ANTECKNINGAR FRÅN KURSEN ODE

LEO LARSSON

Innehåll

1. Introduktion

En *differentialekvation* är en ekvation där den obekanta är en *funktion* (snarare än ett tal), och ekvationen involverar denna funktion och dess derivator.

Som även är fallet för numeriska ekvationer, kan en lösning till en differentialekvation inte alltid hittas explicit.

En differentialekvations *ordning* är den högsta ordningen av derivator som förekommer i ekvationen.

Denna kurs handlar mestadels om *ordinära* differentialekvationer, vilket betyder att de obekanta funktionerna är funktioner av *en* variabel (till skillnad från s.k. partiella differentialekvationer, där funktionerna beror av fler variabler och derivatorna i ekvationen således är partiella).

Det är i allmänhet lätt att kontrollera huruvida en given funktion är lösning till en viss differentialekvation.

Exempel 1. Verifiera att $y = Ce^{x^2/2}$, för varje konstant C, löser differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Lösning. Med givna funktioner y fås

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2}Ce^{x^2/2} = xCe^{x^2/2} = xy.$$

$\diamondsuit$

Det är en annan historia att verkligen hitta lösningen till en given ekvation. Som med vanliga ekvationer, behöver vi anpassa lösningsmetoden efter ekvationens utseende. Nedan behandlas några olika klasser av differentialekvationer, och därtill hörande lämpliga lösningsmetoder.

2. Första ordningens ekvationer

2.1. Separabla ekvationer. Vi börjar med ett exempel.

Exempel 2. Lös ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Lösning. Skriv

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x,$$

och notera att kedjeregeln ger

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right),$$

ty uttrycket inom parentes i högerledet representerar en funktion vars derivata m.a.p. y är $\frac{1}{y}$. Vidare gäller att

$$x = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

så den givna ekvationen kan skrivas

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Integration m.a.p. x ger nu

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + D,$$

där D är någon konstant, eller

$$|y| = e^D e^{x^2/2}.$$

Sätt $C = \pm e^D$. Vi erhåller den allmänna lösningen

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

$\diamondsuit$

Detta illustrerar en allmän princip beträffande s.k. separabla ekvationer.

Definition 1. En differentialekvation av första ordningen sägs vara *separabel* om den kan skrivas
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$
Här är f någon funktion som inte beror på y, och g beror inte på x.

För att lösa denna, skriver vi
$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x),$$
och noterar att kedjeregeln ger
$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{g(y)}\, dy\right).$$
Integration m.a.p. x ger
$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + C.$$
Denna metod, kallad *variabelseparation*, kan minnas genom att "multiplicera med dx":
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$
Vi har då samlat y till vänster och x till höger i ekvationen. Vi hakar sedan på integraltecken (och integrationskonstant):
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C.$$
Kom dock ihåg att detta bara är en minnesregel, och den fungerar bara för ekvationer av första ordningen.

I princip kan vi alltid lösa separabla ekvationer, även om integrationerna ibland är svåra att genomföra. Och även om vi kan lösa integralerna, är det inte alltid möjligt att lösa ut y som en funktion av x. Det senare är dock inget större problem, då det går utmärkt att ge lösningen implicit. Nästa exempel visar detta.

Exempel 3. Lös ekvationen
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$
Lösning. Ekvationen är separabel:
$$\begin{aligned} y\, dy &= -x\, dx \\ \int y\, dy &= -\int x\, dx + C \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C \quad (r^2 = 2C) \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned}$$
$\diamondsuit$

I exemplet ovan anges lösningen som en familj av kurvor (närmare bestämt familjen av cirklar centrerade i origo). Varje kurva i familjen är en lösning till ekvationen, även om vi inte anger y explicit som funktion av x. Genom varje punkt i planet passerar precis en av kurvorna $x^2 + y^2 = r^2$.

2.2. **Homogena ekvationer.** En funktion $g(x, y)$ sägs vara *homogen av grad* n om

$$g(tx, ty) = t^n g(x, y)$$

för alla lämpliga x, y och t.

Exempel 4. (a) Låt $g(x, y) = x^p y^q$. Då gäller att

$$g(tx, ty) = (tx)^p (ty)^q = t^{p+q} x^p y^q = t^{p+q} g(x, y).$$

g är alltså homogen av grad $p + q$.

(b) Låt $h(x, y) = x''2 + y^2$. Då är h homogen av grad 2.

(c) Om $k(x, y)$ och $l(x, y)$ är homogena *av samma grad*, är även $k(x, y)+l(x, y)$ homogen.

$\diamondsuit$

Definition 2. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

är en *homogen differentialekvation* om funktionen g är homogen av grad 0.

Nedan presenteras ett trick för att lösa en homogen ekvation.

Exempel 5. Lös ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3y}{x}.$$

Lösning. Ekvationen är inte separabel. Däremot är högerledet summan av två homogena funktioner av grad 0, alltså självt en homogen funktion av grad 0. Ekvationen är alltså homogen. Tricket är att införa en ny funktion z av x, enligt

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{eller} \quad y = xz.$$

Produktregeln för derivering ger att

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Vi får ekvationen

$$z + x\frac{dz}{dx} = 2 + 3z$$

eller

$$x\frac{dz}{dx} = 2(1 + z).$$

Denna är separabel:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{1+z} &= \frac{2\,dx}{x} \\ \log|1 + z| &= 2\log|x| + C \quad (D = \pm e^C) \\ 1 + z &= Dx^2 \quad \text{byt tillbaka} \\ 1 + \frac{y}{x} &= Dx^2 \\ y = Dx^3 - x. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Genom bytet $y = xz$ kunde alltså den homogena ekvationen transformeras till en separabel ekvation. Detta gäller allmänt för homogena ekvationer. Antag nämligen att $g(x, y)$ är homogen av grad 0. Då gäller att

$$g(x, y) = t^0 g(x, y) = g(tx, ty)$$

för alla t. I synnerhet kan vi sätta $t = \frac{1}{x}$. Detta ger

$$g(x, y) = g\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Om nu $\frac{y}{x}$ ersätts med z, så att som i ovanstående exempel $\frac{dy}{dx}$ transformeras till $z + x\frac{dz}{dx}$, så transformeras ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

till

$$z + x\frac{dz}{dx} = g(1, z)$$

eller

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g(1, z) - z}{x},$$

vilket inses vara en separabel ekvation. Denna löses med variabelseparation, varpå z byts tillbaka mot $\frac{y}{x}$.

2.3. **Ortogonala kurvfamiljer.** Betrakta kurvfamiljen

$$f(x, y) = c. \tag{1}$$

Den är en lösning till differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

där

$$g(x, y) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

På vektorform kan vi skriva (2) som

$$\nabla f \cdot (1, y') = 0,$$

d.v.s. tangentvektorn $(1, y')$ är vinkelrät mot gradienten ∇f. För den ortogonala kurvfamiljen måste alltså gälla att $(1, y')$ är *parallell* med ∇f, d.v.s.

$$(1, y') = k(f_x, f_y),$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x} = -\frac{1}{g}.$$

Det följer att den ortogonala kurvfamiljen är lösningsfamilj till ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{g(x, y)}.$$

Exempel 6. Hitta ortogonala kurvfamiljen till

$$y = cx^2. \tag{3}$$

Lösning. STEG 1: Hitta en ekvation på formen

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

för familjen (3). Derivering m.a.p. x ger

$$\frac{dy}{dx} = 2cx.$$

Vi måste eliminera konstanten c, och gör detta genom att kombinera detta med (3):

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}, \\ c &= \frac{y}{x^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{x}. \end{aligned}$$

I vårt fall gäller alltså

$$g(x, y) = 2y/x.$$

STEG 2: Ersätt $g(x, y)$ med $-1/g(x, y)$. Vi erhåller differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

STEG 3: Lös den nya ekvationen. I detta fall har vi en separabel ekvation.

$$\begin{aligned} 2y\,dy &= -x\,dx \\ 2\int y\,dy &= -\int x\,dx + C \\ y^2 &= -\frac{x^2}{2} + c^2 \\ \frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Den ortogonala kurvfamiljen är en familj av ellipser. ♢

2.4. **Exakta ekvationer.** I föregående avsnitt hittade vi en differentialekvation för familjen

$$f(x, y) = c$$

genom att derivera m.a.p. x:

$$f_x + f_y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Låt oss formellt "multiplicera med dx":

$$f_x\,dx + f_y\,dy = 0.$$

Givet en funktion f, om de partiella derivatorna f_x och f_y existerar kan vi göra följande symboliska definition:

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy.$$

Symbolen df kallas *differentialen till* f, och kan ses som en slags total derivata. En fördel med detta skrivsätt är symmetrin – det går lika bra att betrakta x som funktion av y, vilket ibland är mer praktiskt. Betrakta nu uttrycket

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{4}$$

Med detta menas differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

eller

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}.$$

Om vi kan skriva vänsterledet i (4) som differentialen df till någon funktion $f(x,y)$, har vi ekvationens lösning omedelbart: $f(x,y) = c$.

Exempel 7. Lös ekvationen

$$(1 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0.$$

Lösning. Vi söker en funktion $f(x,y)$ sådan att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2xy \tag{5}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y. \tag{6}$$

Om (5) ska gälla, måste vi ha

$$f(x,y) = x + x^2 y + h(y), \tag{7}$$

där $h(y)$ är någon funktion som inte beror på x (”integrationskonstanten”). Om dessutom (6) ska gälla, måste vi ha

$$x^2 + h'(y) = x^2 + 2y.$$

Vi ser att om vi väljer

$$h(y) = y^2,$$

kommer (7) att ge en lösning. Alltså är familjen

$$x + x^2 y + y^2 = c$$

en familj av integralkurvor till den givna ekvationen. ♢

Det är dock ingalunda säkert att givet funktionerna $M(x,y)$ och $N(x,y)$ det finns ett $f(x,y)$ sådant att

$$f_x = M \quad \text{och} \quad f_y = N.$$

Om det finns en sådan funktion $f(x,y)$, kallas ekvationen (4) för en *exakt differentialekvation* (eftersom högerledet är *exakt* lika med en differential df). Det finns dock ett test som kan utföras på M och N som avgör huruvida en sådan funktion existerar.

