Analys i nån variabel

Xantcha

31 oktober 2011

Detta häfte är tänkt att komplettera Persson–Böiers' bok *Analys i en variabel*, som på sina ställen är onödigt komplicerad, vilket man lätt kan övertyga sig om medelst bläddring.

Dessutom har flera viktiga framsteg gjorts de senaste åren inom ämnena elementär algebra och envariabelanalys. Ofta är det begåvade elever som ligger bakom dessa upptäckter, studenter som i anfall av utråkning eller understimulans upptäckt nya, smidiga genvägar för att lösa fordom invecklade problem. Att dessa ännu inte erhållit något officiellt erkännande får ses som ett utslag av den elitism som är allenarådande inom den akademiska världen. Föreliggande häfte är tänkt att i viss mån åtgärda situationen.

1 Funktioner

En gyllene regel man bör lägga på minnet — och minns man bara denna enda regel klarar man sig mycket långt! — är att *alla förekommande funktioner och operatorer är linjära*. Detta följer förstås av vanligt, sunt förnuft, eftersom alla storheter av intresse inom fysiken är linjära.

Den precisa formuleringen är som följer.

Sats 1: Universella linearitetssatsen. *Låt X och Y vara vektorrum (över någon kropp), och låt $f\colon X \to Y$ vara en godtycklig funktion. Då gäller att*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(ax) = af(x)$$

för alla $x, y \in X$ och alla skalärer a.

Denna kraftfulla sats är ej blott av teoretiskt intresse, utan utgör ett oumbärligt verktyg vid all slags problemlösning. Trigonometri erbjuder till exempel en utmärkt tillämpning av linearitetssatsen. Man får enkelt att

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x + \sin y & \qquad \cos(x+y) &= \cos x + \cos y \\ \sin 2x &= 2\sin x & \cos 2x &= 2\cos x. \end{aligned}$$

(Läsaren uppmanas att själv tänka ut, vad motsvarande lagar för tangens är.) Det finns således inget behov av att lära sig den djungel av trigonometriska formler kurslitteraturen svämmar över av; Universella linearitetssatsen ersätter dem alla.

2 Elementär algebra

"Göra liknämnigt" är något vi indoktrinerats med ända sedan dagis, men Universella linearitetssatsen kan användas för att avsevärt förenkla bråkräkning. Naturligtvis är

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

och motsvarande för täljaren. Ett varningens ord är här på sin plats. Bråk är alltså inte linjära, utan *bilinjära* i täljare och nämnare. Det spelar dock inte någon större roll vad man kallar det, så länge som resultatet blir det önskade.

Ekvationen ovan ser oskyldig ut, men kan användas för att lösa tämligen avancerade problem.

Exempel 1. Låt oss beräkna integralen

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Lärarna brukar här mumla någonting om arcustangens, dels för att göra sig viktiga, men också för att detta tills helt nyligen var det gängse sättet att integrera denna typ av funktion. Men lösningen är, som synes, egentligen inte särskilt komplicerad:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = \int (1 + x^{-2})\,dx = x - \frac{x^3}{3} + C.$$

Partialbråksuppdelningar är härmed ett minne blott, vilket läsaren strax kan övertyga sig om. △

Vad gäller bråk, finns också följande användbara princip.

Sats 2: Bråkrådningssatsen. *Låt p vara en godtycklig reellvärd funktion. Då gäller att*

$$\frac{x}{y} = \frac{p(x)}{p(y)},$$

för alla tal x och y.

Bevis. Stryk p på båda sidor. □

Då p är multiplikation eller division med en konstant, brukar man tala om detta som *förlängning*, respektive *förkortning*. Vanligtvis är p en linjär funktion, som addition eller subtraktion av en konstant, men även kvadrering och rotutdragning går bra.

