# KOMBINATORIK

Xantcha

*Tentamen 13 juni 2013*

1. (a) Det finns $15!$ olika önskelistor.

   (b) Hälften av dessa, $\frac{15!}{2}$, listar giraffen före ankan.

   (c) Ankan och giraffen kan utplaceras på $15 \cdot 14 = 210$ sätt, från vilket skall subtraheras de 28 sätten som placerar dem som grannar. På de övriga 13 platserna kan nu de kvarvarande 13 djuren placeras valfritt. Antalet listor är alltså $(210 - 28) \cdot 13! = 182 \cdot 13!$.

2. (a) Vi söker antalet naturliga lösningar till $x + y + z = 16$, som är $\binom{16+3-1}{16} = 153$.

   (b) Vi söker nu antalet lösningar där $x, y, z \leqslant 7$. Enligt Principen om Inklusion och Exklusion är detta antal

$$\binom{16+3-1}{16} - 3\binom{8+3-1}{8} + 3\binom{0+3-1}{0} = 153 - 135 + 3 = 21.$$

3. (a) Svaret är koefficienten för $\frac{x^n}{n!}$ i den exponentiella genererande funktionen

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$
$$= e^{3x}(e^x - 1) = e^{4x} - e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(4x)^n}{n!} - \frac{(3x)^n}{n!}\right),$$

   som är $4^n - 3^n$. (Detta kan även inses helt elementärt.)

   (b) Svaret är koefficienten för $\frac{x^n}{n!}$ i den exponentiella genererande funktionen

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} (e^x - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{3x} + e^{-x} - 1) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(4x)^n}{n!} - \frac{(3x)^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}\right) - 1\right),$$

som är $\frac{1}{4}(4^n - 3^n + (-1)^n)$ när $n \geqslant 1$ (och 0 när $n = 0$).

4. Låt $h_n$ beteckna antalet hårda julklappar dag $n$ efter julafton och $m_n$ antalet mjuka klappar. Då gäller differensekvationerna

$$\begin{cases} m_n = 2h_{n-1} \\ h_n = h_{n-1} + m_{n-1} + 1, \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $h_0 = m_0 = m_1 = 0$ och $h_1 = 1$. En differensekvation för de hårda klapparna blir

$$h_n = h_{n-1} + m_{n-1} + 1 = h_{n-1} + 2h_{n-2} + 1,$$

som har en partikulärlösning $h_n^{(p)} = -\frac{1}{2}$. Karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, med rötterna $\lambda = 2, -1$, vilket ger den homogena lösningen $h_n^{(h)} = A2^n + B(-1)^n$. Antalet hårda klappar ges alltså av formeln

$$h_n = h_n^{(h)} + h_n^{(p)} = A2^n + B(-1)^n - \frac{1}{2}.$$

Från begynnelsevillkoren fås $A = \frac{2}{3}$ och $B = -\frac{1}{6}$, varav

$$h_n = \frac{1}{6}(2^{n+2} - (-1)^n - 3)$$
$$m_n = 2h_{n-1} = \frac{2}{6}(2^{n+1} - (-1)^{n-1} - 3).$$

Det totala antalet julklappar är

$$j_n = h_n + m_n = \frac{1}{6}(2^{n+3} + (-1)^n - 6).$$

Nästa julafton finns således $j_{365} = \frac{1}{6}(2^{368} - 7)$ julklappar i magasinet att dela ut.

5. (a) Modellera fabriken med en graf, där rummen utgör noder och portarna bågar. Enligt förutsättningarna är fabriken ett träd med 2013 noder, och måste därför ha precis 2012 bågar, det vill säga 2012 dörrar.

   (b) De låsta dörrarna splittrar upp fabriken i fyra sammanhängande komponenter, tillsammans innehållande $2013 = 4 \cdot 503 + 1$ rum. Enligt Lådprincipen innehåller då någon komponent minst 504 rum.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 4 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 16 | 7 | 6 | 5 |
| 15 | 8 | 9 | 10 |
| 14 | 13 | 12 | 11 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 36 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 35 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 34 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 |
| 33 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |

…

Figur 1: Problem 6.

6. Uppenbarligen kan tornet vandra runt schackbrädet då $p = 1$. För jämna $p$ finns de lösningar som presenteras i Figur 1.

   Låt oss visa att tornet inte kan vandra runt brädet för udda $p > 1$. Uppenbarligen måste det finnas lika många svarta som vita rutor om vandringen skall gå att genomföra, eftersom tornet i varje steg växlar mellan de två färgerna. Men då $p$ är udda är också $p^2$ udda, och det kan därför ej finnas lika många rutor av de bägge slagen. Följaktligen är rundvandringen omöjlig.

   (Med matematiskt språk är grafen som schackbrädet representerar tudelad i två olika stora parter, vilket bevisar att en Hamilton-cykel ej kan existera.)

7. (a) Identiteten stämmer uppenbarligen för $n = k = 0$. Fixera ett $n$ och antag att

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

närhelst $0 \leqslant k \leqslant n$. Vi bevisar att

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

gäller närhelst $0 \leqslant k \leqslant n+1$.

Då $0 \leqslant k \leqslant n$ är

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

enligt Pascals triangelschema. Om $k = n+1$ är

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Enligt Induktionsprincipen gäller därför den sökta identiteten för alla $k$ och $n$.

(b) Betrakta $n + 1$ (olika) julgranar ordnade på rad och studera antalet sätt att välja $k + 1$ av dessa.

- Å ena sidan går detta uppenbarligen på $\binom{n+1}{k+1}$ sätt.
- Å andra sidan kan man räkna de urval, i vilka man väljer gran nummer $m+1$ och sedan $k$ granar från de $m$ som står till vänster om denna. Det finns $\binom{m}{k}$ sådana urval, och det sökta svaret är summan över alla möjliga $m$.