A^*, och skriv $t_k = a_k s_k$, där $a_k \in A$ och $s_k \in A^*$. Då är $(s_{f(k)})_k$ en bra följd, om f är som i (c).

   (e) (t_k) är en bra följd.

2. (B) Bestäm mest generell unifierare av $f(h(z, y), y)$ och $f(h(x, g(u)), g(x))$ med hjälp Martelli-Montanaris algoritm.

3. (B) Följande termomskrivningssystem R konstaterades vara konfluent i Klop ss. 46 – 48. Signaturen är $\Sigma = \{e, I, \cdot\}$.

$$\begin{aligned} e \cdot x &\to x \\ I(x) \cdot x &\to e \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &\rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\
I(x) \cdot (x \cdot z) &\rightarrow z \\
y \cdot e &\rightarrow y \\
I(I(y)) &\rightarrow y \\
I(e) &\rightarrow e \\
y \cdot I(y) &\rightarrow e \\
y \cdot (I(y) \cdot x) &\rightarrow x \\
I(x \cdot y) &\rightarrow I(y) \cdot I(x)
\end{aligned}
$$

Bevisa att R är starkt normaliserande genom att använda den *lexikografiska vägordningen* $\Rrightarrow$ (se Klop, s. 34). Ersätt funktionssymbolerna i Σ med olika tal och visa att till varje regel $s \rightarrow t$ svarar en reduktion $s \Rrightarrow^+ t$.

4. (B) Givet att R i Övning 3 är ett fullständigt termomskrivningssystem för den ekvationella teorin E för grupper. Använd termomskrivningssystemet för att avgöra vilka av följande ekvationer som är bevisbara i E. x, y, z är distinkta variabler.

   (a) $x \cdot y = y \cdot x$
   (b) $I(x \cdot y) \cdot x = x \cdot I(y \cdot x)$
   (c) $(I(x) \cdot y) \cdot (I(x) \cdot y) = I(x \cdot x) \cdot (y \cdot y)$
   (d) $I(x \cdot (I(y \cdot z) \cdot I((x \cdot y) \cdot z))) = (y \cdot (I(x) \cdot z)) \cdot (x \cdot (y \cdot z))$

5. (B) Beskriv normalformerna i $\mathrm{Ter}(\Sigma)$ med avseende på termomskrivningssystemet R i Övning 3.

6. (B) Betrakta följande termomskrivningssystem R över $\Sigma = \{0, S, A, M\}$:

$$
\begin{aligned}
A(x, 0) &\rightarrow x \\
A(x, S(y)) &\rightarrow S(A(x, y)) \\
M(x, 0) &\rightarrow 0 \\
M(x, S(y)) &\rightarrow A(M(x, y), x).
\end{aligned}
$$

   Visa att R är ett fullständigt termomskrivningssystem.

7. (B) Diskutera hur scheman för primitiv rekursion över datastrukturer (naturliga tal, träd) kan formuleras så att systemet kan visas vara fullständigt med de metoder som presenterats i kapitel 2 av Klop. Finns det något enkelt kriterium på argument i en primitivt rekursivt definierad funktion som garanterar fullständighet? Exempel på en funktion f som definieras med primitiv rekursion över träd

$$
\begin{aligned}
f(\mathsf{leaf}, z) &\rightarrow g(z) \\
f(\mathsf{node}(x, y), z) &\rightarrow h(x, y, z, f(x, z), f(y, z)).
\end{aligned}
$$
