UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

Svar och ledningar till ÖVNINGAR 6
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-10-12

Svar och ledningar

1. (a) Mekanisk tillämpning av sökproceduren nedifrån ($\forall \to$), ($\to \exists$), ($\supset\to$), tag vänster gren, ($\to \wedge$) leder till sekventen
$$\forall x(P(x) \supset Q(x)) \longrightarrow P(x_0), \exists x(P(x) \wedge Q(x)),$$
givet att startlistan av termer (variabler) var $x_0|x_1x_2\cdots$. Denna väg är terminerad, men inte stängd. Modellen som visar att sekventen är falsifierbar är $\mathcal{A}$ där $A = \{0\}$, $P^{\mathcal{A}}(0)$ och $Q^{\mathcal{A}}(0)$ är falska.
   (b) Sekventen är bevisbar. Sökning utgående från startlistan $x_0|x_1x_2\cdots$ ger så småningom en atomär formel $R(x_0, x_1, x_0)$ som förekommer på båda sidor i sekventen på toppen. Vägen är alltså både stängd och terminerad.

2. Om sökningen utgår från sekventen $\varphi \longrightarrow \psi$, så är det klart att alla formler som uppstår i processen är delformler av φ eller ψ. Reglerna som kan tillämpas på dessa är endast reglerna för $\forall, \exists, \wedge$. Sökprocessen kan avstanna när formlerna i sekventen ej innehåller funktionssymboler, och när $\exists$, $\forall$ "tar slut" till vänster respektive höger. För ett konkret exempel, se övning 7.2.

3. Antag att $\mathcal{A}$ är en ändlig modell för φ. För varje $a \in A$ finns $b \in A$ så att $P^{\mathcal{A}}(a, b)$ Eftersom modellen är ändlig finns därmed en följd element så att
$$P^{\mathcal{A}}(a_1, a_2), P^{\mathcal{A}}(a_2, a_3), \ldots, P^{\mathcal{A}}(a_{n-1}, a_n), P^{\mathcal{A}}(a_n, a_1).$$
Eftersom $P^{\mathcal{A}}$ är transitiv, så följer $P^{\mathcal{A}}(a_1, a_1)$. Men detta motsäger att $P^{\mathcal{A}}$ är irreflexiv. Alltså kan $\mathcal{A}$ ej vara ändlig.

4. (a) Detta är blott en kontrapositiv form av kompakthetssatsen.
   (b) Följer direkt från (a).

5. $L = \{R\}$. Antag att φ är en sluten L-formel så att för alla L-strukturer $\mathcal{A}$ gäller
$$\mathcal{A} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ är en sammanhängande graf.}$$
Utvidga L med två konstanter a, b. Formeln
$$\psi_n = \neg\exists u_1 \cdots \exists u_{n-1} R(a, u_1) \wedge R(u_1, u_2) \wedge R(u_2, u_3) \wedge \cdots \wedge R(u_{n-1}, b)$$
säger att det inte finns någon väg från a till b av längd n eller kortare (R antas vara reflexiv). Låt $\Gamma = \{\varphi\} \cup \{\psi_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Låt $\Delta_m \subseteq \{\varphi\} \cup \{\psi_n : n = 1, 2, \ldots, m\}$. En modell för Δ_m är $\mathcal{A}$ med $A = \{1, 2, \ldots, m+2\}$, $a^{\mathcal{A}} = 1$, $b^{\mathcal{A}} = m+2$ och $R^{\mathcal{A}}(i, j) \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$. Därmed har varje ändlig delmängd av Γ en modell, så enligt kompakthetssatsen har Γ själv en modell $\mathcal{B}$. Eftersom $\varphi \in \Gamma$, så är $\mathcal{B}$ en sammanhängande graf. Därmed finns en väg från a till b av längd k (säg). Men detta motsäger att $\mathcal{B}$ är en modell för ψ_k.