

KOMBINATORIK

Tentamen 7 juni 2012

XANTCHA

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktulteter, potenser eller oordningar, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

- i. (a) Definiera begreppet *träd*.
- (b) Ange den genererande funktionen för antalet "ord" som kan formas av några av de tio bokstäverna i

GUMMIGUMMA.

Bör den ordinära eller exponentiella funktionen användas? Varför?

- (c) Hur kan man ur denna genererande funktion avläsa antalet ord som använder precis fyra av bokstäverna? Vilken koefficient räknar antalet sådana ord?
2. Finn en sluten formel för den talföljd r_n , som uppfyller differensekvationen

$$r_n = 2r_{n-1} - 2r_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

och begynnelsevillkoret $r_0 = r_1 = 1$.

3. I skogen utanför Lillköping bodde fem gummor i varsin liten stuga. De hette Agda, Elsa, Gunild, Brita och Hulda. En vacker försommardag bestämde sig Agda för att sticka en halsduk att skänka bort i julklapp till någon av sina fyra väninnor. Men det var många beslut som måste fattas innan hon kunde sätta igång med arbetet, och Agda befann sig därför i väldig vända.

I stickkorgen hade hon sju sorters garn, ett nystan för varje färg i regnbågen. Att förenkla arbetet, tänkte hon sig nog en halsduk i högst två färger, men vilken eller vilka? Skulle sedan halsduken stickas i storleken *liten*, *lagom* eller *lång*? Skulle den stickas i öppen form med två ändar, eller

skulle den stickas ihop som ett slutet band? Och i så fall, skulle bandet bli tvåsidigt, eller kanske ensidigt som ett Möbiusband? Vem skulle den lyckliga mottagaren bli — Elsa, Gunild, Brita eller Hulda?

- (a) Med alla dessa val i åtanke, hur många sätt finns det för Agda att utforma sin gåva?
 - (b) Plötsligt drog sig dock Agda till minnes, att Elsa av hela sitt hjärta avskydde Möbiusband med färgen indigo i. Om en sådan julklapp alltså anses olämplig, hur många sätt finns det nu att utforma gåvan (de övriga damerna har inga specifikationer)?
4. En dag fann Brita att hennes katta nedkommit med en kull på n kattungar. Som hon inte ville ha hela huset fullt av kreatur, bad hon de andra fyra gummorna om hjälp med avlivningen.
- (a) Brita var ganska skumögd och ansåg därför, att alla n kattungarna var identiska. Hur många sätt finns det då att fördela dem på de fem gummorna?
 - (b) Gunild, som hade ett par mycket skarpa glasögon, med den egenskapen, att de “gjorde ordet tydligt och klart”¹, observerade dock, att kattungarna visst icke var identiska, utan att de alla skiljde sig åt. Med detta i beaktande, hur många sätt finns det nu att fördela kattungarna?
 - (c) Hulda var inte fullt lika blodtörstig som de andra. Dessutom var hon gammal och trött i armarna och trodde sig därför inte orka klubba ihjäl mer än en enda kattunge. Hur många sätt finns det då att fördela de n kattungarna (som fortfarande anses vara olika), om Hulda skall få högst en?
5. Lillköpings kommunfullmäktige beslöt att förbarma sig över de stackars gummorna, som bodde alldeles ensamma ute i skogen, och begynte överväga möjligheten att bygga vägar mellan de tio olika paren av stugor.
- (a) Om man drar vägar mellan samtliga tio par av hus, vad kallas den struktur som då uppkommer?
 - (b) Man fruktade dock, att detta skulle bli alldeles för dyrt, och tänkte, att det måhända skulle räcka med vissa av de tio vägarna. De vägar man valde att bygga skulle dock väljas så, att ingen stuga bleve helt isolerad. Det vill säga, från varje stuga skulle man kunna ta sig till *någon* annan stuga. Hur många sätt finns det att åstadkomma detta?

¹Från Stockholms-Posten anno 1780, n:o 210, avtrycks följande notis, vilken man velat tillskriva Lenngren (Böök: *Prosabidrag af fru Lenngren i Stockholms-Posten, SAMLAREN 1910*):

I förgår bortstals utur et hus på Blasii-Holmen en gammal Bibel, med et par inneliggande glasögon, som ha den egenskapen, at de göra ordet tydligt och klart.

Ägare har förmodats vara den eponyma hjältinnan i *Gunilds Glasögon* (1794).

6. Gummorna flög i taket då de nåddes av denna sensationella nyhet och samlades till krigsråd med kaffegök hemma hos Agda. Känslorna var blandade. Visserligen var de tacksamma att slippa kliva över trädstammar och vada genom dy då de skulle besöka varandra, men eftersom deras högsta nöje i tillvaron var att samlas alla fem till kafferep, virka dukar och spå i sump, fastslog de med emfas, att det väsentliga inte vore, att man kunde ta sig till *någon* annan granne, utan att man kunde färdas skogen runt till *samtliga*.

Två av dem satte sig därför ned att författa varsin rosenrasande skrivelse till kommunfullmäktige, innehållande följande specifikationer:

Elsa: Man skall kunna vandra runt i skogen med start i sin egen stuga, och därefter återvända hem, efter att ha *använt varje väg precis en gång*.

Hulda: Man skall kunna vandra runt i skogen med start i sin egen stuga, och därefter återvända hem, efter att ha *besökt varje stuga precis en gång*.

- (a) Vad kallas Elsas och Huldaskrav med matematisk terminologi?
- (b) Föreslå hur vägarna kan byggas, så att både Elsas och Huldaskrav blir uppfyllda?
- (c) Föreslå hur vägarna kan byggas, så att varje gumma kan besöka varje annan, men ändå varken Elsas eller Huldaskrav är uppfyllt?
- (d) Kan vägarna byggas så, att Huldaskrav blir uppfyllt, men ej Elsas?
- (e) Kan vägarna byggas så, att Elsas krav blir uppfyllt, men ej Huldaskrav?

Det skall klart indikeras i varje deluppgift, varför de dragna vägarna uppfyller eller ej uppfyller de givna specifikationerna.

7. Betrakta identiteten

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-m} = \binom{n}{m} 2^m, \quad 0 \leq m \leq n.$$

- (a) Bevisa den *algebraiskt*.
- (b) Bevisa den *kombinatoriskt*².

²Betyder: Ställ upp ett kombinatoriskt problem, vars lösning kan tolkas som endera ledet i identiteten.