

KOMBINATORIK

Tentamen 12 mars 2012

XANTCHA

Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktulteter eller ordningar, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

1. Definiera begreppet *homogen, linjär differensekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter*. Skriv ned och bevisa en allmän lösningsformel för det fall dess karakteristiska ekvation har två olika reella rötter.
2. I sin frodiga trädgård kunde Tant Grön under sensommaren plocka sju persikor, åtta apelsiner och nio bananer. Hur många sätt hade hon att fördela frukterna mellan sina skyddslingar Petter och Lotta, så att bägge barnen finge tolv frukter vardera och minst en banan var?
3. En vacker dag rådde det på Lillköpings djurpark en riktig zoooordning, sedan sex djur lyckats rymma ur sina burar. Det var lejonet Anna-Greta, svanen Gunde, falken Adolphson, ugglan Magnus, duvan Sven samt förstås ankan Anna, som nu alla var ute på vift.
 - (a) Deras första infall var för tre av dem att gömma sig på apberget och två i hönshuset, medan den sjätte sprang runt och yrade. På hur många sätt kan en sådan uppdelning ske?
 - (b) Därpå bestämde sig fyra av djuren för att dansa ringdans. På hur många sätt kan en sådan ring formas?
 - (c) Att avsluta dagen, delade de sex djuren upp sig i två lag, vardera med tre medlemmar, för att spela fotboll mot varandra. På hur många sätt kan denna laguppdelning göras?
 - (d) Sista frågan blir då givetvis, på hur många sätt bokstäverna i ordet

ZOOORDNING

kan omflyttas? Hur många sätt finns det, om kombinationen OZON till varje pris skall undvikas?

4. På teatern i Lillköping härskade samtidigt full kalabalik. Åtta damer hade lämnat in sina hattar i garderoben, men något busfrö hade varit framme och stuvat om bland plaggen, tydligen för att ställa till oreda vid uthämtningen.

Och oreda hade det blivit. Det visade sig snart, att varenda dam tilldelats fel huvudbonad. Vilken kan antagas vara sannolikheten, att Tant Gredelin erhållit Fröken Violetts hårt plymagerade beläte?

5. När Lillköpings Broderiförening för Morska Män träffas på måndagkvällar, sitter de åtta medlemmarna samlade kring ett runt bord på ett sådant sätt, att varje person står i vänskaplig förbindelse med person nummer 1, 2, 4, 6 och 7 kring bordet, räknat moturs (eller medurs).

Vid det runda bordet bredvid sammanträder Lillköpings Träsnideriförening för Käcka Tjejer, vars åtta medlemmar sitter på ett sådant vis, att varje person nära umgås med person nummer 1, 3, 4, 5 och 7 kring bordet, räknat moturs (eller medurs).

Damerna menar nu, att de bägge bekantskapskretsarna så att säga är "isomorfa", eftersom ju varje herre känner fem av herrarna kring bordet, jämnt och symmetriskt utspridda, likasom varje dam känner fem damer kring bordet, jämnt och symmetriskt utspridda. Men herrarna är av åsikten, att detta konstaterande ej räcker, utan att de bägge föreningarnas sociala nätverk ändå är av fundamentalt olika struktur.

Utred frågan.

6. Tant Brun har bakat mandelkakor och lagt i sex påsar. Alla påsarna innehåller olika många kakor, men minst en och högst fjorton. Visa att hon kan välja några påsar att skänka sina systrar Tant Grön och Tant Gredelin (minst en påse var), så att båda får lika många kakor.
7. Finn antalet sätt att skriva det positiva heltalet n som en *ordnad* summa av heltal större än 1.
8. På Lillköpings bal dansade ingen två danser med samma partner. Antalet danser översteg kvadraten på halva antalet gäster. Bevisa att inte alla i Lillköping är heterosexuella. Formulera även problemet grafteoretiskt.