KOMBINATORIK

Xantcha

Tentamen 13 juni 2013

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, fakulteter, potenser eller derangemangstal, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

Betyg. Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

Denna tentamen utspelar sig i Jultomtens legendariska fabrik vid Nordpolen.

1. (a) En (mycket hoppfull) pojke önskar sig femton olika djur i julklapp.[1] På hur många sätt kan han skriva sin önskelista? (Djuren skall listas en och endast en gång vardera, i någon ordning.)

---

[1]På Svensk Television anser man det lämpligt att censurera så bortskämda ungar, och klipper vanligen bort denna scen då *Santa's Workshop* visas på julafton. Så här lyder det, då Jultomten läser pojkens önskelista:

> "Dear Santy Claus, I'm Billy Brown.
> Here's a list I've jotted down:
> I want a giraffe and a duck and a whale,
> A cow and a pig with a seven-foot tail,
> A tiger that roars and a leopard with spots,
> A barrel of monkeys, a pony who trots;
> I want a baboon, a dog that'll bark,
> A walrus, a herring, a hog and a shark."
> — Hah! I'll give him Noah's Ark!

   (b) Bland de femton djuren han önskar sig finns en giraff och en anka. På hur många önskelistor står giraffen nämnd någonstans före ankan?
   (c) På hur många önskelistor förekommer giraffen och ankan ej omedelbart intill varandra?

2. Över Kalle Ankas öppna spis sitter Knattes, Fnattes och Tjattes olikfärgade strumpor prydligt upphängda.
   (a) På hur många sätt kan Jultomten fördela sexton identiska karameller i de tre strumporna?
   (b) Hur många sätt finns det, om varje strumpa rymmer högst sju karameller?

3. Den 13 december firar man Lucia i Jultomtens verkstad. I luciatåget skall ingå tärnor, stjärngossar och pepparkaksgubbar i någon ordning. Tåget bör dessutom, för formens skull, innehålla minst en Lucia, ehuru denna eller dessa alls icke behöver bilda täten.
   (a) Hur många olika luciatåg kan man bilda med n personer, där $n \geqslant 1$?
   (b) På Tomtefabrikens personalmöte beslöt man, att tåget borde innehålla ett jämnt antal stjärngossar samt ett udda antal pepparkaksgubbar. Hur många olika luciatåg finns det med dessa ytterligare specifikationer?

4. Julklapparna magasineras, allt eftersom de tillverkas, i fabrikens lager, vilket opererar efter strikt matematiska principer. Julklapparna förökar sig nämligen enligt följande två regler.
   - Varje dag ges antalet mjuka klappar av dubbla antalet hårda klappar föregående dag.
   - Antalet hårda klappar är en fler än totala antalet klappar dagen innan.

   Varje julafton töms lagret och man begynner på ny kula. Hur många julklappar har man sedan nästa julafton att dela ut?

5. Den enorma julklappsfabriken omfattar 2013 rum, mellan vilka leder ett okänt antal portar. Det är känt att man kan förflytta sig från varje rum till varje annat (utan att någonsin behöva våga sig utomhus i den arktiska kylan). Det är också omöjligt att irra runt i cirklar inuti fabriken.

(a) Hur många portar kan fabriken som mest ha? Och som minst? (Vi bortser härvidlag från eventuella ytterdörrar.)

(b) Dagarna före jul inträffar en datorkrasch i husets säkerhetssystem som styr dörrarnas kodlås. Tre portar fastnar i låst läge, omöjliga att öppna. Visa att det finns ett rum, sådant att minst 503 övriga rum fortfarande kan nås från detta.

6. I en av fabrikens mångahanda salar är en tomtenisse ivrigt sysselsatt att måla schackbräden med schackrutig färg. På ett sådant bräde, av storlek $p \times p$, tänker vi oss ett torn på rundvandring. Tornet får ju, som bekant, förflytta sig vertikalt och horisontellt, däremot ej diagonalt.

   För vilka positiva heltal p kan tornet vandra runt schackbrädet och återvända till utgångspunkten, besökande varje ruta precis en gång? (*Id est:* För vilka p finns en Hamilton-cykel på brädet?)

7. Låt $0 \leqslant k \leqslant n$. Betrakta identiteten

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

   (a) Bevisa den *algebraiskt*.

   (b) Bevisa den *kombinatoriskt*. Detta betyder: Ställ upp ett kombinatoriskt problem (gärna hämtat från Jultomtens verkstad), vars lösning kan tolkas som endera ledet i identiteten.