Sats 1. *Ekvationen*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

är exakt om och endast om

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Bevis. Om ekvationen är ekakt, d.v.s. om det finns f sådant att

$$f_x = M \quad \text{och} \quad f_y = N,$$

ger likhet av blandade andraderivator att

$$M_y = f_{xy} = f_{yx} = N_x.$$

Antag att $M_y = N_x$. Vi vill visa att ekvationen är exakt, d.v.s. att det finns ett $f(x, y)$ med rätt egenskaper. f måste ha formen

$$f(x, y) = \int N(x, y)\, dy + h(x),$$

för något h. Detta h måste uppfylla

$$\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)\, dy + h'(x) = M(x, y),$$

eller

$$h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)\, dy.$$

Högerledet här får alltså inte bero på y; med andra ord, dess derivata m.a.p. y måste vara noll. Men enligt antagandet $M_y = N_x$ och likhet mellan blandade andraderivator följer att

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(M - \frac{\partial}{\partial x} \int N\, dy\right) \\
=& M_y - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int N\, dy \\
=& N_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} \int N\, dy\right) \\
=& N_x - N_x = 0.
\end{aligned}$$

Satsen följer. □

Exempel 8. I exemplet ovan hade vi $M(x, y) = 1 + 2xy$ och $N(x, y) = x^2 + 2y$. Alltså

$$M_y = 2x = N_x,$$

vilket bekräftar att ekvationen är exakt. ♢

2.5. **Integrerande faktorer.** Vad gör vi om exakthetstestet för ekvationen

$$F(x, y)\, dx + G(x, y)\, dy = 0 \tag{8}$$

visar att ekvationen *inte* är exakt? Kanske kan vi transformera ekvationen till en exakt ekvation – kanske kan vi ”exaktifiera” ekvationen. Om $\mu(x, y)$ är en nollskild funktion, är ekvationen

$$\mu(x, y)F(x, y)\, dx + \mu(x, y)G(x, y)\, dy = 0$$

ekvivalent med (8). Det skulle kunna vara så, att denna nya ekvation är exakt även om inte (8) är det.

Exempel 9. Lös ekvationen

$$2xy\, dx + (y^2 - 3x^2)\, dy = 0.$$

Lösning. Här har vi

$$F(x, y) = 2xy \quad \text{och} \quad G(x, y) = y^2 - 3x^2.$$

Alltså

$$F_y = 2x \neq -6x = G_x.$$

Ekvationen är inte exakt. Vi söker därför en funktion $\mu(x, y)$ sådan att

$$2xy\mu(x, y)\,dx + (y^2 - 3x^2)\mu(x, y)\,dy = 0$$

är exakt. Sätt

$$M = F\mu, N = G\mu.$$

Vi behöver alltså

$$\begin{aligned} F_y\mu + F\mu_y &= G_x\mu + G\mu_x \\ 2x\mu + 2xy\mu_y &= -6x\mu + (y^2 - 3x^2)\mu_x \\ 8x\mu + (3x^2 - y^2)\mu_x + 2xy\mu_y &= 0. \end{aligned}$$

Problemet med den ordinära differentialekvationen har nu till synes förvärrats till en partiell differentialekvation. Men antag t.ex. att det finns ett μ som inte beror av x. Då förenklas ovanstående ekvation för μ markant:

$$8x\mu + 2xy\mu_y = 0$$

eller

$$4\mu + y\mu_y = 0.$$

Detta är en separabel ekvation, och en lösning (vi behöver bara en) är

$$\mu(y) = \frac{1}{y^4}.$$

Med detta μ får vi ekvationen

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0.$$

Denna är exakt (kan för säkerhets skull testas med exakthetstestet från föregående avsnitt). Vi söker nu en funktion $f(x, y)$ med $f_x = M$ och $f_y = N$. Det första av dessa villkor implicerar att f måste ha formen

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + h(y)$$

för något h (oberoende av x). Det andra villkoret ger för sådana f

$$-\frac{3x^2}{y^4} + h'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4},$$

så

$$h(y) = -\frac{1}{y}$$

funkar. Alltså har den givna ekvationen den allmänna lösningen

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} = C$$

eller

$$x^2 - y^2 = Cy^3.$$

$\diamondsuit$

Definition 3. En funktion μ som multiplicerad med ekvationen (8) gör denna till en exakt ekvation kallas för en *integrerande faktor* till ekvationen.

Exempel 10. Integrerande faktorer har som specialfall följande bekanta metod att lösa första ordningens linjära ekvationer. Vi betraktar ekvationen

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y(x) = h(x). \tag{9}$$

Vi kan skriva

$$(g(x)y - h(x))\,dx + dy = 0,$$

d.v.s. $F(x,y) = g(x)y - h(x)$ och $G(x,y) = 1$. Sätt $M = F\mu$ och $N = G\mu$. Vi har då

$$M_y = F_y\mu + F\mu_y = g\mu + (gy - h)\mu_y$$

och

$$N_x = G_x\mu + G\mu_x = \mu_x.$$

Det visar sig att det i detta fall alltid finns en integrerande faktor μ som bara beror på x, d.v.s. termen $(gy - h)\mu_y$ försvinner:

$$\begin{aligned} \mu'(x) &= g(x)\mu(x) \\ \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= g(x) \\ \frac{d}{dx}\log\mu(x) &= g(x) \\ \log\mu(x) &= \int g(x)\,dx \\ \mu(x) &= e^{\int g(x)\,dx}. \end{aligned}$$

Om (9) multipliceras med denna faktor, kan vänsterledet skrivas som en exakt derivata:

$$e^{\int g(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + g(x)e^{\int g(x)\,dx}y(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int g(x)\,dx}y(x)\right).$$

Lösningen blir då

$$e^{\int g(x)\,dx}y(x) = \int \left(e^{\int g(x)\,dx}h(x)\right)\,dx + C.$$

$\diamondsuit$

3. Andra ordningens linjära ekvationer

3.1. **Existens och entydighet av lösningar.** Då vi arbetat med första ordningens ekvationer, har den allmänna lösningen i regel innehållit en godtycklig konstant. Då det är fråga om andra ordningens ekvationer är antalet konstanter vanligtvis två. Följande sats, vars bevis inte ges här, är en existens- och entydighetssats för andra ordningens linjära differentialekvationer.

Sats 2. *Betrakta differentialekvationen*

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x), \quad x \in [a,b]. \tag{10}$$

Om P, Q och R är kontinuerliga på $[a,b]$, x_0 är någon punkt i $[a,b]$ och y_0 och y_0' är två reella tal, finns precis en funktion y som uppfyller ekvationen (10) och

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

$\square$

Specialfallet

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{11}$$

av (10) kallas en *homogen* ekvation. Varje linjärkombination av lösningar till (11) är en lösning till (11), eftersom derivering är en linjär process: om y_1 och y_2 är lösningar till (11), och a_1 och a_2 är konstanter, gäller att

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}(a_1y_1(x) + a_2y_2(x)) + P(x)\frac{d}{dx}(a_1y_1(x) + a_2y_2(x))& \\ + Q(x)(a_1y_1(x) + a_2y_2(x))& \\ = a_1(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x))& \\ + a_2(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x))& \\ = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0.&\end{aligned}$$

Definition 4. Två funktioner f och g sägs vara *linjärt beroende* om antingen $f(x) = kg(x)$ eller $g(x) = kf(x)$ för alla x, för någon konstant k. I annat fall sägs f och g vara *linjärt oberoende.*

Mer allmänt sägs den ändliga mängden $\{f_1, \ldots, f_m\}$ av funktioner vara linjärt beroende om det finns konstanter $k_1, \ldots, k_m$, ej alla noll, sådana att

$$k_1f_1(x) + \ldots + k_mf_m(x) = 0$$

för alla x. I annat fall är mängden linjärt oberoende.

Exempel 11. (a) Låt $f(x) = 1 + 2x^2$ och $g(x) = 4 + 8x^2$. Eftersom då $g(x) = 4f(x)$ för alla x gäller att f och g är linjärt beroende.

(b) Låt $f(x) = e^x$ och $g(x) = \cos x$. Om det finns konstanter a och b sådana att

$$af(x) + bg(x) = 0$$

för alla x, så fås i synnerhet att

$$ae^{\pi/2} = 0 \quad \left(x = \frac{\pi}{2}\right)$$

och

$$a + b = 0 \quad (x = 0),$$

varur följer att $a = b = 0$. Alltså är f och g linjärt oberoende.

$\diamondsuit$

Definition 5 (Wronskian)**.** Givet två deriverbara funktioner f och g, definierar vi dess *Wronskian* eller *Wronski-determinant* genom

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Sats 3. *Antag att y och z är två lösningar till (11), och låt W vara Wronskianen. Då gäller antingen att $W(x)$ alltid är noll, eller att $W(x)$ aldrig är noll. I första fallet är y och z linjärt beroende, i det senare fallet är y och z linjärt oberoende.*
$\square$

Sats 4. *Om y och z är två linjärt oberoende lösningar till (11), så är $ay + bz$ den allmänna lösningen.* $\square$

Sats 5. *Om y_h är den allmänna lösningen till (11) och y_p är vilken lösning som helst till (10) (en s.k.* partikulärlösning*), då är $y_h + y_p$ den allmänna lösningen till (10).* $\square$

Exempel 12. (a) Visa att $y(x) = e^{-x}$ och $z(x) = e^{2x}$ är lösningar till ekvationen

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Vad är den allmänna lösningen?

(b) Bestäm a och b så att $y_p(x) = ax+b$ är en partikulärlösning till $y''-y'-2y = 4x$. Vad är den allmänna lösningen?

