KOMBINATORIK

Xantcha

Tentamen 21 augusti 2013

Lösningar. Fullständiga lösningar skall redovisas på varje problem. Enbart räkningar utan förklarande text kan aldrig ge mer än halv poäng på en uppgift.

Svar. Svaren skall förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, fakulteter, potenser eller derangemangstal, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i tiosystemet.

Betyg. Varje problem är värt 6 poäng. Betygen 3, 4 och 5 svarar ungefärligen mot 18, 25 respektive 32 poäng, ehuru poängen allenast är att betrakta som vägledande vid betygsättningen.

Denna tentamen utspelar sig bland kullarna där Bamse och hans vänner bor.

1. Det finns en hemlig underjordisk gång som leder till Vargens rövarkula i skogen. Som vägvisare nere i myllret av passager har Vargen utplacerat en massa bokstäver. På den rätta stigen står de tio bokstäverna

   NATURRUTAN

   i någon ordning, som då bildar ett kodord för den invigde.

   (a) Hur många hemliga kodord kan Vargen bilda av (samtliga) dessa tio bokstäver?

   (b) Eftersom Vargen vill kunna använda gången åt båda hållen, så är det en fördel om kodordet är en *palindrom*, det vill säga läses likadant framlänges som baklänges. Ordet NATURRUTAN själv är ett exempel på en palindrom. Hur många kodord kan Vargen bilda som är palindromer?

2. Vargens alla kusiner är förvillande lika, och, att ytterligare förbrylla utomstående, har de allesammans likadana byxor.

   En dag tar sju vargkusiner och tvättar sina byxor (lär inte hända alltför ofta), varpå plaggen hängs upp på tork. Sedan väljer de sig slumpvis var sitt rent par.

   (a) Vad är sannolikheten att ingen vargkusin får tillbaka sitt eget par byxor?

   (b) Vad är sannolikheten att precis två vargkusiner erhåller sitt eget par byxor?

3. Bamse skall fara ut på äventyr till havs. Innan avresan bär man ned allt bagage till Skalmans båt *Viktoria*, som ligger förankrad i hamnen. Eftersom Bamse inte vill trötta ut sig innan resan, ber han sina tre barn bära de d (identiska) burkarna med dunderhonung, där det kan antagas att $d \geqslant 7$.

   Nalle-Maja är starkast och bör bära minst fem burkar, medan Brum kan ta högst två. Teddy har inga specifikationer.

   Hur många sätt finns det att fördela honungsburkarna mellan ungarna? Lös problemet med genererande funktion.

4. Dunderhonungen (en lätt modifierad variant av anabola steroider), kokas av Bamses farmor i hennes laboratorium uppe på Höga berget. Hon är en riktig krutgumma med doktorshatt (doktorshuckle?) i honungsföreningarnas kemi.

   I hennes skafferi trängs tomma burkar med fulla burkar, vilka fortplantar sig enligt följande principer.

   - Varje dag har antalet fulla honungsburkar *ökat* med kvadruppla (alltså fyrdubbla) antalet tomma burkar i skafferiet dagen före.
   - Antalet tomma honungsburkar en given dag är hälften av antalet fulla burkar dagen före.

   Om Farmor startar med en enda tom honungsburk, hur många fulla burkar finns det då i skafferiet efter n dagar?

5. Bland kullarna ligger sex hus som tillhör Bamse, Lille Skutt, Skalman, Ola Grävling, Mickelina Räv och Annika Anka. Vägar löper mellan varje par av hus, *förutom* att Ola Grävlings, Mickelinas och Annika Ankas hus *inte* är (direkt) förbundna med varken Lille Skutts eller Skalmans hus. Beteckna grafen som bildas av husen och vägarna med G.

(a) Är G ett träd?

(b) Innehåller G en Euler-krets?

(c) Innehåller G en Euler-bana?

(d) Innehåller G en Hamilton-cykel?

(e) Innehåller G en Hamilton-väg?

(f) Är G tudelad (bipartit)?

6. Lille Skutts trädgårdsland har formen av en liksidig triangel med sidan 3 meter. Sista skörden inför vintern återstår endast tio morötter i landet. Visa att två av dem växer på ett avstånd som är högst 1 meter.

7. Skalman studerar följande talteoretiska problem. Låt n och k vara positiva heltal. Beteckna med $p(n,k)$ antalet sätt att skriva n som summan av k positiva heltal, där ordningen på summanderna anses oväsentlig.

   Till exempel är $p(6,2) = 3$, svarande mot de tre uppdelningarna

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3.$$

(a) Beräkna $p(n, n-1)$.

(b) Beräkna $p(n, 2)$.

(c) Bevisa att
$$p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k).$$