UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars Lindqvist

FACIT ÖVNINGAR 2
Tillämpad Logik DV1, ht-00
2000-09-05

Facit till övningsuppgifter i Tillämpad Logik DV1

1. (a) $(\Sigma i \in I_0)A_i = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
   (b) $(\Sigma i \in I_1)A_i = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$
   (c) $(\Sigma i \in I_2)A_i = \emptyset$
   (d) $(\Pi i \in I_0)A_i = \{\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle\}, \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,2\rangle\},$
   $\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle\}, \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,2\rangle\}\}$
   (e) $(\Pi i \in I_1)A_i = \emptyset$
   (f) $(\Pi i \in I_2)A_i = \{\emptyset\}$

2. (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = (\Sigma n : \mathbb{N})\mathbb{N}$
   (b) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = (\Pi n : \mathbb{N})\mathbb{N}$

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^{\mathbb{N}_2} = (\Pi i : \mathbb{N}_2)\mathbb{N}$

4. $\mathbb{N} + \mathbb{N} \simeq (\Sigma i : \mathbb{N}_2)\mathbb{N}$

   Dessa två mängder är faktiskt lika om vi antar den vanligast förekommande definitionen av disjunkt union

5. Låt $LT_{m,n} = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{om } m < n \\ \emptyset & \text{om } m \geq n \end{cases}$

   (a) $(\Sigma n : \mathbb{N})LT_{0,n}$
   (b) $(\Pi n : \mathbb{N})LT_{0,n}$
   (c) $(\Pi m : \mathbb{N})((\Sigma n : \mathbb{N})LT_{m,n})$
   (d) $(\Pi n : \mathbb{N}_2)LT_{0,n}$
   (e) $(\Sigma n : \mathbb{N}_2)LT_{0,n}$

6. (a) $\langle \mathsf{S}(0), 0\rangle : (\Sigma i : \mathbb{N})L(i)$
   (b) Går ej att bevisa
   (c) $\lambda x \to 0 : (\Pi i : \mathbb{N})L(\mathsf{S}(\mathsf{i}))$

7. Vi konstruerar en lambdaterm $t(x)$ så att

   $t([\mathsf{m}/x]) = \begin{cases} \mathsf{S}(0) & \text{om } \mathsf{m} \text{ är udda} \\ 0 & \text{om } \mathsf{m} \text{ är jämn} \end{cases}$

   Låt $t(x) = \mathsf{rec}(x, 0, \lambda y \to \lambda z \to \mathsf{rec}(z, \mathsf{S}(0), \lambda u \to \lambda v \to 0))$ då kan vi definiera $Odd(x) = L(t(x))$. Påståendet 'Det existerar ett udda naturligt tal' kan då uttryckas som $(\Sigma n : N)Odd(n)$. Ett bevisobjekt är t.ex. $\langle \mathsf{S}(0), 0\rangle : (\Sigma n : \mathbb{N})Odd(n)$.

8. Först antar vi ett lemma:

   $lemma : (\Pi m : \mathbb{N})((\Pi p : Odd(m))Odd(S(S(m))))$

   Sedan kan vi konstruera:

   $\lambda x \rightarrow \mathsf{rec}(x, \mathsf{inr}(0), \lambda u \rightarrow \lambda v \rightarrow \mathsf{when}(v, \lambda w \rightarrow \mathsf{inr}(\mathsf{apply}(\mathsf{apply}(lemma, u), w)), \lambda w \rightarrow \mathsf{inl}(w))) : (\Pi m \in \mathbb{N})(Odd(m) + Odd(\mathsf{S}(m)))$