Lösning. (a) Eftersom $y'(x) = -e^{-x}$ och $y''(x) = e^{-x}$ gäller att

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = (1 - (-1) - 2)e^{-x} = 0.$$

Eftersom $z'(x) = 2e^{2x}$ och $z''(x) = 4e^{2x}$ får vi att

$$z''(x) - z'(x) - 2z(x) = (4 - 2 - 2)e^{2x} = 0.$$

Både y och z är alltså lösningar till ekvationen. Enligt Sats 4 är den allmänna lösningen

$$ce^{-x} + de^{2x},$$

förutsatt att y och z är linjärt oberoende. För dessa funktioners Wronskian gäller

$$W(x) = e^{-x} \cdot 2e^{2x} - (-e^{-x})e^{2x} = 3e^{x} \neq 0.$$

Således är y och z linjärt oberoende enligt Sats 3. (b) $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$. Alltså

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -a - 2ax - 2b = 4x,$$

så vi måste ha $-2a = 4$ eller $a = -2$, och $-a - 2b = 2 - 2b = 0$, så $b = 1$. Alltså $y_p(x) = -2x + 1$. Den allmänna lösningen är, enligt Sats 5

$$ce^{-x} + de^{2x} - 2x + 1.$$

$\diamondsuit$

3.2. **Hitta nya lösningar från kända lösningar.** Enligt teorin i föregående avsnitt, behövs i allmänhet *två linjärt oberoende lösningar* till (11) för att vi ska kunna bestämma den allmänna lösningen. Antag att vi redan har en lösning y. Kan vi använda den för att hitta en andra (linjärt oberoende) lösning z?

Exempel 13. Betrakta ekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{12}$$

Man kollar lätt att $y(x) = x^2$ löser (12). Vi försöker hitta en till lösning z på formen

$$z(x) = v(x)x^2,$$

där funktionen $v(x)$ återstår att bestämma. (Notera att om $v(x)$ är icke-konstant, blir y och $v \cdot y$ linjärt oberoende — kan kollas med Wronskianen.) Vi har

$$\begin{aligned}
z' &= v'x^2 + 2vx, \\
z'' &= v''x^2 + 4v'x + 2v \\
x^2z'' - 2xz' + 2z &= x^2(v''x^2 + 4v'x + 2v) \\
&\quad - 2x(v'x^2 + 2vx) \\
&\quad + 2vx^2 \\
&= x^4v'' + (4x^3 - 2x^3)v' + (2x^2 - 4x^2 + 2x^2)v \\
&= x^3(xv'' + 2v').
\end{aligned}$$

Om nu detta z ska vara en lösning, måste vi ha

$$xv'' + 2v' = 0,$$

eller
$$\frac{d}{dx}\log v' = \frac{v''}{v'} = -\frac{2}{x}.$$
Ett sådant v kan hittas genom integrering:
$$\begin{aligned}\log v' &= -2\log x\\ v' &= \frac{1}{x^2}\\ v &= -\frac{1}{x}.\end{aligned}$$
Vårt z blir alltså
$$z(x) = v(x)x^2 = -\frac{1}{x}x^2 = -x.$$
Tack vare homogeniteten är vi fria att multiplicera denna lösning med valfri konstant, och vi väljer i detta fall -1. x^2 och x är linjärt oberoende, så den allmänna lösningen till (12) är
$$y_g(x) = ax^2 + bx.$$

$\diamondsuit$

Denna metod funkar i allmänhet. Det är fullt möjligt att härleda en formel för en andra lösning z om en lösning y är känd. Vi avstår dock från det här.

4. Andra ordningens linjära ekvationer med Konstanta koefficienter

4.1. Homogena ekvationer. Vi betraktar specialfallet

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{13}$$

av en andra ordningens linjär, homogen ekvation, där p och q nu är konstanter. Uppdraget är att hitta två linjärt oberoende lösningar till (13), och det är vettigt att leta lösningar på formen
$$y(x) = e^{mx}.$$
Om detta y deriveras och sätts in i (13) erhålls
$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0,$$
och för att detta ska gälla för alla x måste vi ha

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{14}$$

Denna andragradsekvation kallas *karakteristisk ekvation* till (13). Det finns tre väsentligt skilda fall för lösningar till (14).

(1) *Olika reella rötter m_1 och m_2.* Genom att studera en Wronski-determinant inses att e^{m_1x} och e^{m_2x} är linjärt oberoende. Den allmänna lösningen är alltså
$$a_1e^{m_1x} + a_2e^{m_2x}.$$

(2) *Olika icke-reella rötter $m_1 = a+ib$ och $m_2 = a-ib$.* Rötterna till (14) måste ha denna form (med a och b reella), eftersom koefficienterna är reella. Enligt Eulers formel har vi
$$e^{m_1x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx).$$
Sätt
$$R(x) = e^{ax}\cos x \quad \text{och} \quad I(x) = e^{ax}\sin bx.$$

Med hjälp av vetskapen att

$$a = -\frac{p}{2} \quad \text{och} \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$$

kan vi visa att både R och I löser ekvationen (13). Det gäller dessutom för Wronski-determinanten av R och I att

$$W(x) = be^{2ax},$$

och eftersom b antas vara nollskilt innebär detta att R och I är linjärt oberoende. Den allmänna lösningen blir alltså

$$e^{ax}(c\cos bx + d\sin bx).$$

(3) *En dubbelrot m.* En lösning är naturligtvis

$$y(x) = e^{mx}.$$

Vi använder tidigare illustrerad metod för att hitta en andra lösning; sätt $z(x) = v(x)e^{mx}$. Vi söker bestämma funktionen v så att detta z blir en andra lösning. Vi har

$$\begin{aligned} z' &= (v' + mv)e^{mx} \\ z'' &= (v'' + 2mv' + m^2v)e^{mx}, \end{aligned}$$

som insatt i ekvationen ger (notera att $m = -\frac{p}{2}$)

$$\begin{aligned} 0 &= (v'' + 2mv' + m^2v)e^{mx} \\ &\quad + p(v' + mv)e^{mx} \\ &\quad + qve^{mx} \\ &= [v'' + (2m + p)v' + (m^2 + pm + q)v]e^{mx} = v''e^{mx}. \end{aligned}$$

Vi måste alltså ha $v'' = 0$, och en icke-konstant sådan funktion är $v(x) = x$. En andra linjärt oberoende lösning är alltså xe^{mx}, så den allmänna lösningen blir

$$(c + dx)e^{mx}.$$

Exempel 14. Lös differentialekvationerna

(a) $y'' - 7y' + 10y = 0$,
(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$ och
(c) $y'' + 6y' + 9$.

Lösning. (a) Karakteristiska ekvationen är

$$m^2 - 7m + 10 = 0,$$

och lösningarna till denna är

$$m_1 = 2 \quad \text{och} \quad m_2 = 5,$$

d.v.s. två olika reella rötter. Allmänna lösningen blir således

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{5x}.$$

(b) Här är karakteristiska ekvationen $m^2 + 2m + 2 = 0$, som har lösningarna

$$m = -1 \pm i.$$

Enligt resonemanget med real- och imaginärdel ovan blir den allmänna lösningen

$$y(x) = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}.$$

(c) Den karakteristiska ekvationen $m^2 + 6m + 9 = 0$ har dubbelroten $m = 3$, så allmänna lösningen är

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

4.2. **Icke-homogena ekvationer.** Nu antar vi inte längre att högerledet är noll, utan betraktar ekvationen

$$y'' + py' + qy = R(x),$$

där $R(x)$ är någon funktion. Eftersom vi kan hitta den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

gäller det enligt en tidigare presenterad sats att hitta *en* lösning, en s.k. partikulärlösning, till den icke-homogena ekvationen. Oftast får man försöka sig på en kvalificerad gissning till hur en partikulärlösning kan se ut.

4.2.1. *Exponentialfunktioner.*

Exempel 15. Betrakta ekvationen

$$y'' + 4y' - 5y = 3e^{2x}.$$

Motsvarande homogena ekvation har den allmänna lösningen

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}.$$

Funktionerna

$$y = Ae^{2x}$$

kandiderar till rollen som partikulärlösning, och vi söker bestämma konstanten A:

$$y' = 2Ae^{2x}, \quad y'' = 4Ae^{2x}.$$

$$0 = (4A + 4 \cdot 2A - 5 \cdot A)e^{2x} = 7Ae^{2x}.$$

Vi ser att $A = \frac{3}{7}$ funkar bra. Allmänna lösningen är alltså

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + \frac{3}{7} e^{2x}.$$

Exempel 16. Betrakta nu istället den något modifierade ekvationen

$$y'' + 4y' - 5y = 3e^x.$$

Den "kvalificerade gissningen" $y = Ae^x$ fungerar inte längre, ty denna ansats leder till ekvationen

$$0 \cdot A = 3,$$

vilket är omöjligt. Detta beror på att e^x också löser den homogena ekvationen, så den funktionen är redan "förbrukad". Istället försöker vi, inspirerade av fallet med en dubbelrot till karakteristiska ekvationen, med

$$y = Axe^x.$$

Vi får då efter derivering och insättning

$$6Ae^x = 3e^x,$$

och vi ser att valet måste bli $A = \frac{1}{2}$. Allmän lösning blir

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + \frac{1}{2} xe^x.$$

Exempel 17. Om vi nu istället har ekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x},$$

vars homogena motsvarighets karakteristiska ekvation har dubbelroten $m = 2$, räcker inte ens $y = Axe^{2x}$ som ansats till partikulärlösning, utan vi måste gå ytterligare ett steg och dra till med

$$y = Ax^2e^{2x}.$$

4.2.2. *Trigonometriska funktioner.* Om högerledet är $\cos ax$ eller $\sin ax$ eller en linjärkombination av dessa, ansätter vi partikulärlösningen

$$A \sin ax + B \cos ax.$$

Exempel 18. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin 2x + 8 \cos 2x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Lösning. Homogena motsvarigheten till ekvationen har karakteristisk ekvation

$$m^2 - 4m + 3 = 0,$$

vars lösningar är

$$m_1 = 1, m_2 = 3.$$

Olika reella rötter alltså. Detta ger de linjärt oberoende lösningarna e^x och e^{3x} till den homogena ekvationen. Som partikulärlösning ansätter vi

$$\begin{aligned} y(x) &= A \sin 2x + B \cos 2x, \\ y'(x) &= -2B \sin 2x + 2A \cos 2x, \\ y''(x) &= -4A \sin 2x - 4B \cos 2x, \end{aligned}$$

vilket insatt i ekvationen ger

$$(-4A - 4(-2B) + 3A) \sin 2x + (-4B - 4 \cdot 2A + 3B) \cos 2x = \sin 2x + 8 \cos 2x.$$

Identifikation av koefficienterna för $\sin 2x$ respektive $\cos 2x$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} \ \ -A & +8B & = 1, \\ -8A & \ \ -B & = 8, \end{cases}$$

som har lösningen $A = -1$, $B = 0$. Den allmänna lösningen till ekvationen är således

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x} - \sin 2x.$$

Vi söker bestämma konstanterna c_1 och c_2 så att begynnelsevillkoren uppfylls:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0, \\ y'(0) = -1 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Det följer att

$$c_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{och} \quad c_2 = \frac{3}{2}.$$

Den entydiga lösningen blir

$$y(x) = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{3}{2}e^x - \sin 2x.$$

även i fallet med trigonometriska funktioner i högerledet kan det inträffa att den "uppenbara" ansatsen till partikulärlösning redan löser den homogena ekvationen, i vart fall man istället provar att multiplicera den till en början tilltänkta partikulärlösningen med x.

