UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

ÖVNINGAR 6
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-10-05

Övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

Uppgifter markerade (B) ger *bonuspoäng* som kan tillgodoräknas vid den skriftliga tentamen. Bonusmarkerade uppgifter löses och presenteras vid lektionen den 12 oktober. (Fler uppgifter för denna lektion kommer att delas ut den 9 oktober.)

1. (B) Använd metoden från fullständighetssatsens bevis (se Sigstams kompendium) för att bevisa eller falsifiera följande sekventer. P, Q är unära predikatsymboler, R är en treställig predikatsymbol.
   (a) $\forall x\,(P(x) \supset Q(x)) \longrightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$.
   (b) $\forall x \exists y \forall z\, R(x, y, z) \longrightarrow \exists x \exists y \exists z\, R(x, y, z)$.
2. (B) Argumentera för att om $\varphi \longrightarrow \psi$ är en valid sekvent vars båda led endast innehåller de logiska operatorerna $\forall, \exists, \wedge$, så har sekventen ett bevis i sekventkalkylen som bara använder reglerna för dessa operatorer och logiska axiom av formen $C, \Gamma \longrightarrow \Delta, C$. Betrakta nu en godtycklig sekvent $\varphi \longrightarrow \psi$. Diskutera om det finns några begränsningar på formen av φ, ψ som garanterar att sökprocessen i beviset för fullständighetssatsen avstannar efter ändligt många steg, med bevis eller motmodell som resultat.
3. (B) Låt P vara en binär predikatsymbol. Låt φ vara formeln
$$\forall x\, \neg P(x, x) \wedge \forall xyz\,(P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)) \wedge \forall x\, \exists y\, P(x, y).$$
   Visa att φ bara har oändliga modeller.
4. (a) Låt Γ vara en mängd av första ordningens formler — en teori. Visa att om Γ bara har ändliga modeller, så finns ett tal n så att varje sådan modell har högst n element. (Ledning: kompakthetssatsen.)
   (b) Dra slutsatsen att det inte finns någon första ordningens teori Γ vars modeller utgörs precis av de ändliga partiella ordningarna.
5. (B) En graf är en icke-tom mängd med en reflexiv och symmetrisk relation. Grafen är *sammanhängande* om varje par av noder kan förbindas med en ändlig följd av bågar. Låt L vara språket som består av den binära relationen R. Finns det någon sluten L-formel φ så att för alla L-strukturer $\mathcal{A}$ gäller
$$\mathcal{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ är en sammanhängande graf ?}$$

———