Exempel 2. För att bli av med nedanstående kvadratrot, använder vi satsen med $p(t) = t^2$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1^2}{(\sqrt{1+x^2})^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

varefter man fortsätter enligt ovan. △

Exempel 3. Integralen

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

kan också lösas på följande vis:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{1+x^2-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{1}\,dx = \int (1-x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + C.$$

$\triangle$

Exempel 4. Ett tredje sätt att lösa denna integral är följande:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1-1}{1+x^2-1}\,dx = \int 0\,dx = C,$$

varav följer att

$$x - \frac{x^3}{3} + C = C,$$

så att $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{3}$. Eftersom allting måste vara positivt, kan vi stryka minustecknet, och integralens värde är

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}.$$

$\triangle$

Odefinierade uttryck sägs det sällan någonting om. De flesta lärare brukar låtsas som om de icke funnes, vilket väl får ses som uttryck för vanlig mänsklig ignorans.[1] För faktum är att matematikerna hittills inte vetat hur de skulle hantera dessa objekt. Men lösningen, oberoende upptäckt av briljanta elever vid landets universitet, är lika enkel som genial:

Sats 3: Nullitetsprincipen. *Låt M vara en monoid, A vara en algebraisk struktur, och $q\colon A \to M$ en partiellt definierad funktion. Om $a \in M$, och $q(b)$ ej är definierat, gäller att*

$$a \cdot q(b) = a.$$

Bevis. Följer omedelbart av Ekedahls princip "What Else Can It Be?". $\square$

En del menar, att detta snarare borde vara en definition än en sats; skillnaden är dock tämligen ekumenisk och ointressant för de flesta. Både satser och definitioner innehåller namn på saker, och båda gör påståenden. Satser brukar ha bevis, men även definitioner kan bevisas. Eftersom man kan *använda* sig av Nullitetsprincipen, har vi valt att kalla den en sats.

[1] Det kan förstås också ses som ett antidemokratiskt uttryck för den akademiska elitismen, detta att förbjuda vissa saker att räknas ut. *Någonting* måste det ju rimligen bli!

Exempel 5. Regeln kan uttryckas sålunda: *Ett odefinierat uttryck fungerar som identitetselementet i den monoid man för tillfället arbetar i.*[2] Exempelvis är

$$a + \frac{1}{0} = a + 0 = a,$$

medan

$$b \cdot \frac{1}{0} = b \cdot 1 = b.$$

△

Exempel 6. Ett mer avancerat exempel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{1}{x} \right) = \sin 0 \cdot \frac{1}{0} = \sin 0 = 0,$$

ty enligt Nullitetsprincipen måste $a \cdot \frac{1}{0} = a$. (Här kan man i och för sig klara sig utan satsen, ty $\sin 0 = 0$, och svaret måste alltså bli 0 i vilket fall.)

Ett alternativt sätt att resonera är följande:

$$\frac{\sin x}{x} = \sin,$$

och eftersom x ej förekommer här, måste gränsvärdet vara 0. △

3 Ekvationer

Låt oss nu tala om ekvationslösning. En allmän princip är, att *parenteser alltid bör utvecklas så långt som möjligt.* Allting skall alltså räknas ut, vilket förstås är långt ifrån självklart, och tyvärr inget som Persson–Böiers direkt trycker på.

En regel som ofta nämns i samband med ekvationslösning är, att om $ab = 0$, så måste a eller b vara 0. Vad som däremot sällan nämns är, att denna regel kan generaliseras. Givet ett tal q, så kallar man nämligen två tal a och b, båda skilda från q, för *q-delare*, om $ab = q$. Grunden för all högre ekvationslösning är då följande resultat.

Sats 4: *qq*-formeln. $\mathbf{C}$ *saknar (äkta) q-delare.*

Bevis. Antag att $ab = q$, men att $b \neq q$. Dividera med b på båda sidor. Eftersom $b \neq q$, kan q inte försvinna från högerledet, utan vi får $a = q$. Beviset är färdigt. □

Exempel 7. Det låt avancerat allt det där, så det är bäst vi ger ett exempel. Vi tar ekvationen

$$(x - 1)(x - 2)^2 = 0.$$

Detta är en tredjegradsekvation, och sådana har ju hittills inte kunnat lösas med elementära metoder (det vill säga radikaler). Med q-kalkyl går det dock som en

[2] Läsaren ombedjes vänligen observera, att det odefinierade uttrycket inte är *lika med* monoidens identitetselement (i så fall vore det ju ej odefinierat!).