4.2.3. *Polynom.* Om $R(x)$ är ett polynom av grad n, kan vi som partikulärlösning ansätta ett polynom av grad n, $n+1$ eller $n+2$.

5. Variation av parametrar

Vi illustrerar en metod att hitta partikulärlösningar till ekvationer på formen

$$y'' + Py' + Qy = R,$$

där P och Q inte nödvändigtvis är konstanter, och där den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

antas vara känd.

Exempel 19. Hitta en partikulärlösning till ekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x.$$

Lösning. Den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation hittade vi i Exempel 13, och den är

$$y = c_1x + c_2x^2.$$

Vi vill *variera parametrarna* c_1 *och* c_2, d.v.s. ersätta konstanterna med funktioner, och på så sätt försöka hitta en partikulärlösning. Ansatsen är alltså

$$y = v_1x + v_2x^2,$$

där vi vill bestämma funktionerna v_1 och v_2 så att detta y löser ekvationen. Vi har

$$y' = v_1'x + v_1 + v_2'x^2 + 2v_2x.$$

Tricket är att kräva att termerna som involverar derivator av de okända funktionerna v_1 och v_2 försvinner — vi kräver med andra ord

$$xv_1' + x^2v_2' = 0.$$

Andraderivatan för den ansatta partikulärlösningen blir då lite lättare att hantera:

$$y'' = v_1' + 2xv_2' + 2v_2.$$

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} x^3 \cos x &= x^2(v_1' + 2xv_2' + 2v_2) - 2x(v_1 + 2xv_2) + 2(xv_1 + x^2v_2) \\ &= x^2v_1' + 2x^3v_2' + (-2x + 2x)v_1 + (2x^2 - 4x^2 + 2x^2)v_2 \\ &= x^2v_1' + 2x^3v_2'. \end{aligned}$$

Vi har alltså två ekvationer med obekanta v_1' och v_2', nämligen[1]

$$\begin{aligned} v_1' + xv_2' &= 0, \\ v_1' + 2xv_2' &= x \cos x. \end{aligned}$$

Subtraktion av den första från den andra av dessa ger

$$xv_2' = x \cos x$$

eller

$$v_2 = \sin x,$$

[1]Notera att detta är ett linjärt ekvationssystem i v_1' och v_2'. Om vi förlänger första ekvationen med x blir dessutom koefficientmatrisens determinant precis lika med Wronskianen för lösningarna x och x^2 till den homogena ekvationen. Detta är ingen slump, utan lösningarna till homogena ekvationen dyker upp här i allmänhet.

så

$$v_1' = -x \cos x$$

eller

$$v_1 = -x \sin x - \cos x.$$

En partikulärlösning är således

$$\begin{aligned} y(x) &= x v_1(x) + x^2 v_2(x) \\ &= -x^2 \sin x - x \cos x + x^2 \sin x \\ &= -x \cos x. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Det är fullt möjligt att härleda formler för v_1 och v_2 i det allmänna fallet, men detta avstår vi från här av ett antal skäl.

6. System av differentialekvationer

Betrakta den linjära differentialekvationen

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = R(t). \tag{15}$$

Inför en ny funktion y genom att låta

$$y(t) = x'(t).$$

Enligt (15) har vi att

$$\begin{aligned} y'(t) &= x''(t) \\ &= -Q(t)x(t) - P(t)x'(t) + R(t) \\ &= -Q(t)x(t) - P(t)y(t) + R(t). \end{aligned}$$

Vi har alltså följande *system* av differentialekvationer.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -Q(t)x(t) - P(t)y(t) + R(t). \end{cases} \tag{16}$$

Om x är en lösning till (15), och om y definieras som ovan, så är (x, y) en lösning till systemet (16). Omvänt, om (x, y) är ett par av funktioner som uppfyller båda ekvationerna i (16), så är x en lösning till (15).

Mer allmänt, betrakta ekvationen

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}). \tag{17}$$

Låt

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= x', \\ x_3 &= x_2' = x'', \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)}. \end{aligned}$$

(17) kan då skrivas som systemet

$$\begin{cases} x_1' & = & x_2, \\ x_x' & = & x_3, \\ & \vdots & \\ x_n' & = & f(t, x_1, \dots, n_{n-1}). \end{cases}$$

Exempel 20. Betrakta ekvationen

$$x''(t) + 4x^2(t) = \sin t, \tag{18}$$

och sätt $y(t) = x'(t)$. Vi har alltså

$$y'(t) = \sin t - 4x^2(t),$$

så (18) kan skrivas

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = \sin t - 4x^2(t). \end{cases}$$

◊

6.1. **Linjära system.** Ett system av två linjära ekvationer i två obekanta har formen

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + f_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + f_2. \end{cases} \tag{19}$$

Koefficienterna a_j, b_j och f_j antas här vara kontinuerliga funktioner av t. Vi kallar systemet (19) för *homogent* om $f_1 = f_2 = 0$, annars *icke-homogent*.

I analogi med andra ordningens linära har vi följande teoretiska maskineri.

Definition 6 (Wronskian)**.** Om (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är lösningar till det homogena systemet

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y, \\ y' = a_2 x + b_2 y, \end{cases} \tag{20}$$

definierar vi *Wronskianen* eller *Wronski-determinanten* av lösningarna enligt

$$W(t) = x_1(t) y_2(t) - x_2(t) y_1(t).$$

Sats 6. *Antag att (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är lösningar till det homogena systemet (20), och låt W vara Wronskianen. Då gäller antingen att $W(t)$ alltid är noll, i vart fall de båda lösningarna är linjärt beroende, eller att $W(t)$ aldrig är noll, i vart fall lösningarna är linjärt oberoende.* □

Sats 7. *Om (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är linjärt oberoende lösningar till (20), så är*

$$c_1(x_1, y_1) + c_2(x_2, y_2)$$

den allmänna lösningen. □

Sats 8. *Om (x_h, y_h) är den allmänna lösningen till (20) och (x_p, y_p) är vilken lösning som helst till (19), så ges allmänna lösningen till (19) av*

$$(x_h, y_h) + (x_p, y_p).$$

□

Exempel 21. Vi betraktar systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), \\ y'(t) = x(t) + 3y(t). \end{cases} \tag{21}$$

Detta system är homogent. Med beteckningar som ovan har vi

$$a_1 = 3, b_1 = 4, a_2 = 1, b_2 = 3.$$

Betrakta först paret (x_1, y_1) av funktioner, definierade genom

$$x_1(t) = -2e^t, \quad y_1(t) = e^t.$$

Dessa båda funktioner är sina egna derivator. Vi har därmed

$$3x_1(t) + 4y_1(t) = -6e^t + 4e^t = -2e^t = x_1'(t)$$

och
$$x_1(t) + 3y_1(t) = -2e^t + 3e^t = e^t = y_1'(t).$$
Alltså är (x_1, y_1) en lösning till (21). Definiera nu (x_2, y_2) genom
$$x_2(t) = 2e^{5t}, \quad y_2(t) = e^{5t}.$$
Man visar enkelt att även (x_2, y_2) är en lösning till (21). Wronskianen för dessa lösningar ges av
$$W(t) = -4e^{6t} \neq 0,$$
så de är linjärt oberoende. Varje lösning kan alltså skrivas på formen
$$\begin{cases} x(t) = -2c_1 e^t + 2c_2 e^{5t}, \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t}. \end{cases}$$
$\diamondsuit$

Exempel 22. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
För att hitta egenvärdena till A, löser vi karakteristiska ekvationen
$$\det(A - \lambda I) = 0,$$
eller
$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$
Lösningarna är
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$
För att hitta egenvektorerna tillhörande egenvärdet λ_1 löser vi systemet
$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$
eller, skrivet i matrisform
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$
Lösningarna är
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
På samma sätt fås att egenvektorerna tillhörande egenvärdet λ_2 är
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Om vi jämför siffrorna i detta exempel med siffrorna i linjära systemet ovan, ser vi att allmänna lösningen till (21) är
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$
där λ_j och v_j är egenvärden resp. egenvektorer till koefficientmatrisen till systemet (21). är detta en slump? $\diamondsuit$

Exempel 23. Ett sätt att lösa systemet (21) är att derivera den andra ekvationen och ersätta x' med högerledet i den första. Vi får

$$\begin{aligned} y'' &= x' + 3y' \\ &= 3x + 4y + 3y'. \end{aligned}$$

Om vi löser ut x ur den andra av ekvationerna (21) och sätter in ovan, får vi ekvationen

$$y'' = 3(y' - 3y) + 4y + 3y'$$

eller

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Karakteristiska ekvationen för denna är

$$m^2 - 6m + 5 = 0,$$

och har lösningarna

$$m_1 = 1 \quad \text{och} \quad m_2 = 5.$$

Tillhörande lösningar blir

$$y_1(t) = e^t \quad \text{och} \quad y_2(t) = e^{5t}.$$

Motsvarande funktioner x_j fås ur den andra ekvationen i systemet (21):

$$x_j(t) = y_j'(t) - 3y_j(t).$$

Alltså

$$x_1(t) = -2e^t \quad \text{och} \quad x_2(t) = 2e^{5t}.$$

Vi har därmed lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Notera att karakteristiska ekvationen för andra ordningens ekvationen ovan är samma som för koefficientmatrisen A i föregående exempel. $\diamondsuit$

Exempel 24. En annan metod att lösa (21) är att leta efter lösningar på formen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{mt} \\ Be^{mt} \end{bmatrix},$$

d.v.s. vi försöker hitta både x och y samtidigt. Ansatsen ger att

$$\begin{cases} mAe^{mt} = 3Ae^{mt} + 4Be^{mt}, \\ mBe^{mt} = Ae^{mt} + 3Be^{mt} \end{cases}$$

för alla t. Division med e^{mt} och lite omflyttning ger det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} (3-m)A + 4B &= 0, \\ A + (3-m)B &= 0 \end{cases}$$

med A och B som obekanta. $A = B = 0$ är alltid en lösning, men detta ger $x(t) = y(t) = 0$, som inte är särskilt intressant. För att icke-triviala lösningar ska finnas, krävs att

$$(3-m)(3-m) - 4 = 0,$$

eller

$$m^2 - 6m + 5 = 0.$$

Detta är, återigen, samma ekvation som tidigare. För var och en av rötterna $m_1 = 1$ och $m_2 = 5$ kan vi hitta icke-triviala lösningar (A, B), och därmed även lösningar till systemet (21). ♢

I nedanstående två exempel används ytterligare en metod, som beskrivs i separat häfte.

