

# KOMBINATORIK

---

XANTCHA

*Tentamen 18 mars 2013*

**Lösningar.** Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

**Svar.** Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktulteter, potenser eller derangemangstal, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

**Betyg.** Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

I häradshövdingens hus i en liten svensk småstad, någon gång på 30-talet, härskar hushållerskan Malin, den grälsjuka "förklädeshäxan". Inackorderad i huset bor även den milda fru Pettersson med sin älskliga lilla dotter Fia. Dessa bägge är en ständig källa till förargelse för Malin, vars höga moral icke kan fördraga en ogift moder med ett oäkta barn under sitt tak.

1. "*Ne-e-nej*, maken till unge att ställa till besvär, det får man leta efter!" säger Malin, energiskt gnidande disken torr. "Man vet aldrig var man har henne. Och ingenting gör hon, bara står och hänger nere vid grinden hela dagarna. Om hon vore ordentligt *uppfostrad*, så skulle man inte behöva hålla efter henne ständigt och jämt. *Ne-e-nej*, häradshövdingen är alldeles för snäll när man tänker på allt vad Fia har förstört."

(a) Samtidigt grubblar hon över hur hon bäst skall arrangera porslinet. Hon har  $n$  (identiska) tallrikar och  $n$  (identiska) tefat. Dessa vill hon placera i två staplar bredvid varandra i köksskåpet, som rymmer precis  $n$  fat på höjden. Fat och tallrikar får staplas på varandra hur som helst. Hur många sätt finns det att ordna porslinet?

(b) “*Vad* har Fia förstört för nå’t?” frågar fru Pettersson, olustig över att höra sin dotter sålunda recenseras.

“Ja-a...” Malin drar välustigt på det en aning, innan hon drämmer till med sitt älsklingsexempel: “Hur var det med *ledstångsknoppen* till stora hallen? Den har fortfarande inte syntts till. Men den fanns där innan Fia kom till huset; det är då ett som är säkert! Och själv har jag fått lära mig att vara *rädd om sak*—” PANG! KLIRR! Där lyckades det Malin, gripen av rödglödgat nit, att slå sönder den nyligen torkade tallriken mot spisen.

Hur många sätt finns det att stapla de återstående  $2n - 1$  faten i skåpet?

2. Malin har värmt rester till middag. I pannan fräser 16 köttbullar och 12 korvar. Hon tänker sig fördela dem mellan husets fyra invånare på följande sätt. Häradshövdingen måste få minst tre korvar och minst sex köttbullar. Fru Pettersson bör få ett udda antal köttbullar (av någon dunkel anledning Malin icke riktigt kan redogöra för). Fia kan gott nöja sig med högst tre köttbullar och högst två korvar. (Egentligen borde hon väl hålla till godo med stekt gröt, den lata ungen, som inte kan passa måltiderna.)

Hur många sätt finns det att servera maten? Lös problemet med genererande funktion. (Observera att Malin själv också skall äta!)

3. Säga vad man vill om Malin, men lat är hon inte. En vacker sommardag står hon med tre (identiska) mattor att piska, tre (identiska) skjortor att stryka och tre (identiska) grytor att skura. Dessutom skall hon städa syltkällaren och hämta ägg hos fru Olsson.

(a) Hur många sätt finns det att utföra dessa elva sysslor i följd efter varandra?

(b) Till undvikande av monotoni, vill hon dock helst inte piska alla mattorna direkt efter varandra, ej heller stryka alla skjortorna eller skura alla grytorna i omedelbar följd. Hur många sätt finns det nu att lägga upp schemat?

4. Malin älskar att skylla ifrån sig och har målmedvetet raffinerat denna förmåga till en konst. Då någonting saknas eller går sönder i hushållet, så nog är det Fia eller någon av skomakarns sex ungar som varit framme. Jo jo! (Skomakarns bor nästgårds i ett litet eländigt kyffe, varför de alltså, i Malins interna ranking, tillhör en socialgrupp med om möjligt ännu högre nummer än fru Pettersson.)

Att icke göra häradshövdingen misstänksam, undviker Malin noga att skylla på samma barn två gånger i följd. Undantaget från denna regel är förstås stackars Fia; henne kan man aldrig skylla för ofta på! (“När nu inte fru Pettersson har vett att hålla efter henne!”)

Låt oss antaga, att det inträffar  $n$  “olyckor” efter varandra (mer eller mindre självförvållade) i huset. Hur många olika sätt finns det för Malin att utse sina syndabocker bland de sju barnen? Ställ upp en differensekvation för problemet och lös denna.

5. Den trätgiriga Malin låter aldrig ett tillfälle gå sig ur händerna att gråla på Fia: “Hur många gånger skall jag behöva säga, att Fia inte får hänga på räcket! Hm? Gå därifrån!”

Fia hoppar förskrämt ned från verandaräcket på gräsmattan.

“Akta gräset!” ryter Malin, ehuru nästa vredesutbrott utbryter i samma stund stackars Fia sätter foten på grusgången: “Gå inte på krattningen, förbaskade unge! Häradshövdingen vill ha snyggt på gården!”

Men då — ve och fasa! Mitt på den prydliga gräsmattan, rektangulär med sidorna 8 respektive 21 meter, upptäcker hon femton frodiga maskrosor! Och ogräs som, näst ungar, är det värsta Malin vet!

Visa att två av maskrosorna växer på ett inbördes avstånd som är högst 5 meter.

6. Malin har  $p$  röda liljor (mer eller mindre identiska), vilka hon tänker sig plantera i  $q$  stora blomsterkrukor.

(a) Alla krukorna är olika sinsemellan och ingen kruka får stå tom. Hur många sätt finns det att utföra planteringen?

(b) I sista stund bestämmer hon sig dock för att inkludera även en gul lilja bland alla de röda. Hur många sätt finns det nu att plantera ut de  $p + 1$  blommorna (fortfarande så, att alla krukor vare icke-tomma)?

7. Det går rykten i byn att det spökar i häradshövdingens hus, och Malin, som är tämligen lättsuggererad, tycker sig mycket riktigt strax märka tecken därpå. Egendomligt nog tycks spökerierna hålla sig till rummen med ett *jämnt* antal dörrar. Som rum räknas därvidlag alla utrymmen med dörrar; även garderober, skrubbar och dylikt.

Häradshövdingen är måttligt imponerad av hennes observationsförmåga. “*Spöken?* Vad är det för dumheter? Vem har sagt det?”

“Kyrkvaktmästarn! Han påstår att någon av de osaliga stigit rakt upp ur graven att hemsöka oss. Och handelsman, han såg ett spöke med sina

egna ögon en kväll, en liten kuslig er en med stora håliga ögon, som gick och bar på en barnkista.”

“Och hur vet Malin det?”

“Ja-a, springpojken berättar ju alltihop när han kommer över om morgnarna.”

Häradshövdingen snörper på mun. “Handelsman har alltid varit en fåntratt; hälsa springpojken det. Och kyrkvaktmästaren är inte bättre han!”

Malin fnyser till svar. “Det finns mycket mellan himmel och jord man inte begriper!”

Villan har tre ytterdörrar: främre dörren, dörren mot altanen samt dörren ut på balkongen. Bevisa att det, även med Malins alla farhågor i beaktande, garanterat finns ett spökfritt rum i huset.