UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

Svar och ledningar till ÖVNINGAR 5
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-10-10

Svar och ledningar

1. (a) $(A^*, \sqsubseteq^*)$ är reflexiv: $a_1 a_2 \cdots a_n \sqsubseteq^* a_1 a_2 \cdots a_n$, ty $a_i \sqsubseteq a_i$ ($\sqsubseteq$ är reflexiv på A).

   $(A^*, \sqsubseteq^*)$ är transitiv: Antag $u = a_1 a_2 \cdots a_k \sqsubseteq^* b_1 b_2 \cdots b_m$ och $b_1 b_2 \cdots b_m \sqsubseteq^* c_1 c_2 \cdots c_n = w$. Därmed finns strängt växande funktioner $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ och $g : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ sådana att $a_i \sqsubseteq b_{f(i)}$ för alla $i = 1, \ldots, k$ och $b_j \sqsubseteq c_{g(j)}$ för alla $j = 1, \ldots, m$. Alltså är sammansättningen $g \circ f$ strängt växande och $a_i \sqsubseteq c_{g(f(i))}$ för alla $i = 1, \ldots, k$ (eftersom $\sqsubseteq$ är transitiv). Detta visar att $u \sqsubseteq^* w$.

   Vi skriver strängar med komma emellan tecknen. Exempel för $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq^*)$: $0, 1, 2, 3 \sqsubseteq 8, 0, 1, 7, 2, 6, 5, 3, 4$ (observera att det finns flera sätt som den första strängen kan "inbäddas" i den andra). $0, 1, 2, 3 \not\sqsubseteq^* 3, 2, 1, 0$ (3 måste gå till 3, vilket inte lämnar utrymme för $0, 1, 2$). Exempel för $(\mathbb{N}^{**}, \sqsubseteq^{**})$: $\varepsilon, (0, 1) \sqsubseteq^{**} (0), (2, 1)$ och $\varepsilon, (0, 1) \not\sqsubseteq^{**} (5, 5)$.

2. Martelli-Montanaris algoritm:

$$\begin{array}{rcl}
\{f(h(z,y),y), f(h(x,g(u)),g(x))\} & \to & \{h(z,y) = h(x,g(u)), y = g(x)\} \\
& \to_{\{y:=g(x)\}} & \{h(z,g(x)) = h(x,g(u))\} \\
& \to & \{z = x, g(x) = g(u)\} \\
& \to_{\{z:=x\}} & \{g(x) = g(u)\} \\
& \to & \{x = u\} \\
& \to_{\{x:=u\}} & \emptyset.
\end{array}$$

   Mgu:n blir $\sigma = \{y := g(x)\}\{z := x\}\{x := u\} = \{y := g(u), z := u, x := u\}$.

3. Operatorn I går inåt vid reduktion så det är lämpligt att ge den ett högre värde än de övriga. Vi kan tilldela $I > \cdot > e$ (t.ex. $2 > 1 > 0$). Den andra regeln använder *copy* med 0 kopior. Den tredje regeln verifieras mha regeln *simplify left argument* , *select*, *push*. Den tionde regeln verifieras mha *copy*, *select* och *push*. Övriga regler använde kombinationer av *push* och *select*.

4. (a) Obevisbar. Båda leden är på normalform och syntaktiskt olika.
   (b) Bevisbar. Båda leden har normalformen $I(y)$.
   (c) Obevisbar. Leden har de distinkta normalformerna $I(x) \cdot (y \cdot (I(x) \cdot y))$ och $I(x) \cdot (I(x) \cdot (y \cdot y))$.
   (d) Obevisbar. Leden har distinkta normalformer.

5. Man kan först notera att I aldrig kan förekomma direkt utanför I, $\cdot$ eller e i en normalform. Vidare kan multiplikation aldrig förekomma som $x \cdot (y \cdot z)$. Normalformer måste därför se ut som

$$t_1 \cdot (t_2 \cdot (t_3 \cdots (t_{n-1} \cdot t_n) \cdots)),$$

där $n \geq 1$ och t_i:na ej innehåller $\cdot$. Därmed måste varje t_i vara e, en variabel eller en invers av en variabel. För $n \geq 2$ är det klart att inget t_i kan vara e. Vidare gäller i detta fall att t_i ej är invers till t_{i+1} eller omvänt.

6. Systemet R saknar kritiska par varför det trivialt är WCR. För att bevisa stark normalisering duger det att använda rekursiv vägordning med $M > A > S > 0$. Av Newmans lemma följer det nu att R är fullständigt.

7. Det räcker att använda rekursiv vägordning med $f > g$ och $f > h$. För andra typer av primitiv rekursion tilldelas också den rekursivt definierade funktionen högst värde medan hjälpfunktionerna får lägre värde.