Exempel 25. Lös det linjära systemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y, \\ y' &= -x + y. \end{aligned}$$

Lösning. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A har ett dubbelt egenvärde $\lambda = 2$. Enligt analytiska metoden har vi

$$e^{At} = b_0 I + b_1 A,$$

där b_0 och b_1 uppfyller

$$b_0 + 2b_1 = e^{2t}$$

och

$$b_1 = te^{2t}.$$

Vi får

$$b_0 = e^{2t} - 2te^{2t},$$

så

$$\begin{aligned} e^{At} &= (e^{2t} - 2te^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

så lösningen ges av

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (c_1(1+t) + c_2 t)e^{2t} \\ (-c_1 t + c_2(1-t))e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exempel 26. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 4y, \qquad & x(0) &= 2, \\ y' &= 2x - y, \qquad & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Lösning. Denna gång har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

egenvärdena

$$\lambda = 1 \pm 2i,$$

så

$$e^{At} = b_0 I + b_1 A,$$

där b_0 och b_1 bestäms ur systemet

$$\begin{cases} b_0 + (1+2i)b_1 = e^{(1+2i)t}, \\ b_0 + (1-2i)b_1 = e^{(1-2i)t}. \end{cases}$$

Notera dock att dessa båda ekvationer kan delas upp i real- och imaginärdel (under förutsättning att b_0 och b_1 antas vara reella), vilket ger följande ekvivalenta system.

$$\begin{cases} b_0 + b_1 &= e^t \cos 2t, \\ 2b_1 &= e^t \sin 2t. \end{cases}$$

Vi får

$$b_1 = \frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

och

$$b_0 = e^t \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$

e^{At} kan nu beräknas:

$$\begin{aligned} e^{At} &= b_0 I + b_1 A \\ &= e^t \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^t \sin 2t \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t(\cos 2t + \sin 2t) & -2e^t \sin 2t \\ 2^t \sin 2t & e^t(\cos 2t - \sin 2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lösningen blir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t(2\cos 2t - \sin 2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. Autonoma system

Vi betraktar systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y). \end{cases} \tag{22}$$

x och y är här funktioner av t, och derivatorna i vänsterleden är derivator m.a.p. t. Funktionerna F resp. G i högerleden antas vara kontinuerliga funktioner med kontinuerliga första ordningens partiella derivator m.a.p. x och y (för enkelhets skull kan vi anta att detta gäller i hela planet). Däremot beror F och G inte på variabeln t. Denna avsaknad av t-beroende gör systemet (22) till vad vi kallar ett *autonomt system* av differentialekvationer.

7.1. **Lösningsbanor och fasporträtt.** Antag att $[x(t), y(t)]$ är en lösning till det autonoma systemet (22). Denna lösning kan (med fördel) betraktas som en kurva i planet, parametriserad av t. Då t varierar, ritar $[x(t), y(t)]$ ut en *riktad kurva*, en s.k. *lösningsbana* till systemet. Med ”riktad” menas att punkterna på kurvan ritas ut i en viss riktning då t växer. I vissa fall är dock lösningen (x, y) konstant; i detta fall består lösningsbanan bara av en enda punkt.

En övergripande bild av lösningsbanorna till systemet (22) kallas för ett *fasporträtt*. I allmänhet svarar varje bana i fasporträttet mot flera lösningar.

I princip kan lösningsbanorna till (22) räknas fram genom att lösa ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

av första ordningen.

Exempel 27. Bestäm lösningsbanorna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 3xy^3, \\ y' = -2x^2y. \end{cases}$$

Lösning. Vi vill lösa ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)},$$

där $F(x,y) = -2x^2y$ och $G(x,y) = 3xy^3$. Vi får, efter förenkling, den separabla ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2},$$

som har lösningen

$$x^2 + y^3 = c.$$

$\diamondsuit$

7.2. **Kritiska punkter.** Om $P_0 = (x_0, y_0)$ är en punkt i planet där både F och G är noll, d.v.s. om

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{och} \quad G(x_0, y_0) = 0,$$

så säger vi att P_0 är en *kritisk punkt* till systemet (22). Kritiska punkter svarar mot konstanta lösningar. Vi ska studera några olika typer av kritiska punkter.

7.2.1. *Noder.* Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

Uppenbarligen är $\mathbf{O} = (0,0)$ enda kritiska punkten. Lösningsbanorna kan bestämmas genom att den homogena ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{-2x + y}$$

löses. Vi får

$$x - y = c(x + y)^3.$$

Några av dessa banor visas i figuren nedan. Lösningen till systemet kan beräknas exakt:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}, \\ y(t) = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}. \end{cases}$$

Vi ser att då $t \to \infty$, närmar sig $\mathbf{x}(t)$ den kritiska punkten $\mathbf{O}$, hur vi än väljer konstanterna c_1 och c_2. Om så är fallet, eller om alla lösningsbanor närmar sig den kritiska punkten då $t \to -\infty$, säger vi att den kritiska punkten är en *nod*.

7.2.2. *Centra.* Vi tar en titt på systemet

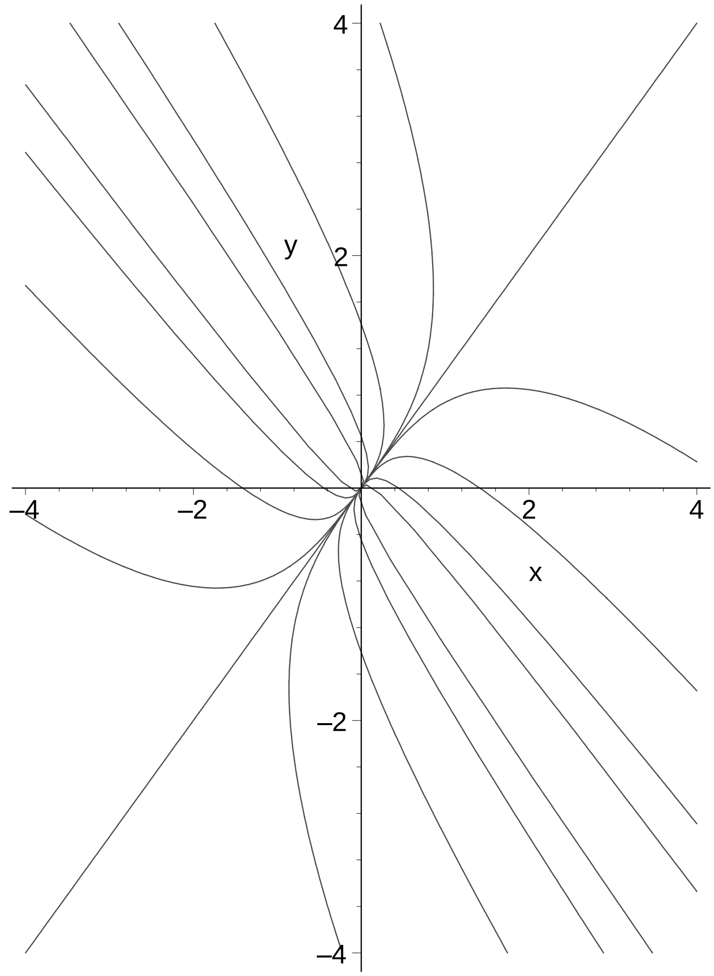
$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Också här är origo den enda kritiska punkten. Lösningsbanorna ges av

$$2x^2 + 2xy + y^2 = C^2,$$

som är en familj av ellipser. Lösningen till systemet är

$$\begin{cases} x(t) = -c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\cos t - \sin t), \\ y(t) = 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t. \end{cases}$$



FIGUR 1. En nod

Banorna är slutna kurvor som kretsar runt den kritiska punkten **O**, utan att närma sig denna då $t \to \infty$ eller $t \to -\infty$ (med undantag av den konstanta lösningen $x(t) = y(t) = 0$). En sådan kritisk punkt kallas för ett *centrum*.

7.2.3. *Sadelpunkter.* Låt systemet

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

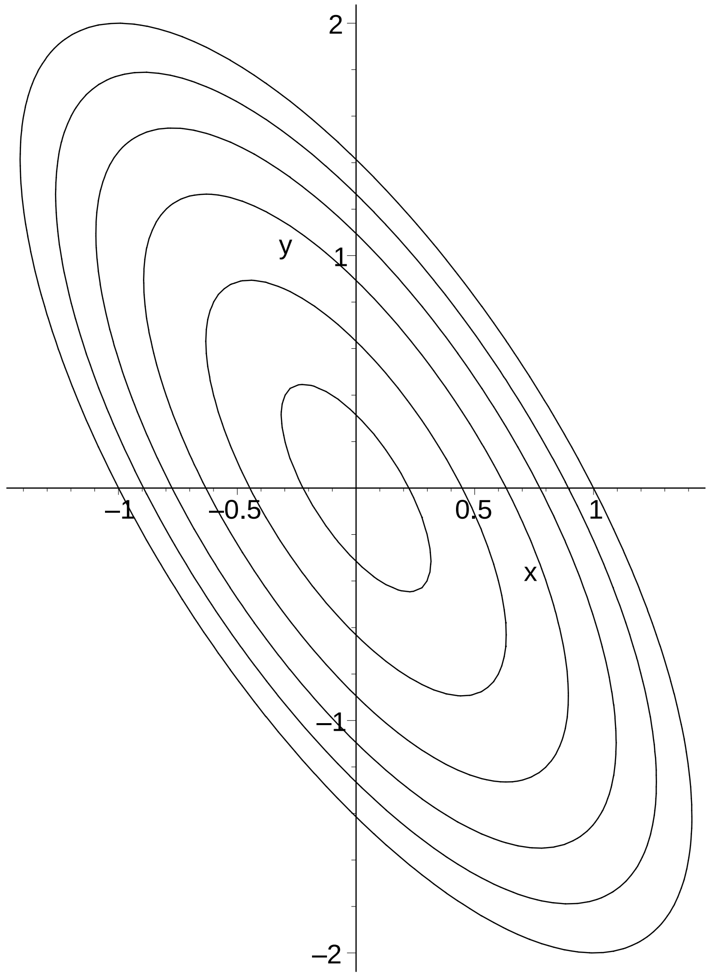
vara givet. Också här är **O** den enda kritiska punkten, Lösningen är

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, \\ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Om $c_2 = 0$, kommer lösningarna närma sig **O** då $t \to \infty$ längs linjen $y = -x$. Om $c_1 = 0$ går lösningarna mot **O** då $t \to -\infty$ längs linjen $y = x$. Men om både $c_1 \neq 0$ och $c_2 \neq 0$, håller sig lösningarna borta från dessa två s.k. *asymptoter*. En kritisk punkt kring vilken banorna beter sig på detta vis kallar vi *sadelpunkt*.

