

KOMBINATORIK

Tentamen 30 augusti 2012

XANTCHA

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

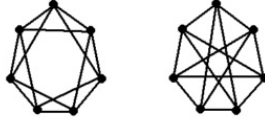
Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktiteter, potenser eller oordningar, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

1. Formulera och bevisa Binomialsatsen.
2. I ett kråkslott i Lillköping bor Samuel den Vise, en klok gammal gubbe som försörjer sig på homeopati, spådomskonst och annan vidskepelse.
 - (a) En dag gräver han i loppislådan, och finner därvid nio stycken kristaller: en röd, en orange, en gul, en grön, en blå, en indigo, en violett, en rosa och en vit. På hur många sätt kan han välja ut sex av dessa kristaller, om den indigo och den violetta ej får förekomma samtidigt?
 - (b) Dessa sex kristaller tänker han nu pracka på fyra av sina stamkunder, Lillköpings mest lättlurade tanter, med förevändningen att de bringar lycka, rikedom och tur i kärlek. På hur många sätt kan han fördela de sex (olika) kristallerna på de fyra damerna?
3. Under sina astrologistudier vid Södertörns högskola kom Samuel den Vise i kontakt med ordet

SYZYGY.

Tre himlakroppar står i *syzygy*, då deras positioner faller längs en rät linje.¹

¹Termen förekommer även inom den kommutativa algebran för att beteckna en linjär ekvation uppfylld av generatorerna till en modul. Den filologiska aspekten av ordet är intressant, emedan det tycks vara det kortaste som innehåller tre stycken Y.



FIGUR 1: Problem 7.

- (a) Förklara varför antalet olika “ord” som innehåller alla sex bokstäverna är

$$\frac{6!}{1!1!1!1!1!1!}$$

- (b) Använd metoden med genererande funktion för att finna antalet “ord” som använder precis fyra av bokstäverna.
4. Sju unga pojkar och flickor (dessvärre icke tillhörande Lillköpings mest begåvade ungdom) går att söka svaret på tillvarons mysterium hos Samuel den Vise, vilken noga spanar i stjärnorna och ivrigt rotar i sin kaffesump tills han har sju horoskop färdigställda.
- (a) Innan leveransen råkar dock Samuel den Vise förväxla de sju horoskoperna, så att samtliga kunder erhåller fel horoskop (vilket givetvis passerar obemärkt förbi). På hur många sätt kan detta ske?
- (b) På hur många sätt kan det ske, att alla utom en kund erhåller fel horoskop?
5. Samuel den Vise misstror läkare och hjälper mer än gärna sina klienter att finna lämpliga alternativa mediciner. Han brukar rekommendera följande kur, som, beroende på proportionerna, hjälper mot både underlivsklåda, impotens och gaser i magen:
Svälj först ett antal klunkar kamferolja, därefter några klunkar T-röd, och avsluta med några rejäla klunkar grädde.
Hela kuren skall bestå av n klunkar, och det är viktigt att de kommer i den ordningen som just beskrivits. (Det är tillåtet att svälja noll klunkar av en vätska.) Hur många olika recept är möjliga?
6. Samuel den Vise saluför tjugo olika magiska amuletter (“tillverkade av en häxa i det gamla Atlantis”), med priser varierande mellan 1200 och 1500 kronor. Han säljer även tjugo olika skrin, som kostar mellan 10 och 100 kronor stycket. Alla priser är olika (och hela antal kronor). Visa att två kunder kan köpa varsin amulett i ett skrin och betala exakt lika mycket.
7. Under sina ritualer och seanser, uttalar Samuel den Vise besvärjelser över de två magiska sigill, som finns avbildade i Figur 1. Frågan gäller nu, huruvida dessa båda grafer är isomorfa?