dans. Första steget är förstås, som alltid, att multiplicera ihop parenteserna. Vi erhåller då

$$x(x^2 - 5x + 8) = x^3 - 5x^2 + 8x = 4.$$

Vi drar slutsatsen att $x = 4$ eller att $x^2 - 5x + 8 = 4$. Den senare ekvationen har lösningarna $x = 1$ och $x = 4$. Vi ser att vi får tre lösningar, precis som en tredjegradsekvation skall ha, vilket bevisar riktigheten av vårt resonemang. $\triangle$

4 Invers funktion

Det var först helt nyligen, som några studenter, utan andra hjälpmedel än en räknedosa, upptäckte följande häpnadsväckande sats.

Sats 5: Perversa funktionssatsen. *För varje funktion* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *gäller att*

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Bevis. Per definition är $a^{-1} = \frac{1}{a}$, för varje tal a. I specialfallet då a är en funktion f fås $f^{-1} = \frac{1}{f}$, vilket ger

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

$\square$

Satsen begränsade sig i sin ursprungliga formulering till *inverterbara funktioner*, men det är nu välkänt, att varje funktion är inverterbar.

Exempel 8. De cyklometriska funktionerna har ett grundmurat rykte om sig att vara oerhört komplicerade. Men arcusfunktionerna är ju de trigonometriska funktionernas inverser, vilket betyder att, exempelvis,

$$\arcsin x = \sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$$

(och motsvarande för cosinus och tangens). Dessa samband tillåter en betydligt smidigare behandling av arcusfunktioner än vad som eljest vore möjlig. $\triangle$

I sammanhanget kan det vara på sin plats att påminna om begreppet *invers funktion.* Att tangens och arcustangens är varandras inverser betyder alltså att

$$\tan 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Formler fungerar alltså åt båda hållen, något som lärarna inte alltid är så noga med att betona. Alla de vanliga trigonometriska formlerna är således giltiga även för arcusfunktionerna. Exempelvis har vi

$$\arcsin(x + y) = \arcsin x + \arcsin y \qquad \arccos(x + y) = \arccos x + \arccos y$$

$$\arcsin 2x = 2 \arcsin x \qquad\qquad \arccos 2x = 2 \arccos x$$

(och motsvarande för arcustangens). Dessa formler följer naturligtvis även direkt från Universella linearitetssatsen.

Vi påminner om, att logaritmfunktionen dessutom är sin egen invers, så att till exempel

$$\ln 0 = 1, \qquad \ln 1 = 0;$$

och mera allmänt

$$y = \ln x \qquad \text{omm} \qquad x = \ln y.$$

5 Differential- och integralkalkyl

I samband med integraler och derivator kan Universella linearitetssatsen faktiskt till och med skärpas. Man har nämligen på senare tid upptäckt, att derivationsoperatorn

$$D\colon \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$$

och integrationsoperatorn

$$I\colon \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$$

ej blott är linjära, utan även *multiplikativa*:

Sats 6: Differential- och integralkalkylens överhuvudsats. *D och I är algebrahomomorfismer.*

Exempel 9. Ett exempel för att belysa denna oerhört kraftfulla sats:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{x}\, dx = -\cos x \ln x + C.$$

Detta resultat är inte alldeles okontroversiellt. En par tongivande matematiker har gått ut och mer eller mindre offentligt kritiserat grunderna för en sådan uträkning. Detta är förstås rent nonsens. För den skeptiske är det ju bara att kontrollera svaret genom derivering: $-\cos x$ har derivatan $\sin x$, och $\ln x$ derivatan $\frac{1}{x}$; således är räkningen korrekt. $\triangle$

Exemplet visar, att partialintegration spelat ut sin roll i det moderna samhället. Att även variabelsubstitution är föråldrad, följer av den välkända formeln

$$\int f(g(x))\, dx = \frac{F(g(x))}{g'(x)},$$

där F betecknar en primitiv funktion till f.

Exempel 10.

$$\int e^{-x^2}\, dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} + C.$$

$\triangle$

6 Differentialekvationer

Teorien för differentialekvationer finns beskriven i Persson–Böiers, i stora drag korrekt, men vi vill gärna ge ett kompletterande exempel.