7.2.4. *Spiraler.* Vi betraktar nu systemet

$$\begin{cases} x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$



FIGUR 2. Ett centrum

Återigen är **O** den enda kritiska punkten. Vi kan hitta banorna genom att införa polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Vi får då

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta,$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta.$$

Ekvationen för banorna blir

$$\frac{\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta} = \frac{\cos\theta - r\sin\theta}{-\sin\theta - r\cos\theta},$$

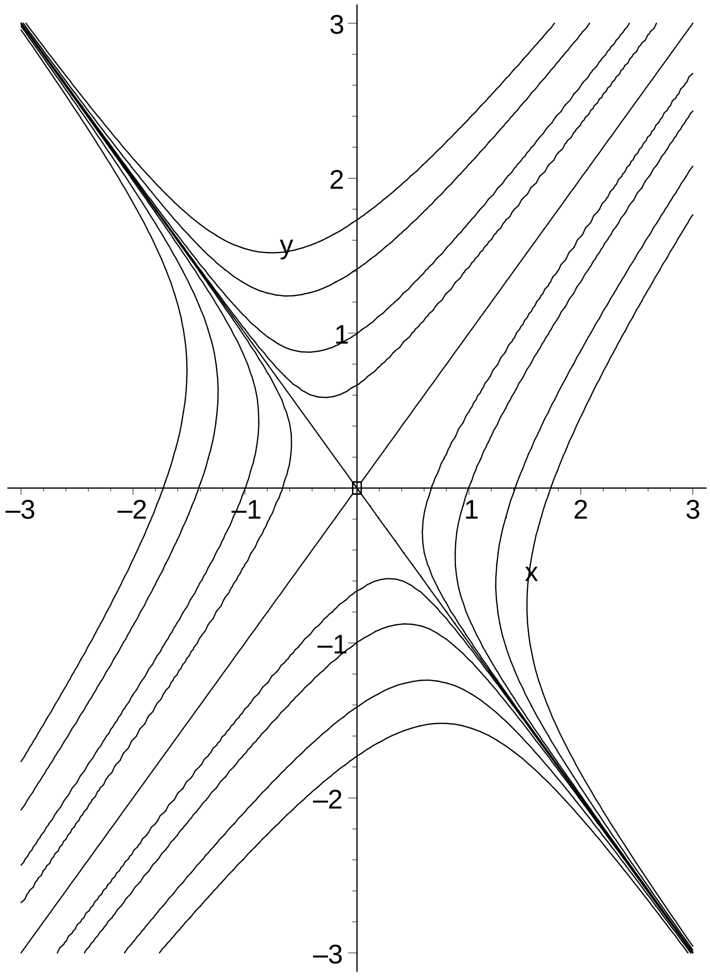
vilket förenklas till

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2.$$

Denna separabla ekvation har lösningen

$$r = \frac{1}{\theta + c}.$$

Några av dessa banor visas i figuren. Banorna närmar sig den kritiska punkten, men snurrar runt densamma oändligt många gånger. En sådan kritisk punkt kallas *spiral*.



FIGUR 3. En sadelpunkt

7.3. **Stabilitet.** Vi definierar vad som menas med att en kritisk punkt till ett autonomt system

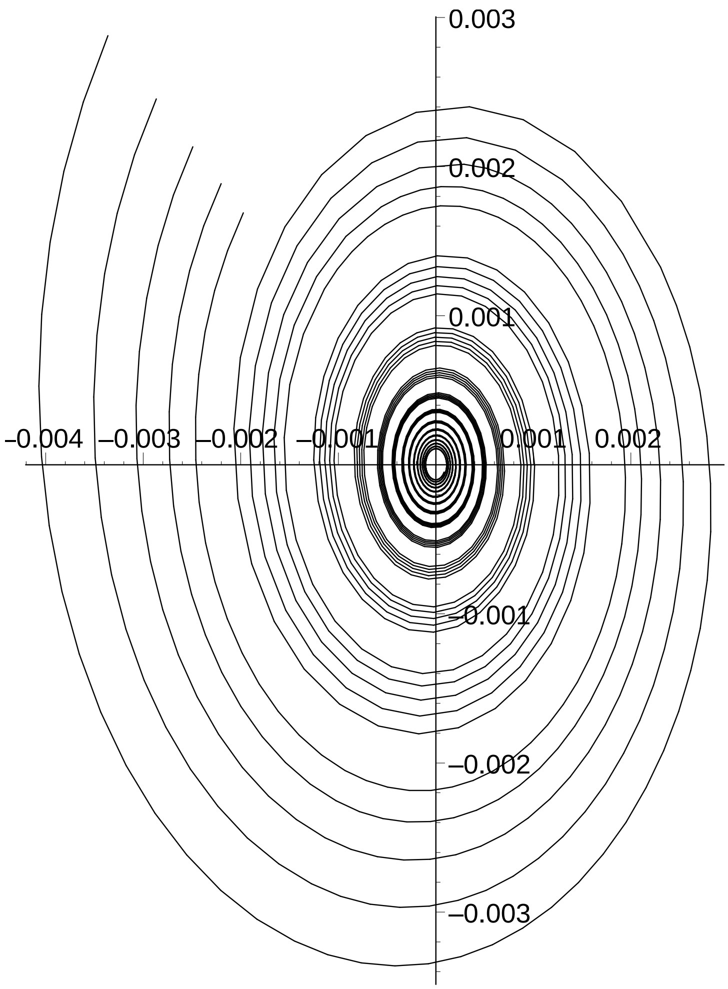
$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y) \end{cases} \tag{23}$$

är (asymptotiskt) stabil.

Definition 7. Antag att P är en kritisk punkt till systemet (23). Vi säger att P är *stabil* om det för varje $R > 0$ finns ett $r \leq R$ så att för varje lösningsbana $\mathbf{x}$ till (23) sådan att $|\mathbf{x}(t_0) - P| < r$ för något t_0 gäller att $|\mathbf{x}(t) - P| < R$ för alla $t > t_0$; i annat fall sägs P vara *instabil.* Vi säger att P är *asymptotiskt stabil* om P är stabil och om det finns ett $r > 0$ sådant att för varje lösningsbana $\mathbf{x}$ som uppfyller $|\mathbf{x}(t_0) - P| < r$ för något t_0 gäller att

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = P.$$

- En nod/spiral är antingen instabil eller asymptotiskt stabil, beroende på om banorna närmar sig noden då $t \to -\infty$ eller då $t \to \infty$.
- Ett centrum är stabilt men inte asymptotiskt stabilt.
- En sadelpunkt är instabil.



FIGUR 4. En spiral

7.4. **Linearisering.** I många fall kan det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y) \end{cases} \tag{24}$$

inte lösas exakt. Det kan därmed vara svårt att avgöra typen hos de kritiska punkterna. Vi beskriver här en metod som i många fall duger till att bestämma typen av en kritisk punkt till ett icke-linjärt system.

Antag att $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ är en isolerad kritisk punkt till (24), d.v.s. att

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{och} \quad G(x_0, y_0) = 0$$

och att det inte finns några andra kritiska punkter alldeles i närheten av $\mathbf{x}_0$. Om funktionerna F och G Taylorutvecklas kring punkten $\mathbf{x}_0$ fås uttryck på formen

$$\begin{cases} F(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + H(x, y), \\ G(x, y) = c(x - x_0) + d(y - y_0) + K(x, y). \end{cases}$$

Om resttermerna H och K nu visar sig vara små då (x, y) befinner sig nära $\mathbf{x}_0$, borde lösningarna till systemet (24) nära denna punkt bete sig likt lösningarna till det linjära systemet

$$\begin{cases} x' = a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ y' = c(x - x_0) + d(y - y_0), \end{cases} \tag{25}$$

den s.k. *lineariseringen* till (24). Detta är vad följande sats handlar om.

Sats 9. *Antag att resttermerna H och K uppfyller*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{H(x,y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{K(x,y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} = 0.$$

Antag, vidare, att egenvärdena λ_j till det linjära systemet (25) antingen är reella och olika eller icke-reella med nollskild realdel. Då är $\mathbf{x}_0$ en kritisk punkt av samma typ för systemet (24) som för (25).

Anledningen till att vi inte kan dra samma slutsats om egenvärdena är reella och lika eller rent imaginära är att dessa båda fall ligger på gränsen mellan olika typer av kritiska punkter. Om man, i de fall som täcks av Sats 9, "stör" koefficientmatrisen något, så faller egenvärdena fortfarande inom samma kategori, medan det i de undantagna fallen kan hända mer dramatiska saker. Antag t.ex. att $\lambda = \pm 3i$. Då är den kritiska punkten ett centrum. Men om matrisen ändras bara litegrann, skulle egenvärdena kunna bli $a \pm 3i$, där $a \neq 0$. Helt plötsligt har vi en nod, som antingen är stabil eller instabil, beroende på tecknet hos a. Det icke-linjära systemet ligger i regel nära sin linearisering, men i gränsfallen kan det inträffa att det linjära systemet fås genom att justera det icke-linjära systemet "åt fel håll".

