KOMBINATORIK

Xantcha

Lösning 21 augusti 2013

1. (a) Vargen kan bilda
$$\frac{10!}{2!2!2!2!2!} = \frac{10!}{32}$$
olika kodord.

   (b) I en palindrom räcker det att arrangera de första fem bokstäverna; de sista fem bokstäverna blir därmed entydigt bestämda. De första fem bokstäverna måste vara NATUR i någon ordning, och det finns alltså $5! = 120$ olika palindromer.

2. (a) Antalet sätt detta kan ske på är
$$d_7 = 7!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 1,854.$$
Sannolikheten att ingen vargkusin får tillbaka sitt eget par byxor är
$$\frac{d_7}{7!} = \frac{1,854}{5,040} = \frac{103}{280}.$$

   (b) Antalet sätt detta kan ske på är
$$\binom{7}{2}d_5 = 21 \cdot 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 21 \cdot 44 = 924.$$
Sannolikheten att precis två vargkusiner erhåller sitt eget par byxor är
$$\frac{\binom{7}{2}d_5}{7!} = \frac{924}{5,040} = \frac{11}{60}.$$

3. Svaret är koefficienten för x^d i den genererande funktionen

$$(x^5 + x^6 + \cdots)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x^5}{1-x} \cdot (1 + x + x^2) \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{x^5 + x^6 + x^7}{(1-x)^2} = (x^5 + x^6 + x^7)\left(1 + \binom{2}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \cdots\right),$$

varur koefficienten för x^d (då $d \geqslant 7$) avläses till

$$\binom{d-4}{d-5} + \binom{d-5}{d-6} + \binom{d-6}{d-7} = (d-4) + (d-5) + (d-6) = 3d - 15.$$

4. Låt t_n och f_n beteckna antalet tomma och fulla burkar, respektive, efter n dagar. Då gäller enligt förutsättningarna att $t_n = \frac{1}{2} f_{n-1}$ och

$$f_n = f_{n-1} + 4t_{n-1} = f_{n-1} + 2f_{n-2}.$$

Denna differensekvation har den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 = \lambda + 2$, med lösningarna $\lambda = 2, -1$. Den allmänna lösningen är därför

$$f_n = A2^n + B(-1)^n.$$

Från begynnelsevillkoren

$$f_0 = 0 \qquad \text{och} \qquad f_1 = f_0 + 4t_0 = 4$$

fås $A = \frac{4}{3}$ och $B = -\frac{4}{3}$.
Antalet fulla honungsburkar i skafferiet efter n dagar är alltså

$$f_n = \frac{4}{3}(2^n - (-1)^n).$$

5. Grafen G har det utseende som porträtteras i Figur 1.

(a) G innehåller cykler och är alltså inget träd.

(b) G har noder av udda grad och saknar därför Euler-krets.

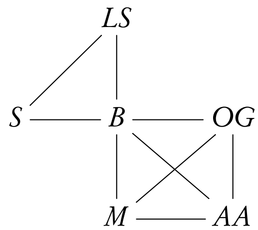
(c) G har fler än två noder av udda grad och saknar därför Euler-bana.

(d) G saknar Hamilton-cykel på grund av flaskhalsen vid Bamses hus.

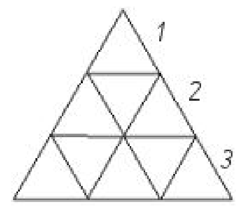
(e) Det finns en Hamilton-väg:

$$S - LS - B - M - OG - AA$$

(f) G innehåller cykler av udda längd och kan inte vara tudelad.



Figur 1: Problem 5.



Figur 2: Problem 6.

6. Indela trädgårdslandet i nio smärre trianglar enligt Figur 2. Enligt Lådprincipen växer två morötter inom samma triangel och deras avstånd är då högst 1 meter.

7. (a) Enda sättet att uppdela n i $n-1$ summander är

$$n = 2 + 1 + 1 + \cdots + 1,$$

varför $p(n, n-1) = 1$.

(b) Möjligheterna är

$$n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) = \cdots = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämnt;} \\ \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Detta visar att

$$p(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämnt;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}.$$

(c) Varje uppdelning av n som en summa av k summander faller i endera av två kategorier:

- Talet 1 återfinns bland summanderna. Strykes då denna etta, erhåller man en uppdelning av $n-1$ som en summa av $k-1$ summander. Antalet sådana uppdelningar är $p(n-1, k-1)$.
- Talet 1 återfinns inte bland summanderna. Alla k summander är då minst 2, och man kan subtrahera 1 från samtliga, varpå man når en uppdelning av $n-k$ som en summa av k positiva summander. Antalet sådana uppdelningar är $p(n-k, k)$.

Av Additionsprincipen följer nu att

$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k).$$