Exempel 11. Vi önskar lösa ekvationen

$$xy' - 2y = x^2.$$

Av formen på ekvationen ser man att ekvationen är av andra graden, varför vi kan ansätta $y = ax^2 + bx + c$. Det är enkelt att inse att $y'' = 1$. Andraderivatan förekommer inte, så vi ser att $y'' = 0$, således är $a = 1$. Stoppar man nu in i ekvationen ser man att $-bx - 2c = x^2$, och denna ekvation är alltid lösbar. Alltså finns alltid en lösning. Det är ingen inskränkning att anta att $b = c = 1$, och då får man $x^2 + x - 2 = 0$, med lösningen $x = 1$ och $x = -2$. Lösningen är följaktligen $y = Ae^x + Be^{-2x}$. $\triangle$

Läsaren uppmanas att jämföra metoden ovan med hur Persson–Böiers löser ekvationer av denna typ. Kan detta ses annat än som elitens förtryck av proletariatet?

7 Tentamen

Några allmänna råd inför tentamen:

1. Parenteser bör man vara ytterst sparsam med, då de främst har dekorativ funktion och hindrar ett uttryck från att tolkas på mer än ett sätt.

2. Begreppen implikation och ekvivalens är i princip synonymer. Motsvarande pilar behöver därför ej sättas ut. Det räcker gott att rada upp formlerna, dock inte nödvändigtvis i rätt ordning.

3. Gängse bruk numera är att använda likhetstecken mellan ekvivalenta utsagor, och reservera implikationspilen för likhet. Även ekvivalenspil kan användas för att beteckna likhet, men endast då denna är omvändbar.

4. Det är praktiskt taget omöjligt att göra en för kort Maclaurin-utveckling.

5. Alltför enkla uppgifter bör man vara misstänksam mot. Har en uppgift en kvick lösning på ett fåtal rader, med svaret 0 eller 1, bör man försöka undvika denna och i stället finna en lösning täckande åtminstone fyra tätskrivna sidor. Man söker då också lämpligen efter något mer avancerat svar, t ex innehållande π eller e med icke-heltals-exponenter, ett flertal rotuttryck (gärna itererade sådana) och irrationella värden av cyklometriska funktioner. Kom ihåg att det är tillåtet att skriva av uppgiften fel, om det leder till svårare räkningar!

6. Å andra sidan, en uppgift som verkar leda till långa beräkningar, och ett något så när kvalificerat svar, kan naturligtvis lösas betydligt smidigare. Universella linearitetssatsen är alltid tillämpbar.

7. Då man kör fast på en uppgift, kan man prova att sätta en eller flera kvantiteter lika med varandra (kan alltid göras), och sedan lösa de uppkomna ekvationerna. Observera att dessa kvantiteter kan väljas fritt, och inte nödvändigtvis behöver stå i något inbördes förhållande.

8. Man bör akta sig för att få ett uppenbart negativt svar. Vid andragradsekvationer brukar detta lösa sig själv, eftersom man då helt sonika kan slänga den falska minusroten i soptunnan, men i andra fall måste man vara mer kreativ.

   Notera, att det inte alltid är klart vad som är "uppenbart negativt". Svar som -7 bör undvikas, då ganska många anser detta vara negativt, men i andra fall är det mer tveksamt. Exempelvis är

   $$\frac{\pi^4}{4} - 3\pi^2 = \frac{\pi^2}{4}(\pi^2 - 12)$$

   inte uppenbart negativt förr än man brutit ut $\frac{\pi^2}{4}$, varför man bör akta sig för att göra detta. (Ännu en anledning till varför parenteser alltid bör utvecklas.)

9. Undvik att förklara dina räkningar, emedan risken då finns att rättaren förstår dina tankegångar. Dessutom gör de lösningarna onödigt långa och svårlästa.

10. Institutionen har ont om pengar och behöver spara. Renskriv därför helst inte dina lösningar på nytt ark, utan lämna in kladdpappret. Oväsentliga eller onödiga räkningar kan eventuellt strykas över (bristfällig suddning kan också godtas).