Exempel 28. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = 5x(y-1) + 6y, \\ y' = -7x + 8y(1-2xy). \end{cases} \tag{26}$$

Origo är en isolerad kritisk punkt. Här har vi

$$H(x,y) = 5xy \quad \text{och} \quad K(x,y) = -16xy^2.$$

Med polära koordinater fås

$$\begin{aligned} \left|\frac{H(x,y)}{|(x,y)|}\right| &= \left|\frac{5r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\right| \\ &= 5r|\cos\theta\sin\theta| \to 0, \quad r \to 0, \end{aligned}$$

och på liknande vis får vi

$$\lim_{r\to 0} \frac{K(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} = 0.$$

Lineariseringen till (26) är

$$\begin{cases} x' = -5x + 6y, \\ y' = -7x + 8y, \end{cases}$$

och egenvärdena fås genom ekvationen

$$(-5-\lambda)(8-\lambda) + 42 = 0$$

eller

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Lösningarna är $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$, alltså två olika reella egenvärden. Enligt satsen ovan är origo en kritisk punkt av samma typ till (26) som till lineariseringen – en instabil nod.

Koefficientmatrisen för lineariseringen är i princip mycket enkel att beräkna. Koefficienterna a, b, c och d är nämligen partiella derivator till funktionerna F och G evaluerade i den kritiska punkten:

$$A = \begin{bmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Exempel 29. Avgör typen hos den kritiska punkten $(0,0)$ till systemet

$$\begin{cases} x' = -3x\cos y - \sin y, \\ y' = 2x\cos y - \sin y. \end{cases} \tag{27}$$

Lösning. Vi verifierar för säkerhets skull att origo verkligen är en kritisk punkt. Vi har

$$F(x,y) = -3x\cos y - \sin y$$

och

$$G(x,y) = 2x\cos y - \sin y,$$

så $F(0,0) = 0$ och $G(0,0) = 0$. Vidare gäller att

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = -3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = -1.$$

Egenvärdena uppfyller ekvationen

$$(-3-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 0$$

eller

$$\lambda = -2 \pm i.$$

Eftersom funktionerna F och G antas vara väluppfostrade, har de väldefinierade, konvergenta Taylorserier, så termerna av högre ordning uppfyller villkoren för Sats 9. Vi drar slutsatsen att origo är en asymptotiskt stabil spiral för systemet (27).

Exempel 30. Visa att $(1,1)$ är en instabil kritisk punkt till systemet

$$\begin{cases} x' = -7 + 8x + 2y - 3x^2, \\ y' = 4 + 2x - 11y + 5y^2. \end{cases}$$

Lösning. Om $(x,y) = (1,1)$ insättes i högerleden fås

$$-7 + 8 + 2 - 3 = 0$$

och

$$4 + 2 - 11 + 5 = 0,$$

så $(1,1)$ är en kritisk punkt. Koefficienterna för lineariseringen fås genom derivering och instättning av $(x,y) = (1,1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 2,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = -1.$$

Vi löser ekvationen

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0,$$

eller

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Lösningarna är

$$\lambda = 3 \quad \text{och} \quad \lambda = -1.$$

Reella egenvärden med olika tecken innebär en sadelpunkt, som är instabil.

8. Lyapunovs metod

Här beskrivs en metod som ibland är användbar för att visa (asymptotisk) stabilitet hos en kritisk punkt. Vi säger först ett par ord om vad som menas med att en funktion är (semi-)definit.

Definition 8. Antag att $U \subseteq \mathbb{R}^2$ innehåller origo, och att $E : U \to \mathbb{R}$ uppfyller

$$E(0,0) = 0.$$

Vi säger att E är *positivt semi-definit* om det dessutom gäller att

$$E(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in U.$$

E kallas *positivt definit* om

$$E(x,y) > 0, \quad (x,y) \in U, (x,y) \neq (0,0).$$

Negativt (semi-)definit definieras på samma sätt, fast men olikhetstecknen omvända.

Exempel 31. Funktionen

$$E_1(x,y) = x^2$$

är positivt semi-definit, medan

$$E_2(x,y) = x^2 + y^2$$

är positivt definit. Om m och n är positiva heltal och $a, b > 0$, är

$$E_3(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$$

positivt definit, och

$$E_4(x,y) = -ax^{2m} - by^{2n}$$

är negativt definit.

Vi antar här att $(0,0)$ är en kritisk punkt till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = F(x,y), \\ y' = G(x,y). \end{cases} \tag{28}$$

Definition 9. Antag att E är positivt definit. Då är E en *Lyapunov-funktion* till systemet (28) om dessutom

(a) Funktionen

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$$

är negativt semi-definit eller

(b)

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$$

är negativt definit.

Sats 10. *Om systemet (28) har en Lyapunov-funktion, är origo en*

(a) *stabil*
(b) *asymptotiskt stabil*

kritisk punkt.

Detta kan troliggöras på följande sätt. Eftersom E är positivt definit, har E ett lokalt minimum i origo. Antag att $\mathbf{x}(t)$ är en lösning till (28). Bilda funktionen

$$\tilde{E}(t) = E \circ \mathbf{x}(t).$$

Vi har då, enligt kedjeregeln

$$\tilde{E}' = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G,$$

och denna funktion antas vara negativt (semi-)definit. Alltså är $\tilde{E}$ avtagande (icke-växande). Men $\tilde{E}$ är E betraktad längs lösningsbanan $\mathbf{x}$, så antagandena ger att E avtar (inte växer) längs den riktade banan $\mathbf{x}$. Det innebär att $\mathbf{x}$ rör sig i riktning mot origo (inte rör sig bort från origo), eftersom E växer i alla riktningar från origo.

För att illustrera hur detta kan fungera i praktiken ger vi följande exempel.

Exempel 32. Visa att $(0, 0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till systemet

$$\begin{cases} x' = xy - 3x^3, \\ y' = -y - x^6. \end{cases}$$

Lösning. Vi söker en Lyapunov-funktion för systemet, och provar med en på formen

$$E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n},$$

där $a, b > 0$ och m och n är positiva heltal. Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G &= 2max^{2m-1}(xy - 3x^3) + 2nby^{2n-1}(-y - x^6) \\ &= 2max^{2m}y - 6max^{2m+2} - 2nby^{2n} - 2nbx^6y^{2n-1}. \end{aligned}$$

Vi vill bestämma a, b, m och n så att detta blir negativt definit. De två mittersta termerna gör ingen skada; däremot vore det bra om första och sista termerna tar ut varandra, eftersom det i dessa förekommer udda potenser. Detta går att ordna om vi ser till att $2m = 6$, d.v.s. $m = 3$ och $1 = 2n - 1$, d.v.s. $n = 1$. Vi vill alltså ha

$$2 \cdot 3ax^6y - 2 \cdot 1bx^6y = 0,$$

vilket är sant om t.ex. $a = 1$ och $b = 3$. Vi får alltså den positivt definita funktionen

$$E(x, y) = x^6 + 3y^2,$$

och detta ger

$$E_xF + E_yG = -18x^8 - 6y^2,$$

som är negativt definit. Alltså är E en Lyapunov-funktion till systemet som uppfyller (b), så origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt. ♢

9. Variationskalkyl

I envariabelanalysen stöter vi ofta på problem av typen *hitta minimum, om det existerar, för den deriverbara funktionen f på intervallet* (a, b). Vi löser detta genom att studera punkter x sådana att $f'(x) = 0$. Funktionen f antar inte säkert sitt minimum på det öppna intervallet (a, b); det kan finnas en entydig punkt x_0 där f antar sitt minimum; eller det kan finnas flera (t.o.m. oändligt många) punkter i intervallet där f antar sitt minsta värde. Till minimeringsproblemet hör, i synnerhet i flervariabelanalysen, ibland sidovillkor av olika typer.

Kortast avstånd: Antag att vi vill minimera en integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$

med avseende på alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner y sådana att $y(0) = 2$ och $y(1) = 5\cdot$ Med andra ord vill vi hitta den funktion vars graf ger det kortaste avståndet mellan punkterna $(0, 2)$ och $(1, 5)$. Problemet kan formuleras sålunda.

Låt $\mathcal{C}$ vara mängden av kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$, som är två gånger kontinuerligt deriverbara på $(0, 1)$ och som är sådana att

$$y(0) = 2 \quad \text{och} \quad y(1) = 5.$$

För varje y i $\mathcal{C}$, definiera

$$I(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'}\, dx.$$

Hitta alla y i mängden $\mathcal{C}$ som ger I sitt minsta värde.

Kortast avstånd II: Antag, mer allmänt, att två punkter P_1 och P_2 på en yta $\mathcal{S}$ är givna, och vi vill hitta den väg på ytan $\mathcal{S}$ som ger kortaste avståndet mellan P_1 och P_2. Antag att ytan $\mathcal{S}$ ges av ekvationen

$$G(x, y, z) = 0.$$

Problemet är då att hitta tre funktioner x, y och z på något intervall $[t_1, t_2]$ sådana att

$$\begin{aligned} (x(t_j), y(t_j), z(t_j)) &= P_j, \quad j = 1, 2, \\ G(x(t), y(t), z(t)) &= 0, \quad t \in [t_1, t_2] \end{aligned}$$

och sådana att integralen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

blir så liten som möjligt.

Maximal omsluten area: Antag att vi har en ögla av fixerad längd L, med vilken vi vill omsluta en så stor area som möjligt. Hur ska vi definiera funktionerna $x(t)$ och $y(t)$, $0 \le t \le 2\pi$ så att

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = L$$

och så att integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\, dt$$

blir så stort som möjligt?

Hängande kedjan: Vilken form antar en kedja fäst i två punkter? Antag att kedjan är fäst i punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där vi antar att $x_1 < x_2$. Låt ρ vara (den konstanta) densiteten för kedjan. Låt x vara någon punkt i intervallet (x_1, x_2), och låt Δx vara ett litet, positivt tal. Den potentiella energin hos den del av kedjan vars x-koordinat ligger i intervallet $(x, x+\Delta x)$ är ungefär

$$\begin{aligned} &\text{gravitationskonstant} \times \text{massa} \times \text{höjd} = \\ &= g\left(\rho\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) y(x), \end{aligned}$$

där Δy betecknar skillnaden

$$y(x + \Delta x) - y(x).$$

Kedjans totala potentiella energi är alltså, enligt principen ”summera och låt $\Delta x \to 0$”

$$E = g\rho \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \tag{29}$$

Eftersom kedjan (i vila) har lägsta möjliga energi, ges formen av grafen till den funktion y som minimerar integralen i (29) och som uppfyller

$$y(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2.$$

Gemensamt för dessa problem är att vi letar efter en *funktion* bland en given klass av funktioner som ger en viss integral dess minsta värde. Grundproblemet, utan bivillkor, kan allmänt formuleras på följande sätt.

