UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

ÖVNINGAR 8
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-10-13

Övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

1. *Från modallogiska problem till satslogiska problem.* Låt $\mathcal{M} = (W, R, \{V_t\}_{t \in W})$ vara en modallogisk modell med en ändlig mängd möjliga världar $W = \{1, 2, \ldots, m\}$.

   (a) Visa hur man för en modallogisk formel A som innehåller de satslogiska variablerna $P_1, \ldots, P_k$ kan översätta villkoret $V_t(A)$ till en satslogisk formel $\varphi_{A,t}$. Låt de satslogiska variabler i den senare formeln vara $q_{t,i} = V_t(P_i)$. Undersök hur mycket större formeln $\varphi_{A,t}$ kan vara än A.

   (b) Ge exempel på en modallogisk modell med en oändlig mängd möjliga världar och en formel A så att $V_t(A)$ inte är ekvivalent med en satslogisk formel.

2. Rita grafen svarande mot följande 2-CNF formel, indikera starkt sammanhängande komponenter och avgör med hjälp av dessa om formeln är satisfierbar:

   $$(\neg A \vee B) \wedge (B \vee A) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee A) \wedge (\neg D \vee \neg A) \wedge (B \vee D) \wedge (C \vee E) \wedge (\neg E \vee B).$$

3. Låt L vara ett ändligt första ordningens språk, och låt $\mathcal{A}$ vara en ändlig L-struktur. Visa att om $\mathcal{B}$ är en L-struktur sådan att $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, så gäller $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. (Ledning: konstruera en L-formel som beskriver $\mathcal{A}$ fullständigt.)

4. *Heltalsprogrammering.* Betrakta ett system av m olikheter:

   $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \end{aligned}$$

   där a_{ij}, b_i alla är heltal. Visa att det är algoritmiskt avgörbart huruvida detta system har en heltalslösning eller ej, genom att reducera problemet till Presburgeraritmetik.

5. *Avgörbarhetsegenskaper hos ändliga automater.* En ändlig *Mealy-automat* M kan beskrivas av tre ändliga, icke-tomma, mängder Σ, Δ, S och två funktioner $f : \Sigma \times S \to \Delta$, $g : \Sigma \times S \to S$. Här är Σ inalfabetet, Δ utalfabetet och S mängden av tillstånd. $f(a, s)$ bestämmer utsymbolen som matas ut när en insymbol a och ett tillstånd s är givna, medan $g(a, s)$ anger nästa tillstånd. Låt M vara en Mealy-automat som ovan. Givet ett starttillstånd $s_0 \in S$, och en oändlig följd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ av insymboler, definiera *spårningen* av automaten

   $$\begin{aligned} b_n &= f(a_n, s_n), \\ s_{n+1} &= g(a_n, s_n), \end{aligned}$$

för $n \geq 0$. $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ är alltså följden av utsymboler som uppstår när M matas med (a_n) utgående från tillståndet s_0. Vi betecknar denna följd med $M((a_n), s_0)$.

(a) Låt M vara en Mealy-automat med $\Sigma = \{0, \ldots, i\}$, $\Delta = \{0, \ldots, d\}$ och $S = \{0, \ldots, s\}$. Visa att övergångsfunktionerna f och g kan representeras som (kvantorfria) $\{0, S, +\}$-formler $\varphi(x, s, y)$ och $\gamma(x, s, u)$ i Presburgeraritmetik. Dvs

$$f(a,t) = b \iff (\mathbb{N}, 0, S, +) \models \varphi(\underline{a}, \underline{t}, \underline{b}).$$

$$g(a,t) = v \iff (\mathbb{N}, 0, S, +) \models \gamma(\underline{a}, \underline{t}, \underline{v}).$$

Här är $\underline{m}$ numeralen $S(S(\cdots S(0)\cdots))$ (m stycken S).

(b) Låt $h : \mathbb{N} \to \Sigma$ vara en "testsekvens" som representeras av formeln $\theta(t, x)$ i $(\mathbb{N}, 0, S, +)$. (För exempel på sådana sekvenser, se 5(b) nedan.) Visa att följande egenskaper hos automaten är avgörbara:

(i) Tecknet k förekommer oändligt ofta i utsekvensen för $M(h, 0)$.

(ii) Vid exekvering av $M(h, 0)$ nås aldrig tillståndet j.

6. Vi kallar en följd $f : \mathbb{N} \to T$ av element i T för *slutligen periodisk* om det finns naturliga tal $p > 0$ och m så att för $k \geq m$: $f(k+p) = f(k)$.

(a) Låt M vara en Mealy-automat som ovan. Visa att om (a_n) är slutligen periodisk, så är även $M((a_n), s_0)$ slutligen periodisk.

(b) Visa att om $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ är en slutligen periodisk funktion så kan kan den representeras i Presburgeraritmetiken, i meningen att det finns en formel $\varphi(x, y)$ i $L = \{0, +, S\}$ med fria variabler x och y så att för alla m, n:

$$(\mathbb{N}, 0, +, S) \models \varphi(\underline{m}, \underline{n}) \iff h(m) = n.$$

7. *Övervakningsproblem för konstgallerier m.m.* Låt $S \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en delmängd definierad av en $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$-formel $\varphi(x, y, z)$, dvs

$$S = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq) \models \varphi(p_1, p_2, p_3)\}.$$

Denna betraktas som en samling ogenomskinliga, ickereflekterande objekt. En punkt $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ kallas algebraisk om $\{\mathbf{p}\}$ är en L-definierbar mängd. Exempel: $(\sqrt{2}, 4/5, 0)$ är algebraisk och definieras av formeln $x^2 = 2 \wedge x \geq 0 \wedge 5y = 4 \wedge z = 0$. Visa att följande problem är avgörbara.

(a) Låt $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ vara algebraiska punkter. Är punkten $\mathbf{p}$ är synlig från $\mathbf{p}$?

(b) Samma fråga som i (a) men ljusstrålen får brytas i fixerat antal punkter (punkternas läge får variera).

(c) Givet observationsplatser $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Finns det för varje punkt (som inte är en observationsplats) alltid två observationsplatser från vilka punkten är synlig.

(d) Att bestämma det minsta antalet observationsplatser som är nödvändiga i (c). (Antag att det räcker med ett ändligt antal observationsplatser.)

8. *Tidslogik på reella tidslinjen.* Hur skulle avgörbarhetsegenskapen för RCF kunna användas för att avgöra sanning hos modallogiska formler i en modell där mängden av möjliga världar är $(\mathbb{R}, \leq)$? Vad behöver man anta om $V_t(P)$ som funktion av t för satslogiska variabler P?