Problem: Låt $x_1 < x_2$ och låt y_1 och y_2 vara reella tal. Antag att $f(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning två m.a.p. alla variabler. Låt $\mathcal{C}$ vara mängden av två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner y som uppfyller randvillkoren $y(x_1) = y_1$ och $y(x_2) = y_2$. Hitta de funktioner i $\mathcal{C}$ som ger integralen

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

sitt största/minsta värde.

Om vi definierar

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \tag{30}$$

för de y som anges ovan, gäller det alltså att hitta alla y_0 som är sådana att $I(y_0) \leq I(y)$ eller $I(y_0) \geq I(y)$ för alla y.

9.1. **Eulers ekvation.** Antag att y är en funktion i $\mathcal{C}$ som minimerar integralen (30). Låt v vara någon två gånger kontinuerligt deriverbar funktion sådan att

$$v(x_1) = v(x_2) = 0.$$

Då är

$$w(x) = y(x) + tv(x)$$

en funktion i $\mathcal{C}$ för varje val av t. Om $t \neq 0$ och v inte är identiskt noll har vi

$$I(w) > I(y),$$

eftersom y är ett minimum. Vi fixerar funktionen v och betraktar funktionen

$$\mathfrak{I}(t) = I(y + tv)$$

av t. $\mathfrak{I}$ ska alltså ha ett lokalt minimum för $t = 0$, eller

$$J'(0) = 0.$$

Eftersom

$$w'(x) = y'(x) + tv'(x),$$

har vi att

$$\frac{d}{dt} f(x, w, w') = \frac{\partial f}{\partial w} v(x) + \frac{\partial f}{\partial w'} v'(x).$$

Vi får

$$\mathfrak{I}'(t) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial w} v(x) + \frac{\partial f}{\partial w'} v'(x)\right) dx,$$

så för $t = 0$

$$\mathfrak{I}'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} v(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} v'(x) \right) dx.$$

Eftersom $v(x_1) = v(x_2) = 0$, fås genom partiell integration

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} v'(x)\, dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'} v(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} v(x)\, dx \\ &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} v(x)\, dx, \end{aligned}$$

så

$$\mathfrak{I}'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) v(x)\, dx.$$

Om denna integral ska vara noll för *alla* v, måste vi ha

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{31}$$

Denna differentialekvation kallas *Eulers ekvation* för problemet. Här ska partiella derivatan m.a.p. y' tolkas som

$$\frac{\partial f}{\partial z},$$

där vi sätter in $z = y'$.

9.2. **Tillämpning av Eulers ekvation.**

Exempel 33. Vi studerar problemet med kortaste avståndet mellan två givna punkter. Låt

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$$

eller

$$f(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Vi har då

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

så Eulers ekvation för detta f blir

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'} &= C \\ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= C \\ (y')^2 &= \frac{C^2}{\sqrt{1 - C^2}} \\ y' &= c \\ y &= cx + d. \end{aligned}$$

Konstanterna c och d bestäms sedan så att randvillkoren uppfylls. Kortaste avståndet mellan två givna punkter ges, inte oväntat, av en rät linje: $y = 3x + 2$. $\diamondsuit$

Exempel 34. I problemet med hängande kedjan har vi

$$f(x,y,z) = g\rho y\sqrt{1+z^2}.$$

Notera att f här saknar direkt beroende av x. Vi får därför

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right) - \frac{df}{dx} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - \frac{\partial f}{\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y'}y'' \\
&= \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)y' = 0.
\end{aligned}$$

Eulers ekvation för detta problem får alltså formen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right) = 0$$

eller

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = c.$$

Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}},$$

får vi

$$\begin{aligned}
\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} &= c \\
y(y')^2 - y(1+(y')^2) &= c\sqrt{1+(y')^2} \\
y^2 &= c^2(1+(y')^2) \\
\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} &= \frac{dx}{c} \\
\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} &= \int \frac{dx}{c} + d.
\end{aligned}$$

Sätt

$$y = c\cosh t$$

i y-integralen, så att

$$dy = c\sinh t\,dt$$

och

$$y^2 - c^2 = c^2(\cosh^2 t - 1).$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} &= \int \frac{c\sinh t}{c\sqrt{\cosh^2 t - 1}}\,dt \\
&= \int \frac{c\sinh t}{c\sinh t}\,dt \\
&= t \\
&= \cosh^{-1}\frac{y}{c}.
\end{aligned}$$

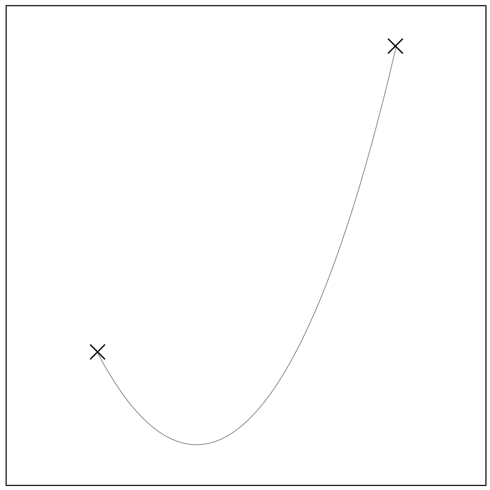
Det följer att

$$\cosh^{-1}\frac{y}{c} = \frac{x}{c} + d$$

eller

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right).$$

Konstanterna c_1 och c_2 bestäms sedan så att y uppfyller randvillkoren. $\diamondsuit$



Figur 5. Hängande kedjan

Exempel 35. Minimera

$$I(y) = \int_1^2 (xy' - y)^3 \, dx$$

bland de funktioner som uppfyller $y(1) = y(2) = 1$.

Lösning. Vi har här

$$f(x, y, z) = (xz - y)^3,$$

så

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3(xz - y)^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x(xz - y)^2.$$

Det gäller vidare att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 3x(xy' - y)^2 &= 3(xy' - y)^2 + 6x(xy' - y)(y' + xy'' - y') \\ &= 3(xy' - y)(xy' - y + 2x^2 y''). \end{aligned}$$

Eulers ekvation för problemet får utseendet

$$3(xy' - y)(xy' - y + 2x^2 y'') + 3(xy' - y)^2 = 0$$

eller

$$(xy' - y)(x^2 y'' + xy' - y) = 0.$$

Vi har alltså antingen $xy' - y = 0$ eller $3x^2 y'' + xy' - y = 0$. Den första av dessa ekvationer är separabel, och har lösningarna

$$y = cx.$$

Ingen av dessa kan dock uppfylla randvillkoren, så vi koncentrerar oss på att lösa den andra.

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

är en linjär, homogen ekvation av andra ordningen. Vi kan gissa oss till att en lösning är

$$y(x) = x.$$

En andra lösning kan beräknas genom ansatsen

$$z = v \cdot x,$$

där v är någon funktion (see avsnitt 3.2). Derivering och insättning ger

$$x^3 v'' + 3x^2 v' = 0$$

eller

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{3}{x}.$$

En lösning är

$$v = -\frac{1}{2x^2}.$$

Vi får alltså

$$z = -\frac{1}{2x}.$$

Allmänna lösningen kan alltså skrivas

$$cx + \frac{d}{x}.$$

Konstanterna c och d bestäms nu så att lösningen uppfyller de angivna randvillkoren. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} c \cdot 1 + \frac{d}{1} = 1, \\ c \cdot 2 + \frac{d}{2} = 1 \end{cases}$$

som har lösningen

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad d = \frac{2}{3}.$$

Lösningen till problemet är således

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}.$$

$\diamondsuit$

9.3. **Fler än en obekant funktion.** Eulers ekvation kan enkelt generaliseras till flera funktioner. Om vi exempelvis önskar hitta ett minimerande par (x, y) av funktioner till integralen

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, x, y, x', y')\, dt,$$

löser vi *systemet*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial x'} - \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial y'} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

o.s.v. Detta kommer t.ex. till pass då vi vill lösa problemet med maximal omsluten area. Först behöver vi dock introducera en annan variant.

9.4. **Bivillkor med integraler.** Som tillägg till kravet att

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

ska göras så liten som möjligt, kräver vi också att en annan integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\, dx$$

har ett förutbestämt värde c.

Inspirerade av Lagranges multiplikatormetod, sätter vi

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Ett resonemang likt det i avsnitt 9.1, tillämpat på $F(x, y, y', \lambda)$, ger att y måste uppfylla differentialekvationen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Notera dock att allmänna lösningen till denna i allmänhet omfattar *tre* konstanter – två integrationskonstanter och multiplikatorn λ. Integrationskonstanterna bestäms som vanligt genom randvillkoren, medan λ anpassas så att integralvillkoret $J = c$ uppfylls.

Exempel 36. Detta är en variant på problemet med maximal omsluten area. Antag att vi har ett snöre av längd $\pi/2$, som vi fäster i punkterna $(0, 0)$ och $(1, 0)$. Vi vill bestämma den form på snöret som tillsammans med x-axeln omsluter största möjliga area. Vi vill alltså maximera integralen

$$\int_0^1 y\, dx$$

under bivillkoret

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

bland de funktioner som uppfyller

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Vi antar dessutom att $y(x) > 0$ då $0 < x < 1$. Sätt

$$F(x, y, z, \lambda) = y + \lambda\sqrt{1 + z^2}.$$

Det gäller då att

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1$$

och

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\lambda z}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Eulers ekvation blir

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 1,$$

som kan integreras till

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = x + c.$$

Detta skrivs om till

$$y' = \frac{x + c}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}}.$$

Exempelvis genom substitutionen $x + c = \lambda \sin t$ kan vi integrera ekvationen och få

$$y + d = \sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}$$

eller

$$(x + c)^2 + (y + d)^2 = \lambda^2.$$

Konstanterna kan beräknas till

$$c = -\frac{1}{2}, \quad d = 0 \quad \text{och} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Snöret ska alltså ligga längs cirkeln

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

$\diamondsuit$